

Metodi e Modelli della Fisica Matematica

1 Introduzione

I corsi di *Fisica Matematica* I e II della laurea triennale sono stati dedicati alla meccanica newtoniana dei sistemi materiali e alla meccanica analitica.

In particolare si è visto come:

- dal punto di vista dei metodi matematici,

→ la statica dei sistemi utilizza equazioni algebriche per determinare le configurazioni di equilibrio e le reazioni vincolari, mentre

→ la dinamica faccia ricorso alle equazioni differenziali
alle derivate ordinarie.

— Nella prima parte di questo corso ci siamo occupati di

equazioni differenziali alle derivate ordinarie

e dei relativi metodi di studio della stabilità delle soluzioni,

— In questa seconda parte del corso ci dedicheremo alle

equazioni differenziali alle derivate parziali

E, in particolare al problema della propagazione delle onde

e ad alcuni **problemi fisici** che si trattano con le relative metodologie.

			METODI MATEMATICI
		<i>Statica</i>	<i>Equazioni algebriche</i>
	Sistemi a N gr. di libertà	↕	
	↑	<i>Dinamica</i>	<i>Eq. diff. alle deriv. ordin.</i>
MODELLI FISICI	↕		
	Sistemi a ∞ gr. di libertà	<i>St. e Din.</i>	<i>Eq. diff. alle deriv. parz.</i>

2 Cinematica delle onde

2.1 Meccanica dei sistemi materiali e teoria delle onde

La Meccanica si occupa principalmente dello

studio dell'equilibrio e del moto dei sistemi materiali.

Essa esamina:

→ la cinematica, cioè la descrizione del moto dal punto di vista di come esso avviene di fatto, indipendentemente da ciò che lo provoca, ovvero prescindendo dalle forze, ma

limitandosi al mutamento della geometria del sistema in rapporto al tempo;

→ la statica, cioè le condizioni di equilibrio del sistema in presenza di forze;

→ la dinamica, cioè le condizioni di moto del sistema in presenza di forze.

Inoltre essa schematizza i sistemi materiali secondo livelli di astrazione più o meno precisi, in base alle necessità di precisione richieste dal problema.

Abbiamo allora lo schema:

- punto materiale, quando le dimensioni del corpo e la sua struttura sono trascurabili rispetto alle dimensioni della regione di spazio in cui si estende la traiettoria del moto
- corpo rigido, quando le deformazioni del corpo sono trascurabili durante l'intervallo di tempo nel quale si studia il moto;
- sistema olonomo ad un numero finito di gradi di libertà, quando il sistema può essere descritto da un numero finito di funzioni del tempo;
- continuo deformabile, quando nessuna delle condizioni precedenti si realizza.

La *teoria della propagazione ondosa*,

non si occupa del moto dei corpi materiali,

ma del moto delle “informazioni”, o “segnali”

nello spazio, o attraverso gli stessi corpi continui.

L'*osservatore* decide di studiare, per ragioni di interesse fisico o matematico,

l'evoluzione temporale del luogo geometrico in cui una certa grandezza presenta determinate proprietà:

ad esempio: si mantiene *costante nel tempo*, oppure presenta una *discontinuità* di un certo ordine, ecc.

Viene chiamata **onda** una perturbazione che si propaga in questo modo

2.2 Fronte d'onda e sue rappresentazioni

i) Punto di vista geometrico

Generalmente si assume che il luogo geometrico di cui si vuole studiare l'evoluzione sia una *varietà* sufficientemente regolare (continua, differenziabile, almeno due volte) di dimensione inferiore di un'unità rispetto a quella dello spazio in cui si propaga.

- Una superficie se il moto avviene nello spazio fisico (generalmente, ma non obbligatoriamente),
- o una curva se il moto avviene nel piano (caso bidimensionale),
- o un punto se avviene lungo un asse (caso unidimensionale).

Più in generale una ipersuperficie se ci si muove, ad esempio in uno spazio delle configurazioni di dimensione più alta di quello fisico ordinario.

Si dice allora fronte d'onda tale varietà (ipersuperficie, superficie, curva, o punto).

ii) Punto di vista analitico

Dal **punto di vista analitico** il fronte d'onda si rappresenta convenientemente mediante la sua equazione cartesiana:

$$\varphi(t, x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2.1)$$

dove n è la dimensione dello spazio in cui il fronte si muove (generalmente uno spazio reale R^n dotato di una metrica euclidea).

Le funzioni φ si suppongono conosciute in un istante di riferimento che chiameremo istante iniziale.

iii) Punto di vista cinematico

Le informazioni sulla **cinematica del fronte d'onda**, cioè su come esso si muove nello spazio, si ottengono, come avviene anche per ogni sistema meccanico,

→ studiando il moto di ogni suo singolo punto.

→ Dal punto di vista lagrangiano questo significa:

scelto **un punto del fronte** associato alla **condizione iniziale** x_{0i} ,

conoscere le funzioni $x_i(t)$ che ne identificano la posizione in ogni istante,
ovvero conoscere le equazioni parametriche della traiettoria rispetto al tempo scelto come parametro:

$$x_i \equiv x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.2)$$

In questo modo ogni punto del fronte d'onda viene considerato come se fosse dotato di una individualità propria. Durante il moto le sue coordinate soddisfano in ogni istante l'equazione del fronte d'onda (2.2.1):

$$\varphi(t, x_i(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.3)$$

→ **Differenziando** $\varphi(t, x_i(t)) = 0$ rispetto al **tempo** la (2.2.3) otteniamo:

$$\varphi_t + \varphi_i \frac{d x_i}{d t} = 0, \quad (2.2.4)$$

dove abbiamo introdotto le notazioni di comodo:

$$\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (2.2.5)$$

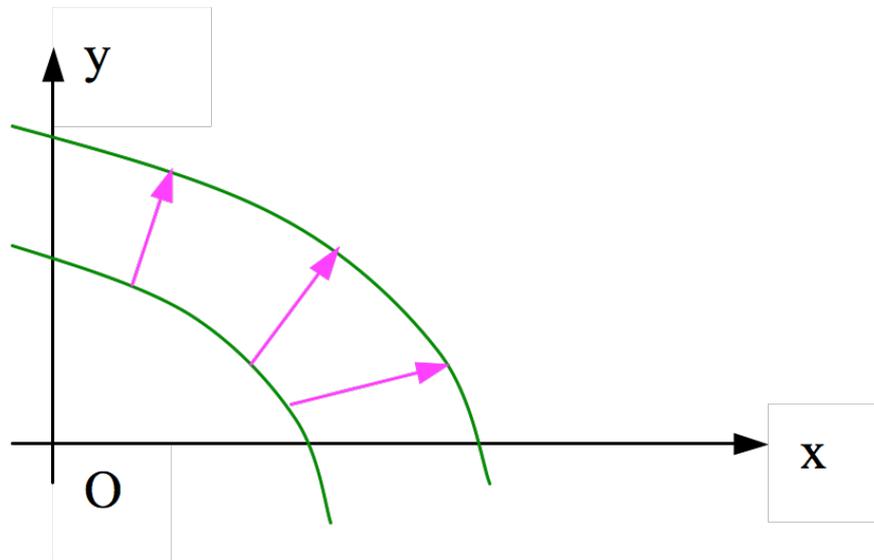


Fig. 1 - **Fronte d'onda in due dimensioni**

2.3 Raggi, velocità radiale e velocità normale

- Le traiettorie di ciascun punto del fronte d'onda prendono il nome di *raggi*, per analogia con la denominazione usuale nell'ottica geometrica.
- Il vettore di componenti:

$$A_i = \frac{d x_i}{d t}, \quad (2.3.1)$$

prende il nome di *velocità radiale* dell'onda nel punto e nell'istante considerato.

Il vettore di componenti φ_i non è altro che il *gradiente* della funzione φ rispetto alle coordinate spaziali, per cui ha la direzione della *normale* al fronte d'onda, nell'istante considerato.

E' comodo, allora, introdurre il vettore normale di componenti:

$$n_i = \frac{\varphi_i}{|\vec{\nabla}\varphi|}, \quad |\vec{\nabla}\varphi| = \sqrt{\varphi_i \varphi_i}, \quad (2.3.2)$$

che risulta di conseguenza di modulo unitario: $n_i n_i = 1$.

Possiamo, a questo punto, riscrivere la (2.2.4) dividendo entrambi i membri per $|\vec{\nabla}\varphi|$ e ottenere:

$$\frac{\varphi_t}{|\vec{\nabla}\varphi|} + \Lambda_i n_i = 0. \quad (2.3.3)$$

Introducendo la notazione:

$$\lambda = -\frac{\varphi_t}{|\vec{\nabla}\varphi|}, \quad (2.3.4)$$

abbiamo dalla (2.3.3):

$$\lambda = \Lambda_i n_i. \quad (2.3.5)$$

Velocità normale

Questa relazione ci permette di interpretare il significato cinematico di λ , che non è altro che la componente della velocità radiale lungo la normale al fronte d'onda.

Per questo λ prende il nome di *velocità normale*.

Questa grandezza ha un **ruolo fondamentale** nella cinematica delle onde in quanto rappresenta la *misura dell'effettivo avanzamento del fronte*, dal momento che la componente della velocità radiale tangente al fronte d'onda caratterizza un semplice scorrimento del fronte su se stesso.

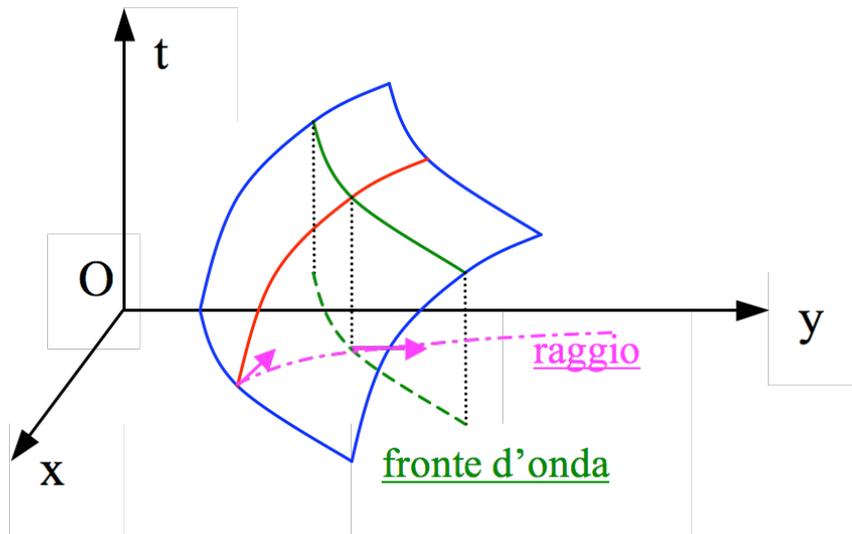


Fig. 2 - Rappresentazione spazio-temporale: fronte d'onda, raggio e velocità radiale

2.4 Espressione della velocità radiale in termini di λ e n_i

Oltre a studiare la cinematica delle onde **seguendo, istante per istante, il moto del singolo punto del fronte d'onda al variare del tempo**

(*punto di vista lagrangiano*),

—→ possiamo anche, fissato un istante di tempo, considerare tutti i punti del fronte insieme, mentre transita per uno spazio di controllo

(*punto di vista euleriano*).

In questo caso si esaminano le varie grandezze al variare del punto del fronte d'onda, o di una funzione delle sue coordinate.

Un approccio di questo tipo si ha quando si cerca di **esprimere la velocità radiale al variare di n_i , che varia a sua volta con il punto.**

La relazione (2.3.5) ci dà

l'espressione esplicita di λ in termini di Λ_i e di n_i .

E' però possibile anche

ricostruire l'intero vettore di componenti Λ_i conoscendo λ come funzione di n_i

e tenendo conto che, per come sono state definite, Λ_i ed n_i sono variabili tra loro indipendenti.

Per fare questo differenziamo la (2.3.5), ottenendo:

$$d\lambda = \Lambda_i dn_i + n_i d\Lambda_i. \quad (2.4.1)$$

Tenendo conto che *le variabili n_i sono condizionate*

a causa del vincolo $n_i n_i = 1$ sulla norma del versore,

introduciamo il *moltiplicatore di Lagrange* α ,

aggiungendo nella relazione precedente la quantità nulla che si ottiene differenziando il vincolo, riscritto per comodità nella forma:

$$\Phi \equiv \frac{1}{2} (n_i n_i - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad d\Phi \equiv n_i dn_i = 0. \quad (2.4.2)$$

→ Abbiamo:

$$d\lambda = \Lambda_i dn_i + n_i d\Lambda_i + \alpha n_i dn_i. \quad (2.4.3)$$

Questa tecnica dei moltiplicatori di Lagrange ci permette di considerare le componenti n_i come se fossero variabili indipendenti tra loro (variabili condizionate).

La relazione precedente, allora, fornisce le derivate parziali di λ rispetto alle variabili indipendenti n_i, Λ_i :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n_i} = \Lambda_i + \alpha n_i, \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \Lambda_i} = n_i. \quad (2.4.5)$$

La seconda relazione non ci dà nuove informazioni,

→ mentre dalla prima, moltiplicando per n_i e tenendo conto del vincolo (2.4.2) e della (2.3.5), ricaviamo ↘

il moltiplicatore di Lagrange:

$$\alpha = -\lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial n_j} n_j, \quad (2.4.6)$$

dove abbiamo cambiato, per comodità, il nome dell'indice sommato i in j .

Sostituendo la (2.4.6) nella (2.4.4) e risolvendo per Λ_i otteniamo la sua espressione in termini di λ e di n_i :

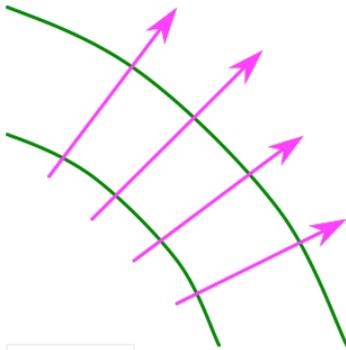
$$\Lambda_i = \lambda n_i + \frac{\partial \lambda}{\partial n_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial n_j} n_j n_i. \quad (2.4.7)$$

Si noti che, in generale la **velocità radiale** non è parallela alla normale al fronte d'onda e quindi i raggi non sono ortogonali al fronte d'onda stesso.

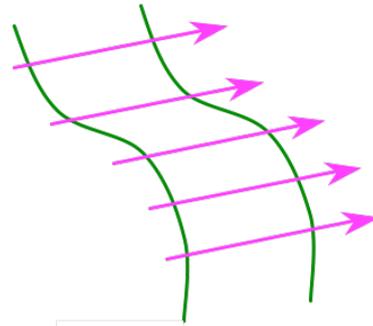
- Nel caso particolare in cui accada che i raggi sono ortogonali al fronte d'onda si hanno le *onde normali*;

- mentre nel caso in cui la velocità radiale sia, istante per istante indipendente dal punto del fronte d'onda, cosicché esso trasla senza deformarsi, si hanno le *onde di tralazione*.

Si ha così una prima elementare classificazione delle onde di tipo cinematico.



a)



b)

Fig. 3 - a) Onde normali - b) Onde di traslazione

2.5 Classificazione delle onde dal punto di vista analitico

Anziché classificare le onde

- dal punto di vista cinematico,

è spesso molto utile, a fini della risoluzione dei problemi, classificarle

- dal punto di vista analitico,

ovvero in base alle loro proprietà matematiche.

La classificazione tipica, in tal senso le distingue in:

◇ onde semplici: si chiamano onde semplici quelle per le quali il fronte d'onda è caratterizzato dalla condizione (implicita):

$$\varphi = x_i n_i - \lambda(\varphi) t, \quad (2.5.1)$$

dove λ è a sua volta funzione di φ e n_i è costante;

◇ onde di discontinuità: si chiamano onde di discontinuità le onde associate ad una variabile di campo per la quale solo la derivata prima nella direzione della normale n_i è discontinua attraverso il fronte d'onda (discontinuità debole);

◇ onde d'urto: si chiamano onde d'urto le onde associate ad una variabile di campo discontinua attraverso il fronte d'onda (discontinuità forte).

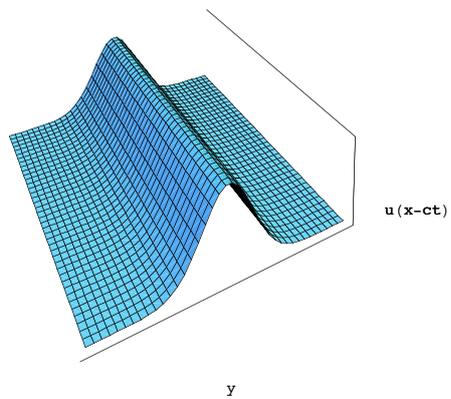
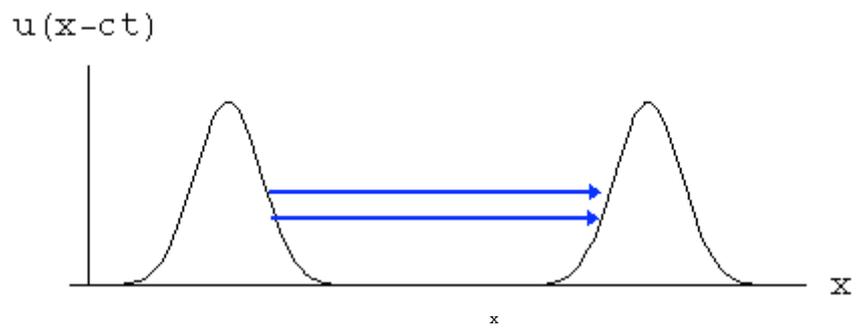


Fig. 4 - Onde semplici

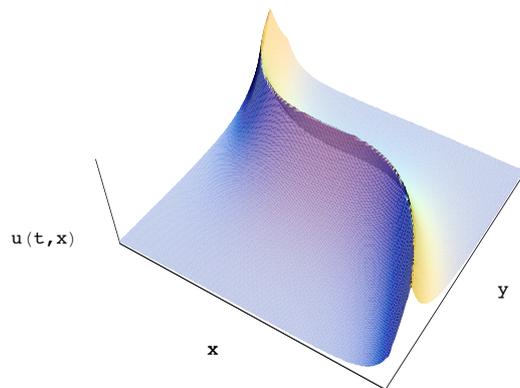
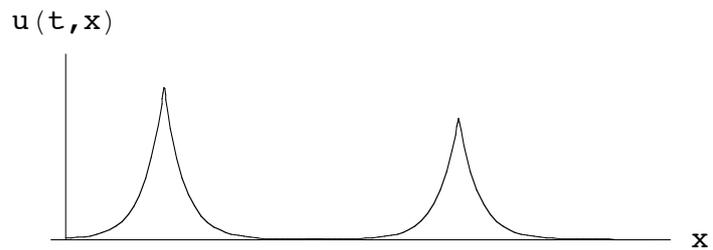


Fig. 5 - Onde di discontinuità

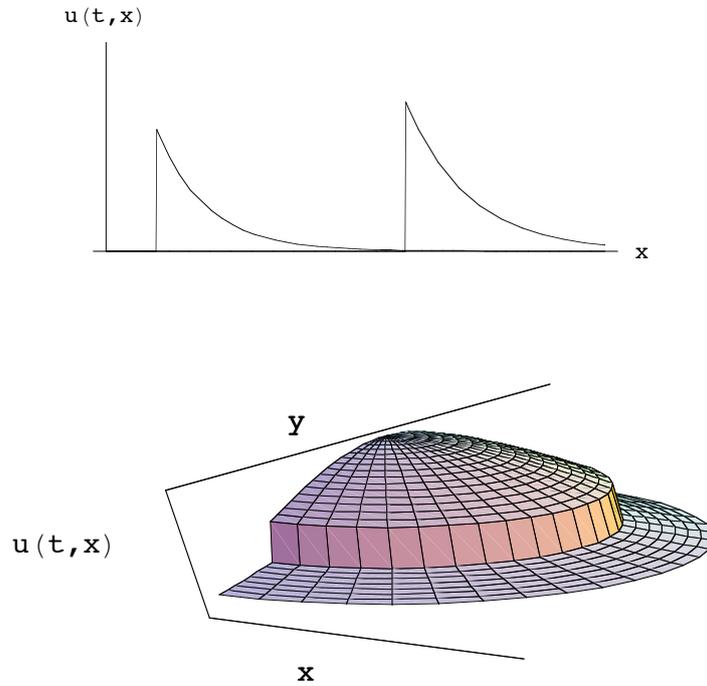


Fig. 6 - Onde d'urto

3 Dinamica delle onde

3.1 Introduzione

Sistemi a un numero finito di gradi di libertà

La dinamica dei sistemi meccanici ad un numero finito di gradi libertà

— come ad esempio, il *punto* materiale, il *corpo rigido*, i sistemi *lagrangiani e hamiltoniani* —

è descritta, in condizioni di differenziabilità, mediante

—> equazioni differenziali alle derivate ordinarie del tipo:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad (3.1.1)$$

- dove la variabile indipendente t viene fisicamente interpretata come il tempo,
- \mathbf{u} è un vettore definito in un dominio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^N$, che descrive lo stato del sistema in funzione del tempo,
- e $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ il campo delle velocità di fase, definito in $\mathcal{D} \times [t_1, t_2]$ che determina la dinamica del sistema, come una sorta di forza generalizzata.

Il punto denota la derivata temporale.

Sotto la condizione che tale campo di forze sia una funzione *continua* e *lipschitziana* dello stato \mathbf{u} ad ogni condizione iniziale $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$ corrisponde una e una sola soluzione del sistema differenziale (*integrale particolare*) e quindi uno e un solo moto del sistema.

Lo stato \mathbf{u} di un sistema di questo tipo

dipende da una sola variabile indipendente t , il tempo.

Non essendo coinvolta alcuna *variabile spaziale* le soluzioni del moto non rappresentano alcuna propagazione di segnali, onde o impulsi, ma semplicemente l'evoluzione dello stato del sistema meccanico.

Dinamica lineare delle onde

Perché vi sia propagazione ondosa, occorre coinvolgere

nello stato \mathbf{u} di un sistema

almeno una seconda variabile x ,

alla quale si dà significato di *coordinata spaziale*

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(t, x)$$

e più in generale un vettore $\vec{x} \equiv (x_i)$ dello spazio delle coordinate.

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(t, \vec{x}).$$

a) Caso di una sola coordinata x

Incominciamo considerando il caso

— di *una sola coordinata x* e

— di uno stato caratterizzato da *una sola funzione scalare $u(t, x)$* .

Avremo così un'equazione descritta da uno stato $u(t, x)$ definito in un dominio $[t_1, t_2] \times [x_1, x_2] \subset R^2$.

▷ Fisicamente questo rappresenta un continuo, come un campo di forze di qualche natura. il nostro sistema è ora dotato di ∞ gradi di libertà, caratterizzati dalla variabile reale x il cui dominio ha la potenza del continuo.

▷ Analiticamente, essendo presenti due variabili indipendenti, la descrizione in termini di equazioni differenziali di un tale sistema coinvolgerà necessariamente un sistema di equazioni alle derivate parziali, rispetto alle variabili indipendenti t, x .

ONDA

Il concetto *intuitivo* di onda,

o di segnale,

che SI PROPAGA

è legato, in prima approssimazione, all'idea che

la geometria di una soluzione particolare $\hat{u}(t, x)$

che in un certo istante \bar{t} è descritta dalla sua restrizione al dominio della sola variabile x , $\hat{u}(\bar{t}, x)$,

si mantenga *inalterata*,

dopo un qualunque incremento Δt del tempo, in una nuova posizione incrementata di Δx ,

ovvero che:

$$\hat{u}(\bar{t} + \Delta t, x + \Delta x) = \hat{u}(\bar{t}, x). \quad (3.1.2)$$

Questa condizione traduce analiticamente

il fatto fisico dello spostamento del segnale da x in $x + \Delta x$
nell'intervallo di tempo $[\bar{t}, \bar{t} + \Delta t]$.

La condizione cinematica (3.1.2) comporta una dinamica

per il sistema differenziale che ne governa l'evoluzione,

che si ottiene, in condizioni di differenziabilità, per la funzione $u(t, x)$.

Infatti assumendo che la condizione cinematica valga per ogni Δt ,
e quindi anche localmente per $\Delta t, \Delta x$ piccoli,

sviluppando in *serie di Taylor*

la funzione $\hat{u}(\bar{t} + \Delta t, x + \Delta x)$, nell'intorno di (\bar{t}, x) , abbiamo:

$$\hat{u}(\bar{t} + \Delta t, x + \Delta x) = \hat{u}(\bar{t}, x) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\bar{t}, x) \Delta t + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(\bar{t}, x) \Delta x + \mathcal{O}(2). \quad (3.1.3)$$

Se facciamo tendere a zero $\Delta t, \Delta x$, in modo da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo,

il confronto tra lo sviluppo (3.1.3) e la condizione cinematica (3.1.2) ci dà 

l'equazione differenziale lineare delle onde, al primo ordine:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.1.4)$$

dove abbiamo posto:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (3.1.5)$$

che rappresenta la velocità di propagazione dell'onda

e dove abbiamo eliminato le soprascritture della soluzione particolare.

Una generalizzazione del sistema appena scritto al caso in cui

lo stato \mathbf{u} abbia N componenti u_I

si può scrivere nella forma:

$$\frac{\partial u_I}{\partial t} + V^{(I)} \frac{\partial u_I}{\partial x} = 0, \quad I = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1.6)$$

dove $V^{(I)}$ è la velocità associata al moto di ogni componente del campo.

Più in generale ancora avremo la forma:

$$\frac{\partial u_I}{\partial t} + A_{IJ} \frac{\partial u_J}{\partial x} = 0, \quad I = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1.7)$$

dove A_{IJ} sono gli elementi di una matrice che non dipende dallo stato \mathbf{u} .

In rappresentazione assoluta scriveremo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0. \quad (3.1.8)$$

La (3.1.6) non è altro che una rappresentazione della (3.1.8) nel caso in cui la matrice sia diagonale (*coordinate normali*).

Esempio fisico

Un esempio fisico semplice è offerto dalle equazioni del campo elettromagnetico nel vuoto (*equazioni di Maxwell*), che nel caso unidimensionale, in cui i campi dipendono dal tempo e dalla sola coordinata x si scrivono, nel sistema di unità c.g.s.:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial B}{\partial x} = 0, \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad (3.1.10)$$

essendo $\vec{E} \equiv (0, E, 0)$, $\vec{B} \equiv (0, 0, B)$,

con $E \equiv E(t, x)$, $B \equiv B(t, x)$ i campi elettrico e magnetico.

Il sistema precedente ha proprio la forma (3.1.8) come si vede ponendo:

$$\underline{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{A}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1.11)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto, che rappresenta

la *velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche*.

Osserviamo come il sistema appena scritto rappresenta la *formulazione del primo ordine* per il campo elettromagnetico,

equivalente alla formulazione del secondo ordine che si ottiene

introducendo il potenziale vettore \vec{A} :

$\vec{A} \equiv (0, A, 0)$, $A \equiv A(t, x)$ che, nel gauge di radiazione è legato ai campi dalle relazioni:

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3.1.12)$$

Introdotte queste relazioni nel sistema precedente otteniamo l'unica equazione del secondo ordine per il potenziale A :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0, \quad (3.1.13)$$

che rappresenta *l'equazione delle onde elettromagnetiche unidimensionali*, del secondo ordine.

b) Caso di n coordinate x_i

La generalizzazione dei risultati precedenti al caso di n coordinate x_i si ottiene

ripetendo il procedimento esaminato per una sola coordinata sostituendo sistematicamente

$$x \longrightarrow x_i.$$

Arriviamo, in questo modo al sistema per la dinamica lineare delle onde, nella formulazione del primo ordine:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.14)$$

dove le \mathbf{A}_i sono le n matrici $N \times N$ dei coefficienti delle derivate rispetto alle coordinate spaziali del sistema.

Esempio fisico

Un esempio fisico è offerto, ancora una volta dalle equazioni di Maxwell nel vuoto, con campi dipendenti dalle tre coordinate dello spazio fisico e dal tempo:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial E_k}{\partial t} - c \varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_j}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.15)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial B_k}{\partial t} + c \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1.16)$$

dove ε_{ijk} è il tensore completamente antisimmetrico di Levi-Civita.

In questo caso il sistema si rappresenta nella forma compatta (3.1.14) ponendo:

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} E_k \\ B_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -c \varepsilon_{ijk} \\ c \varepsilon_{ijk} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.17)$$

La scrittura precedente rappresenta un

- vettore colonna a 6 componenti e
- una matrice 6×6 denotati a blocchi.

Anche in questo esempio, possiamo osservare, come accade usualmente nei problemi di natura fisica, che la formulazione del primo ordine proviene da una formulazione del secondo ordine.

Infatti sappiamo dall'elettromagnetismo che,

nel *gauge di radiazione* ($\phi = 0$), sussistono le seguenti relazioni:

$$E_k = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t}, \quad B_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \quad (3.1.18)$$

che, introdotte nelle equazioni del campo elettromagnetico conducono all'equazione del secondo ordine (lineare) di D'Alembert per il potenziale vettore:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \iff \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0. \quad (3.1.19)$$

Equazioni del secondo ordine iperboliche, ellittiche e paraboliche

I problemi differenziali alle derivate parziali di natura fisica

nascono molto spesso in una formulazione del secondo ordine.

Per questo si è data inizialmente una classificazione delle equazioni *lineari* del secondo ordine per una sola funzione incognita $u(t, x_i)$.

Nella forma più generale un' equazione lineare alle derivate parziali del secondo ordine si scrive:

$$\mathcal{A}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \mathcal{B}_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \mathcal{C} u + \mathcal{D} = 0. \quad (3.1.20)$$

dove coefficienti non dipendono dalla variabile incognita u , essendo l'equazione lineare e gli indici α, β contano il numero di variabili indipendenti.

Diremo che la (3.1.20) è un'equazione:

- iperbolica se la matrice simmetrica $\|\mathcal{A}_{\alpha\beta}\|$ non è definita di segno,
- ellittica se $\|\mathcal{A}_{\alpha\beta}\|$ è definita positiva (o negativa) e
- parabolica se $\|\mathcal{A}_{\alpha\beta}\|$ è singolare, ma non identicamente nulla e se il vettore (\mathcal{B}_α) non è identicamente nullo.

Esempi fisici

a) Equazioni iperboliche

- Un'equazione come l'equazione lineare delle onde di D'Alembert:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 u = 0, \quad (3.1.21)$$

costituisce un esempio di equazione del secondo ordine iperbolica.

Infatti si può scrivere nella forma (3.1.20) scegliendo:

$$x_0 = t; \quad \alpha, \beta = 0, i, j; \quad i, j = 1, 2, 3:$$

$$\mathcal{A}_{00} = \frac{1}{c^2}, \quad \mathcal{A}_{ij} = -\delta_{ij}, \quad \mathcal{A}_{0j} = 0, \quad \mathcal{B}_\alpha = 0, \quad \mathcal{C} = 0, \quad \mathcal{D} = 0. \quad (3.1.22)$$

La matrice $\|\mathcal{A}_{\alpha\beta}\|$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.1.23)$$

non è definita di segno, in quanto i suoi autovalori sono $\frac{1}{c^2}, -1, -1, -1$ e hanno segni discordi.

• Un altro esempio, che rappresenta una generalizzazione del precedente, è dato dall'equazione di Klein-Gordon della meccanica quantistica:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0, \quad (3.1.24)$$

dove ψ è la *funzione d'onda* (questa volta si tratta di una funzione a valori complessi), m la *massa della particella* e \hbar la *costante ridotta di Planck*.

In questo caso abbiamo:

$$\mathcal{A}_{00} = \frac{1}{c^2}, \quad \mathcal{A}_{ij} = -\delta_{ij}, \quad \mathcal{A}_{0j} = 0, \quad \mathcal{B}_\alpha = 0, \quad \mathcal{C} = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2}, \quad \mathcal{D} = 0. \quad (3.1.25)$$

La matrice $\|\mathcal{A}_{\alpha\beta}\|$ è la stessa di prima e quindi l'*equazione è iperbolica*.

Equazioni di tipo *iperbolico*,
come si vedrà meglio in seguito, sono associate a fenomeni di *propagazione ondosa*, in quanto coinvolgono una *variabile di tipo temporale* insieme alle *coordinate spaziali*. Inoltre governano una dinamica di onde la cui *velocità di propagazione è sempre limitata*.

b) Equazioni ellittiche

• Un esempio di equazione ellittica è offerto dall'equazione di Laplace che ha la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\nabla}^2 u = 0, \quad (3.1.26)$$

e si ottiene imponendo: $\alpha, \beta = i, j; i, j = 1, 2, 3$:

$$\mathcal{A}_{ij} = \delta_{ij}, \quad \mathcal{B}_i = 0, \quad \mathcal{C} = 0, \quad \mathcal{D} = 0. \quad (3.1.27)$$

Si ha la matrice $\|\mathcal{A}_{ij}\| \equiv (\delta_{ij})$, che è **definita positiva**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.28)$$

- Anche l'equazione di Poisson che generalizza la precedente è *ellittica*:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.1.29)$$

Un'equazione di questo tipo si incontra, ad esempio in *elettrostatica*, dove ϕ rappresenta il *potenziale scalare* del campo elettrico e ρ la *densità di carica elettrica* e ε_0 la *costante dielettrica* del vuoto.

Abbiamo in questo caso:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ij} &= \delta_{ij}, & \mathcal{B}_i &= 0, \\ \mathcal{C} &= 0, & \mathcal{D} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

Le equazioni ellittiche coinvolgono solo coordinate di tipo spaziale e non il tempo e, come tali, compaiono in problemi di tipo statico e non nei problemi di propagazione.

c) Equazione parabolica

Un esempio fisico di equazione parabolica (in campo complesso, anziché reale in questo caso) è dato dall'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo:

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi = 0, \quad (3.1.31)$$

che si ottiene ponendo: $x_0 = t$; $\alpha, \beta = i, j$; $i, j = 1, 2, 3$:

$$\mathcal{A}_{00} = 0, \quad \mathcal{A}_{i0} = 0, \quad \mathcal{A}_{ij} = -\frac{\hbar^2}{2m} \delta_{ij}, \quad (3.1.32)$$

$$\mathcal{B}_0 = i \hbar, \quad \mathcal{B}_i = 0, \quad \mathcal{C} = 0, \quad \mathcal{D} = 0.$$

3.2 Sistemi iperbolici quasi lineari

Formulazione del primo ordine

In vista dell'elaborazione di una teoria della propagazione ondosa non lineare osserviamo che,

come avviene anche per sistemi differenziali alle derivate ordinarie,

è sempre possibile abbassare l'ordine
di ciascuna equazione del sistema, fino a ricondursi
ad equazioni tutte del primo ordine,

a condizione di introdurre *nuove variabili*.

Esempio

Data l'equazione alle derivate parziali del **secondo ordine**:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (3.2.1)$$

possiamo ricondurla ad un **sistema di due equazioni** *ciascuna* del primo ordine,

introducendo le nuove variabili:

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3.2.2)$$

Il sistema equivalente alla (3.2.1) è allora:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (3.2.4)$$

dove la seconda equazione deriva dal *teorema di Schwarz*.

In forma compatta questo sistema si può scrivere:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.2.5)$$

dove:

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -c^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

Sistemi quasi-lineari

In secondo luogo osserviamo che un *generico sistema non lineare alle derivate parziali* di N equazioni, per le N incognite u_J , nella formulazione del primo ordine, ha la forma seguente:

$$F_I \left(\frac{\partial u_J}{\partial t}, \frac{\partial u_J}{\partial x_i}, u_J, x_i, t \right) = 0, \quad I, J = 1, 2, \dots, N; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2.7)$$

In *condizioni di differenziabilità* delle funzioni F_I , un tale sistema è equivalente al sistema che si ottiene differenziando le equazioni precedenti, rispetto al tempo, con l'aggiunta delle (3.2.7) imposte come condizioni per $t = 0$.

In tal modo si ottiene un sistema in cui

le derivate di ordine massimo compaiono solo linearmente.

Esempio

Consideriamo **una sola equazione non lineare** per l'incognita $\phi \equiv \phi(t, x)$, della forma:

$$F\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \phi, x, t\right) = 0. \quad (3.2.8)$$

→ Riscriviamola denotando con v, w le derivate prime di ϕ :

$$F(v, w, \phi, x, t) = 0. \quad (3.2.9)$$

→ Supposta F differenziabile almeno una volta, **differenziamo** l'equazione precedente **rispetto a t** e otteniamo:

$$\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (3.2.10)$$

Ovvero, tenendo conto delle posizioni precedenti e dell'uguaglianza delle derivate miste:

$$\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial \phi} v - \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.2.11)$$

Ora possiamo scrivere il sistema equivalente all'equazione (3.2.9):

$$\frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial w} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial \phi} v - \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$F|_{t=t_0} = 0.$$

Dal momento che F non contiene le derivate prime di v, w ne consegue che il sistema è lineare in tali derivate.

Possiamo ora dare la seguente

Definizione 1 - Si dice “quasi-lineare” un sistema di equazioni alle derivate parziali, nella formulazione del primo ordine, in cui le derivate delle variabili incognite compaiono solo linearmente.

Un sistema quasi-lineare, nella sua forma generale si scrive, dunque:

$$\underline{A}_0 \underline{u}_t + \underline{A}_i \underline{u}_{x_i} = \underline{f}, \quad \underline{u}_t = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}, \quad \underline{u}_{x_i} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}, \quad (3.2.12)$$

dove abbiamo introdotto le notazioni abbreviate per le derivate parziali, che d'ora in poi utilizzeremo abitualmente.

— Le matrici $\underline{A}_0, \underline{A}_i$

— e il vettore \underline{f} ,

sono *funzioni delle variabili di campo* incognite $\underline{u} \equiv \underline{u}(t, x_i)$

ed eventualmente di x_i, t ,

anche se nei casi più frequenti della fisica dipendono solo da \underline{u} .

In particolare un sistema quasi-lineare si dirà *semi-lineare*

quando le matrici $\underline{A}_0, \underline{A}_i$ non dipendono dal campo \underline{u}

e la non linearità risiede solamente nella funzione \underline{f} .

Se anche \underline{f} è una funzione lineare di \underline{u} il sistema risulta essere *lineare*.

Sistemi di leggi di bilancio e di leggi di conservazione

Un caso particolarmente frequente nei problemi di natura fisica è offerto dai sistemi di *leggi di bilancio*.

Definizione 2 - Un sistema quasi-lineare si dice sistema di “leggi di bilancio” quando le matrici \mathbb{A}_0 , \mathbb{A}_i sono esprimibili come gradienti rispetto al campo \mathbf{u} di funzioni dipendenti solo dal campo stesso.

Abbiamo allora:

$$\mathbb{A}_0 = \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbb{A}_i = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}}. \quad (3.2.13)$$

Di conseguenza il *sistema di leggi di bilancio* si può scrivere nella *forma semplice*:

$$\partial_t \underline{\mathbf{f}}_0 + \partial_i \underline{\mathbf{f}}_i = \underline{\mathbf{f}}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.2.14)$$

In particolare quando il *termine di produzione*

$$\underline{\mathbf{f}} = 0,$$

il sistema si dice costituito da *leggi di conservazione.*

Le denominazioni sono chiare se si considera che,
in condizioni di *differenziabilità*, il sistema (3.2.14) è equivalente
al *sistema in forma integrale*:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}_0 d^n x + \int_{\mathcal{C}} \partial_i \mathbf{f}_i d^n x = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} d^n x, \quad (3.2.15)$$

che, mediante il *teorema di Gauss*, si riscrive:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f}_0 d^n x - \int_{\partial \mathcal{C}} \mathbf{f}_i n_i d \Sigma = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{f} d^n x, \quad (3.2.16)$$

ovvero:

$$\frac{d\underline{\mathbf{Q}}}{dt} + \underline{\Phi} = \underline{\mathbf{s}}, \quad (3.2.17)$$

dove:

$$\underline{\mathbf{Q}} = \int_{\mathcal{C}} \underline{\mathbf{f}}_0 d^n x, \quad \underline{\Phi} = - \int_{\partial\mathcal{C}} \underline{\mathbf{f}}_i n_i d\Sigma, \quad \underline{\mathbf{s}} = \int_{\mathcal{C}} \underline{\mathbf{f}} d^n x, \quad (3.2.18)$$

che rappresenta il bilancio della grandezza $\underline{\mathbf{Q}}$,

la cui variazione nel dominio \mathcal{C} è data

- dal suo flusso $\underline{\Phi}$ attraverso la frontiera $\partial\mathcal{C}$
- e dal contributo della sorgente $\underline{\mathbf{s}}$ interna al dominio stesso.

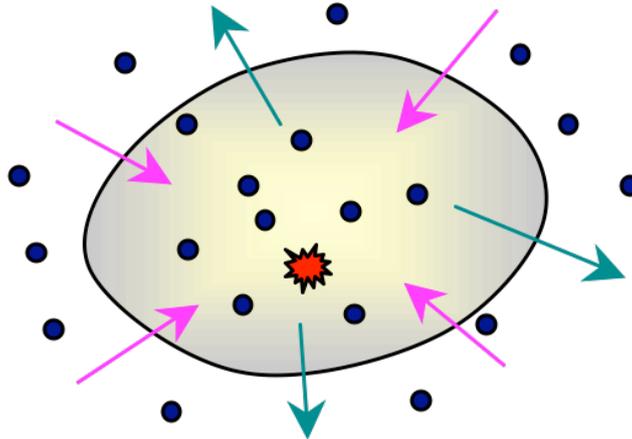


Fig. 7 - Bilancio di una grandezza entro una regione di spazio

Esempi fisici

La fisica fornisce molti esempi di sistemi di leggi di bilancio.

Consideriamo i più noti.

a) Sistemi lagrangiani

Tutti i sistemi che ammettono una formulazione lagrangiana sono sistemi di leggi di bilancio.

Consideriamo un campo ϕ governato dalla densità di lagrangiana $L(\phi, \phi_t, \phi_{x_i})$, dalla quale derivano le equazioni di Eulero-Lagrange del secondo ordine:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{x_i}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi}. \quad (3.2.19)$$

Possiamo ricondurre l'equazione precedente alla formulazione del primo ordine seguente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial w_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi}, \quad (3.2.20)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = v, \quad (3.2.22)$$

che si scrive nella *forma compatta* (3.2.14) ponendo: ↘

$$\underline{\mathbf{f}}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial v} \\ w_j \\ \phi \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_i} \\ -\delta_{ij}v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \phi} \\ 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.2.23)$$

Notiamo come

→ nel caso in cui la densità di lagrangiana dipenda solo dalle derivate del campo ϕ

→ e non direttamente da ϕ il sistema di leggi di bilancio

si riduce ad un sistema di leggi di conservazione più semplice

che contiene solo le incognite v, w_j :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial w_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi}, \quad (3.2.24)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0.$$

caratterizzato dai vettori:

$$\underline{\mathbf{f}}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial v} \\ w_j \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_i} \\ -\delta_{ij}v \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.25)$$

b) Equazioni dei fluidi perfetti

I fluidi perfetti sono governati da

un sistema di 5 *leggi di conservazione*

che *non* derivano da una densità di lagrangiana:

- la legge di conservazione della MASSA (1 equazione),
- la legge di conservazione della QUANTITÀ DI MOTO (3 equazioni)
- e la legge di conservazione dell'ENERGIA (1 equazione).

Il sistema ha la forma seguente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0, \quad (3.2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = 0, \quad (3.2.27)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{(\varepsilon + p) v_i\} = 0, \quad (3.2.28)$$

dove ρ è la **densità di massa** del fluido, v_i la **velocità della particella** di fluido, p la **pressione**, e **l'energia interna**, specifiche e:

$$\varepsilon = e + \rho v^2/2, \quad (3.2.29)$$

l'energia totale specifica.

Il sistema si scrive nella forma compatta (3.2.14) ponendo:

$$\underline{\mathbf{f}}_0 = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_j \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}_i = \begin{pmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ (\varepsilon + p) v_i \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.30)$$

Si osservi che dalle equazioni precedenti si deduce, come conseguenza, tenendo conto della *relazione termodinamica di Gibbs*:

$$d e - \frac{p}{\rho^2} d \rho = T d S, \quad (3.2.31)$$

anche la legge di conservazione dell'entropia:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho S) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho S v_i) = 0. \quad (3.2.32)$$

che esprime la *reversibilità dei processi termodinamici* all'equilibrio.

Questa legge viene, spesso, utilizzata, nei calcoli, in luogo della conservazione dell'energia per la sua maggiore semplicità.

c) Equazioni dei fluidi conduttori di calore

Le equazioni dei fluidi perfetti descrivono lo stato di

equilibrio termodinamico di un fluido.

Quando il fluido si trova *fuori dell'equilibrio termodinamico*,

nasce un flusso di calore $\vec{q} \equiv (q_i)$ che trasporta energia termica attraverso il fluido stesso.

→ In questo caso l'equazione dell'energia del fluido
viene *modificata con l'aggiunta di tale flusso*:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{(\varepsilon + p) v_i + q_i\} = 0. \quad (3.2.33)$$

Al sistema deve essere poi aggiunta

→ la legge di Fourier

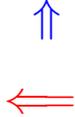
che lega il flusso di calore al gradiente della temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{q_i}{\kappa}, \quad (3.2.34)$$

dove κ è la conducibilità termica del fluido.

Abbiamo così il sistema complessivo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{(\varepsilon + p) v_i + q_i\} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial x_i} &= -\frac{q_i}{\kappa}.\end{aligned}\tag{3.2.35}$$



Riscritto nella forma compatta (3.2.14) comporta:

$$\underline{\mathbf{f}}_0 = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_j \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}_i = \begin{pmatrix} \rho v_i \\ \rho v_i v_j + p \delta_{ij} \\ (\varepsilon + p) v_i + q_i \\ T \delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{q_j}{\kappa} \end{pmatrix}. \quad (3.2.36)$$


Notiamo come in $\underline{\mathbf{f}}_0$ il termine associato all'equazione di Fourier (nella quale manca la derivata rispetto al tempo) sia nullo.

Questo rende singolare la corrispondente matrice $\underline{\mathbf{A}}_0$ facendo perdere, come vedremo, l'iperbolicità al sistema.

d) Equazioni dei fluidi viscosi

La perdita dell'iperbolicità si ha anche, per la stessa regione, in presenza di viscosità del fluido. In questo caso, al sistema vanno aggiunte le equazioni della viscosità di Navier-Stokes:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = -\frac{\sigma_{jk}}{\zeta_s} - \frac{1}{3} \frac{\sigma}{\zeta_m} \delta_{jk}. \quad (3.2.37)$$

dove σ_{jk} , σ sono rispettivamente il tensore di *viscosità di scorrimento* e la *viscosità (scalare) di massa*, e ζ_s , ζ_m i rispettivi coefficienti di viscosità del fluido. Le equazioni di *conservazione della quantità di moto e dell'energia* vengono, poi, *modificate* con l'aggiunta di un contributo al *tensore degli sforzi* pari a $-\tau_{ij}$ e, rispettivamente di un *flusso di energia* $-\tau_{ij} v_j$, dove:

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{3} \sigma \delta_{ij}, \quad (3.2.38)$$

Sistemi iperbolici

Per trattare la propagazione delle onde nei sistemi quasi-lineari occorre dare una definizione generale di sistema iperbolico.

Definizione 3 - Un sistema quasi-lineare (3.2.12) si dice “iperbolico” se e solo se:

i) la matrice $\underline{\mathbb{A}}_0$ è non singolare, ovvero

$$\det \underline{\mathbb{A}}_0 \neq 0, \quad (3.2.39)$$

ii) il problema agli autovalori generalizzato:

$$\left(\underline{\mathbb{A}}_n - \lambda \underline{\mathbb{A}}_0 \right) \mathbf{d} = 0, \quad \underline{\mathbb{A}}_n = \underline{\mathbb{A}}_i n_i, \quad (3.2.40)$$

ammette autovalori *reali* e una *base* di autovettori, per qualunque scelta del vettore di modulo unitario $\vec{n} \equiv (n_i)$.

Nel caso in cui gli *autovalori* siano tutti *distinti* il sistema si dirà *strettamente iperbolico*.

• • • Commentiamo la definizione di *sistema iperbolico* appena data • • •

— La realità degli autovalori serve a garantire la *possibilità della propagazione*, in quanto, come vedremo gli autovalori rappresenteranno delle velocità di propagazione per alcune classi di onde.

— Le matrici $\underline{\mathbb{A}}_n$ e $\underline{\mathbb{A}}_0$ non sono necessariamente simmetriche, per cui la realità degli autovalori *non è garantita* a priori e la base di autovettori non è necessariamente ortonormale.

— La non singolarità della matrice $\underline{\mathbb{A}}_0$ garantisce la sua *invertibilità*, per cui un sistema iperbolico può essere portato in forma normale, ovvero $\underline{\mathbb{A}}_0$ si può sempre considerare uguale all'identità.

Definizione 4 - Si chiamano **caratteristiche** le ipersuperfici dello spazio-tempo di equazione $\varphi(x_i, t) = 0$ la cui velocità normale di propagazione è un autovalore del problema (3.2.40).

Tali velocità normali sono soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\det(\underline{\mathbf{A}}_n - \lambda \underline{\mathbf{A}}_0) = 0, \quad (3.2.41)$$

e prendono di conseguenza il nome di velocità caratteristiche.

Definizione 5 - Si chiama **curva bicaratteristica** la traiettoria spazio-temporale di un punto di un fronte d'onda che viaggia su una caratteristica.

Tale curva è *definita* dal sistema differenziale:

$$\frac{d x_i}{d t} = \Lambda_i, \quad (3.2.42)$$

e dalle condizioni iniziali $x_i(0) = x_{0i}$, essendo Λ_i la velocità radiale associata ad una velocità normale λ caratteristica.

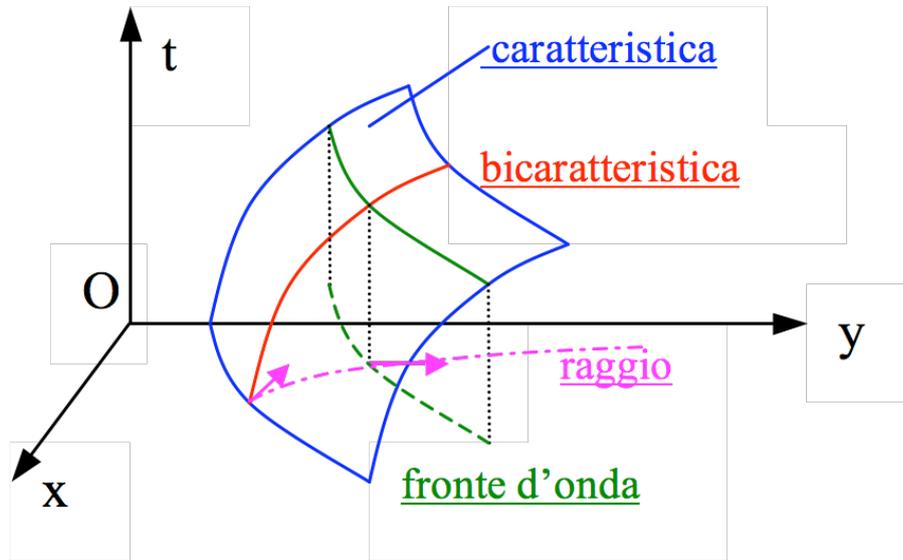


Fig. 8 - Fronte d'onda, caratteristica, bicaratteristica, raggio e velocità radiale

Ricerca di soluzioni regolari. Metodo delle caratteristiche

Consideriamo, ora un metodo con il quale si possano trovare, almeno in linea di principio,

delle soluzioni di classe $C^{(1)}$ (almeno in certi intervalli),

di un'equazione quasi-lineare alle derivate parziali.

Ciò si riesce a fare

ric conducendo l'equazione alle derivate parziali

ad un'equazione alle derivate ordinarie

mediante il cosiddetto metodo delle caratteristiche.

E' data l'equazione quasi-lineare in forma normale:

$$u_t + \Lambda_i u_{x_i} = f. \quad (3.2.43)$$

— Il campo è una funzione scalare di t, x_i :

$$u \equiv u(t, x_i),$$

— le matrici 1×1 dei coefficienti \underline{A}_i sono funzioni scalari del campo e come tali coincidono con i loro autovalori Λ_i :

$$\underline{A}_i \equiv (A_{11i}), \quad A_{11i} = \Lambda_i,$$

— come lo è il termine di produzione f :

$$f \equiv f(u).$$

Considerando la curva bicaratteristica, di equazioni parametriche:

$$x_i \equiv x_i(t),$$

definita dall'equazione differenziale:

$$\frac{d x_i}{d t} = \Lambda_i,$$

possiamo scrivere la **derivata temporale del campo u calcolata lungo questa curva**,

che è uguale alla **derivata della funzione composta del tempo $u(t, x_i(t))$** ,
come:

$$\frac{d u}{d t} = u_t + \frac{d x_i}{d t} u_{x_i}, \quad (3.2.44)$$

che, per le soluzioni che soddisfano la (3.2.43) possiamo scrivere:

$$\frac{d u}{d t} = u_t + \Lambda_i u_{x_i}, \quad (3.2.45)$$

e quindi:

$$\frac{d u}{d t} = f, \quad \text{essendo} \quad \frac{d}{d t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3.2.46)$$

→ In questo modo **l'equazione alle derivate parziali** (3.2.43) viene ricondotta all'**equazione alle derivate ordinarie** (3.2.46).

→ Se si riesce ad **integrare** quest'ultima si ottiene la funzione $u(t, x_i(t))$.

→ Se si riesce ad **integrare** anche l'equazione della bicaratteristica (3.2) si arriva a conoscere anche l'espressione delle funzioni $x_i(t)$, e quindi, sostituendo, si ricava, finalmente la **soluzione cercata** $u(t, x_i)$.

Esempio

Consideriamo l'equazione quasi-lineare:

$$u_t + r_0 \frac{x_i}{r} u u_{x_i} = u^2, \quad r = \sqrt{x_j x_j}, \quad r_0 = \text{costante}. \quad (3.2.47)$$

→ L'equazione differenziale della bicaratteristica è:

$$\frac{d x_i}{d t} = r_0 \frac{x_i}{r} u. \quad (3.2.48)$$

→ Mentre la derivata del campo lungo la caratteristica risulta essere:

$$\frac{d u}{d t} = u^2. \quad (3.2.49)$$

Quest'ultima equivale all'equazione a variabili separabili:

$$\frac{1}{u^2} du = dt, \quad (3.2.50)$$

che si riconduce a quadrature, ottenendo:

$$-\frac{1}{u} = t - \frac{1}{u_0}. \quad (3.2.51)$$

Ovvero:

$$u = \frac{u_0}{1 - u_0 t}, \quad u_0 = \text{costante}. \quad (3.2.52)$$

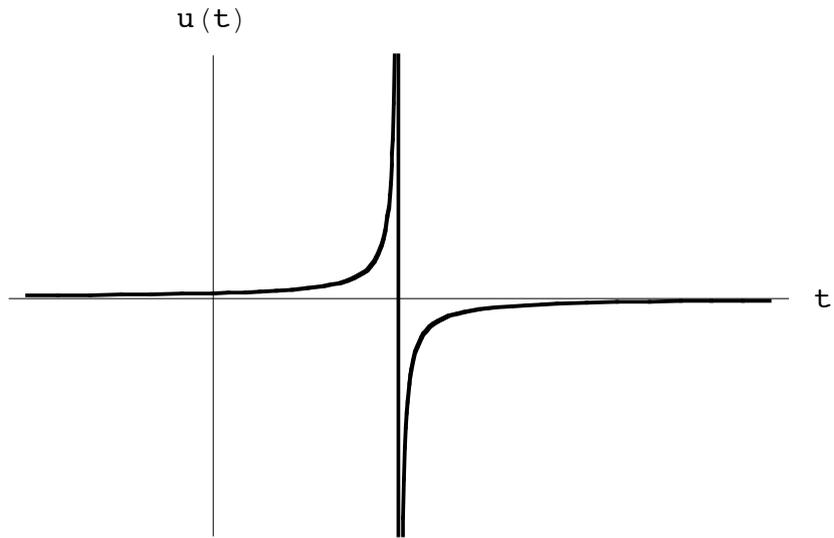


Fig. 9 - La funzione $u(t)$ lungo la caratteristica

→ Introducendo questo risultato nell'**equazione della bicaratteristica** (3.2.48) abbiamo:

$$\frac{d x_i}{d t} = \frac{r_0 u_0}{1 - u_0 t} \frac{x_i}{r}. \quad (3.2.53)$$

Moltiplicando per x_i ricaviamo:

$$x_i \frac{d x_i}{d t} = \frac{r_0 u_0}{1 - u_0 t} r. \quad (3.2.54)$$

Ma:

$$x_i x_i = r^2 \quad \Longrightarrow \quad x_i d x_i = r d r. \quad (3.2.55)$$

Per cui si ha: ↘

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r_0 u_0}{1 - u_0 t}, \quad (3.2.56)$$

il cui integrale ci da:

$$r = -r_0 \log \frac{1}{|1 - u_0 t|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r}{r_0} = \log |1 - u_0 t|, \quad (3.2.57)$$

che ci permette di ricavare:

$$\frac{1}{1 - u_0 t} = \pm e^{-\frac{r}{r_0}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1 \mp e^{\frac{r}{r_0}}}{t} = u_0. \quad (3.2.58)$$

Questo significa che la funzione:

$$\psi(t, r) = \frac{1 \mp e^{\frac{r}{r_0}}}{t}, \quad (3.2.59)$$

si mantiene costante lungo la bicaratteristica.

Una simile funzione è, nella teoria delle equazioni iperboliche,

l'equivalente di ciò che un *integrale primo* del moto rappresenta per le equazioni della meccanica,

e prende il nome di *invariante di Riemann.*

Le caratteristiche sono, quindi, le **curve di livello** di questa funzione.

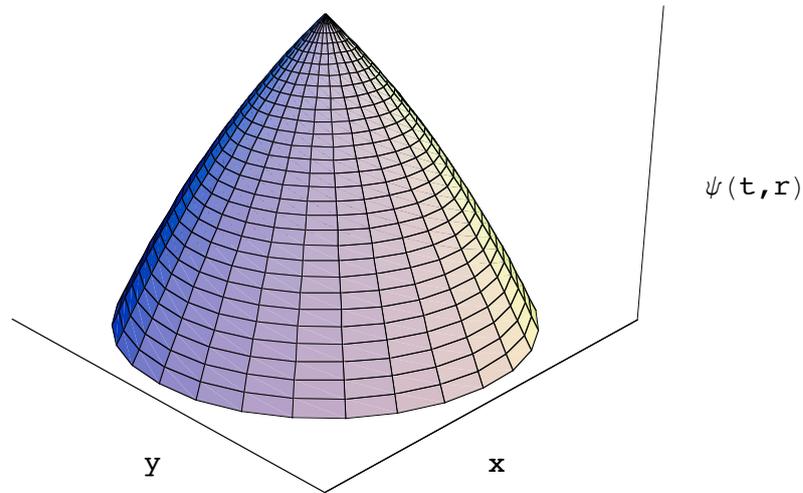


Fig. 10 - Grafico della funzione $\psi(t, r)$ con curve di livello (*caratteristiche*)

→ Sostituendo:

$$u_0 = \frac{1 \mp e^{\frac{r}{r_0}}}{t}. \quad (3.2.60)$$

nell'espressione del **campo lungo la caratteristica**, trovata in precedenza, cioè:

$$u = \frac{u_0}{1 - u_0 t}, \quad (3.2.61)$$

ricaviamo, finalmente **la soluzione dell'equazione quasi lineare** di partenza, che è:

$$u = \frac{\pm e^{-\frac{r}{r_0}} - 1}{t}. \quad (3.2.62)$$

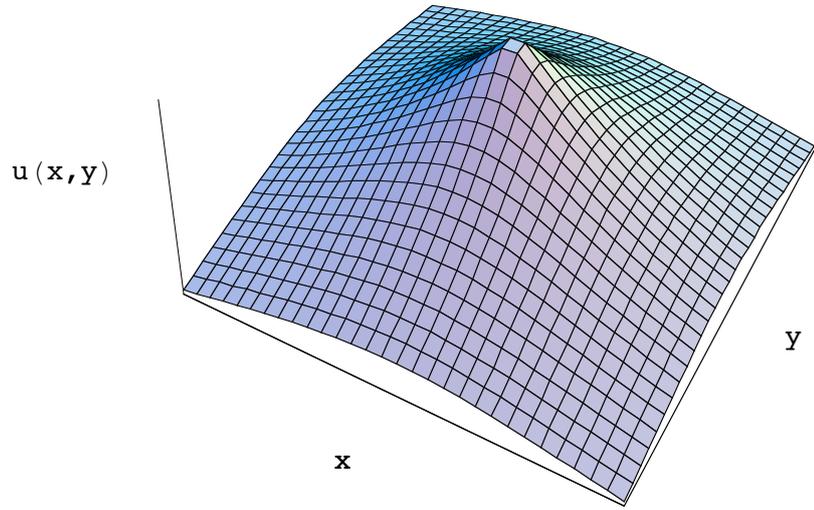


Fig. 11 - La funzione $u(t, x, y)$ per un valore fissato di t (caso del segno +)

Verifica:

$$u_t = -\frac{\pm e^{-\frac{r}{r_0}} - 1}{t^2}, \quad u_{x_i} = -\frac{\pm e^{-\frac{r}{r_0}}}{t} \frac{x_i}{r_0 r},$$

da cui segue:

$$u_t + r_0 \frac{x_i}{r} u u_{x_i} \equiv -\frac{\pm e^{-\frac{r}{r_0}} - 1}{t^2} + r_0 \frac{x_i}{r} \left(\frac{\pm e^{-\frac{r}{r_0}} - 1}{t} \right) \left(\frac{\pm e^{-\frac{r}{r_0}}}{t} \frac{x_i}{r_0 r} \right) \equiv$$
$$\frac{1}{t^2} \left(\mp 2 e^{-\frac{r}{r_0}} + 1 + e^{-2\frac{r}{r_0}} \right) \equiv u^2.$$

E l'equazione risulta soddisfatta.

Notiamo come la **soluzione** trovata

dipenda dalle coordinate solo attraverso r (simmetria sferica),

in quanto, nell'equazione di partenza il termine:

$$\frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial r},$$

non è altro che la derivata rispetto ad r .

Si sarebbe potuto, quindi arrivare allo stesso risultato integrando l'equazione, più semplice:

$$u_t + r_0 u u_r = u^2. \tag{3.2.63}$$

E' sempre utile fare attenzione alle simmetrie.

3.3 Onde semplici

Definizione di onda semplice

Supponiamo di avere un sistema quasi-lineare iperbolico

→ il cui termine di produzione \mathbf{f} sia nullo:

$$\mathbb{A}_0 \mathbf{u}_t + \mathbb{A}_i \mathbf{u}_{x_i} = 0. \quad (3.3.1)$$

Allora il sistema ammette una classe di soluzioni regolari della forma:

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\varphi), \quad \varphi = x_n - \lambda(\varphi) t, \quad x_n = x_i n_i, \quad (3.3.2)$$

con $n_i = \text{costante}$

che prendono il nome di onde semplici.

Notiamo come la **definizione di φ** sia *implicita*

in quanto λ è, a sua volta, una funzione di φ ,

dal momento che, in generale, l'autovalore dipende dal campo $\mathbf{u}(\varphi)$, come la matrice di cui è autovalore:

$$\lambda \equiv \lambda(\mathbf{u}(\varphi)).$$

Le **onde semplici** rappresentano una **generalizzazione** al caso non lineare delle *onde piane* di un sistema lineare a coefficienti costanti.

Per *verificare* se le onde semplici sono effettivamente *soluzione* del sistema (3.3.1) calcoliamo:

$$\underline{\mathbf{u}}_t = \underline{\mathbf{u}}_\varphi \varphi_t, \quad \underline{\mathbf{u}}_{x_i} = \underline{\mathbf{u}}_\varphi \varphi_i, \quad \underline{\mathbf{u}}_\varphi = \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \varphi}. \quad (3.3.3)$$

Derivando $\varphi = x_n - \lambda(\varphi) t$

rispettivamente rispetto a t e x_i abbiamo:

$$\varphi_t = -\lambda - \lambda_\varphi t \varphi_t, \quad \varphi_i = n_i - \lambda_\varphi t, \varphi_i. \quad (3.3.4)$$

Segue:

$$\varphi_t = -\frac{\lambda}{1 + \lambda_\varphi t}, \quad \varphi_i = \frac{n_i}{1 + \lambda_\varphi t}. \quad (3.3.5)$$

Questi risultati, sostituiti nella (3.3.1) comportano:

$$\left(\underline{\mathbf{A}}_n - \lambda \underline{\mathbf{A}}_0 \right) \underline{\mathbf{u}}_\varphi = 0. \quad (3.3.6)$$

Questa rappresenta la condizione affinché $\underline{\mathbf{u}}(\varphi)$ sia soluzione del nostro sistema differenziale. Se ne conclude che:

Le onde semplici, i cui fronti d'onda sono descritti dalla legge cinematica $\varphi \equiv x_n - \lambda t = 0$ si propagano nello spazio con velocità normali λ che sono autovalori del problema (3.3.6) e con ampiezze le cui derivate normali $\underline{\mathbf{u}}_\varphi$ sono autovettori dello stesso problema.

L'iperbolicità del sistema garantisce che le **velocità di propagazione delle onde** semplici abbiano senso fisico, essendo quantità **reali finite** e che le derivate normali del campo formino una base dello spazio del campo.

Regola operativa

Osserviamo che per ottenere *direttamente* il problema agli autovalori (3.3.6), partendo dal sistema differenziale (3.3.1) è comodo applicare la regola di corrispondenza:

$$\partial_t \longrightarrow -\lambda \partial_\varphi, \quad \partial_i \longrightarrow n_i \partial_\varphi. \quad (3.3.7)$$

Questa regola consente di ottenere gli autovalori e gli autovettori senza costruire esplicitamente le matrici, come vedremo negli esempi.

$$\mathbb{A}_0 \mathbf{u}_t + \mathbb{A}_i \mathbf{u}_{x_i} = 0 \longrightarrow \left(-\lambda \mathbb{A}_0 + \mathbb{A}_n \right) \mathbf{u}_\varphi = 0.$$

Osserviamo come,

nel caso in cui lo spazio delle coordinate sia *unidimensionale* ($n = 1$),

ciò sia presente solo una coordinata spaziale x , oltre al tempo t , il vettore normale risulta avere una sola componente uguale all'unità, e quindi la regola divenga semplicemente:

$$\partial_t \longrightarrow -\lambda \partial_\varphi, \quad \partial_x \longrightarrow \partial_\varphi. \quad (3.3.8)$$

$$\underline{\mathbb{A}}_0 \underline{\mathbf{u}}_t + \underline{\mathbb{A}} \underline{\mathbf{u}}_x = 0 \quad \longrightarrow \quad \left(-\lambda \underline{\mathbb{A}}_0 + \underline{\mathbb{A}} \right) \underline{\mathbf{u}}_\varphi = 0.$$

Integrazione dell'onda semplice

Per integrare la soluzione del sistema quasi-lineare $\mathbf{u}(\varphi)$, che rappresenta un'onda semplice, bisogna risolvere il **problema di Cauchy**:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0), \quad (3.3.9)$$

dove $\mathbf{d} \equiv \mathbf{d}(\mathbf{u}(\varphi))$ è l'autovettore

corrispondente all'autovalore λ che compare in $\varphi = x_n - \lambda t$,

e $\mathbf{u}(0)$ è la condizione iniziale sul fronte d'onda, relativa alla variabile φ .

Esempi fisici

Elettrodinamica lineare unidimensionale

Il sistema delle equazioni che contengono le derivate temporali è dato da:

$$E_t + c B_x = 0, \quad (3.3.10)$$

$$B_t + c E_x = 0, \quad (3.3.11)$$

che sono 2 equazioni per le 2 incognite $E = E(t, x)$, $B = B(t, x)$.

Il sistema può essere scritto nella forma compatta:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{A} \mathbf{u}_x = 0, \quad (3.3.12)$$

dove:

$$\underline{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} E \\ B \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{A}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.13)$$

E' chiaramente iperbolico, in quanto, *la matrice* $\underline{\mathbf{A}}$ è addirittura *simmetrica* ed ha, quindi, *autovalori reali* e una *base di autovettori* (ortonormali). L'equazione caratteristica è, infatti:

$$\det(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}) \equiv \lambda^2 - c^2 = 0. \quad (3.3.14)$$

Gli autovalori sono, dunque:

$$\lambda^{(1)} = -c, \quad \lambda^{(2)} = +c. \quad (3.3.15)$$

Gli autovettori, ortonormalizzati, sono dati da:

$$\mathbf{d}^{(1)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}^{(2)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.16)$$

Applicando la **regola di corrispondenza** (3.3.8) alle equazioni di partenza (3.3.10) e (3.3.11) possiamo *ottenere direttamente* il *sistema per le onde semplici* senza costruire la matrice \mathbf{A} e verificare direttamente anche l'iperbolicità del sistema.

Infatti abbiamo:

$$E_t + c B_x = 0 \longrightarrow -\lambda E_\varphi + c B_\varphi = 0, \quad (3.3.17)$$

$$B_t + c E_x = 0 \longrightarrow -\lambda B_\varphi + c E_\varphi = 0. \quad (3.3.18)$$

Eliminando, ad esempio B_φ , tramite la (3.3.17) nella (3.3.18), otteniamo:

$$(\lambda^2 - c^2) E_\varphi = 0, \quad (3.3.19)$$

che ha soluzione non banale se e solo se è soddisfatta l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 - c^2 = 0, \quad (3.3.20)$$

le cui soluzioni sono le velocità caratteristiche.

Le derivate normali del campo \mathbf{u} si ottengono, di conseguenza, ad esempio utilizzando la (3.3.17) e sono date da:

$$\mathbf{u}_\varphi^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} E_\varphi = \sqrt{2} E_\varphi \mathbf{d}^{(1)}, \quad \mathbf{u}_\varphi^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E_\varphi = \sqrt{2} E_\varphi \mathbf{d}^{(2)}, \quad (3.3.21)$$

con E_φ funzione arbitraria di $\varphi = x - \lambda t$.

Abbiamo ritrovato, in questo modo i risultati noti dalla teoria lineare delle onde.

Elettrodinamica non lineare unidimensionale

Passiamo ora ad esaminare *un caso non lineare*, ottenibile per generalizzazione diretta dell'esempio precedente.

Si tratta dell'elettrodinamica non lineare unidimensionale

nel caso di un mezzo in cui la permeabilità magnetica μ ,
sia una funzione isotropa dell'intensità del campo magnetico H ,

mentre la permettività elettrica ε è costante (costante dielettrica)

ovvero:

$$\mu \equiv \mu(H^2). \quad (3.3.22)$$

La dipendenza dal quadrato del campo comporta l'*isotropia* che, in questo caso, significa semplicemente l'indipendenza di μ dal segno di H .

Conviene scrivere, questa volta, le equazioni di campo, nel sistema di unità M.K.S., anziché c.g.s., come abbiamo fatto nel caso precedente (vuoto):

$$D_t + H_x = 0, \quad D = \varepsilon E, \quad (3.3.23)$$

$$B_t + E_x = 0, \quad B = \mu H, \quad (3.3.24)$$

Applicando direttamente la regola di corrispondenza (3.3.8) nel sistema precedente otteniamo:

$$-\lambda D_\varphi + H_\varphi = 0, \quad D_\varphi = \varepsilon E_\varphi, \quad (3.3.25)$$

$$-\lambda B_\varphi + E_\varphi = 0, \quad B_\varphi = (\mu + 2\mu' H^2) H_\varphi, \quad (3.3.26)$$

dove l'apice denota la derivata rispetto all'argomento H^2 . Eliminando D_φ e B_φ otteniamo:

$$-\lambda \varepsilon E_\varphi + H_\varphi = 0, \quad (3.3.27)$$

$$-\lambda (\mu + 2\mu' H^2) H_\varphi + E_\varphi = 0. \quad (3.3.28)$$

Sostituendo E_φ , dalla (3.3.28) nella (3.3.27) si ricava:

$$\left\{ \lambda^2 \varepsilon (\mu + 2 \mu' H^2) - 1 \right\} H_\varphi = 0, \quad (3.3.29)$$

che comporta soluzioni non banali ($E_\varphi, H_\varphi \neq 0$) per il sistema se e soltanto se viene soddisfatta l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 \varepsilon (\mu + 2 \mu' H^2) - 1 = 0, \quad (3.3.30)$$

che ha soluzioni:

$$\lambda^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon (\mu + 2 \mu' H^2)}}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon (\mu + 2 \mu' H^2)}}. \quad (3.3.31)$$

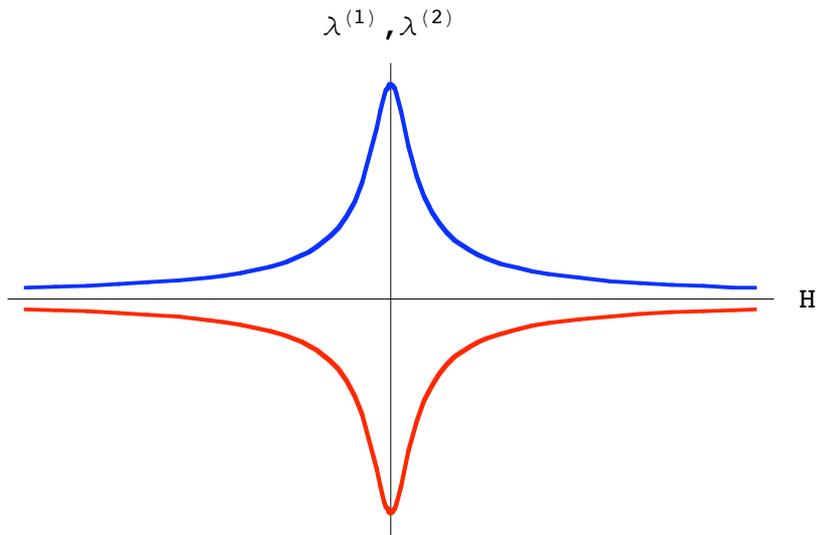


Fig. 12 - Andamento delle velocità caratteristiche in funzione di H , per $\mu = \mu_0 + K H^2$

Osserviamo che l'iperbolicità del sistema può sussistere solo se gli autovalori sono reali e quindi **se è soddisfatta la condizione:**

$$\varepsilon (\mu + 2 \mu' H^2) > 0. \quad (3.3.32)$$

Dal **punto di vista fisico** normalmente i materiali sono tali che:

$$\varepsilon > 0, \quad \mu > 0, \quad \mu' > 0. \quad (3.3.33)$$

- Il problema si può generalizzare al caso in cui sia ε a dipendere da E^2 , come nei materiali con particolari proprietà ottiche, o anche ad una dipendenza non lineare di entrambe le funzioni ε, μ .

- Notiamo come se, invece, entrambe le funzioni sono costanti si ritrova il risultato noto dalla teoria lineare $\lambda = \pm 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$.

Per quanto riguarda gli autovettori, utilizzando come variabili di campo:

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}, \quad (3.3.34)$$

abbiamo, tenendo conto, ad esempio, della (3.3.27):

$$\mathbf{d}^{(1)} \equiv C \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\mu+2\mu'H^2)}} \end{pmatrix} E_\varphi, \quad \mathbf{d}^{(2)} \equiv C \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\mu+2\mu'H^2)}} \end{pmatrix} E_\varphi, \quad (3.3.35)$$

dove C è un fattore di normalizzazione.

- Gli autovettori formano una *base* dello spazio R^2 e il sistema è iperbolico.

Anche se non è necessario, ai fini dello studio delle onde semplici, il nostro sistema, può essere ricondotto alla forma quasi-lineare (3.2.12), rispetto al campo (3.3.34), introducendo le matrici:

$$\underline{\mathbb{A}}_0 \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu + 2\mu'H^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbb{A}}_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.36)$$

Dal momento che le matrici $\underline{\underline{A}}_1$ e $\underline{\underline{A}}_0$ sono *simmetriche* e $\underline{\underline{A}}_0$ è definita positiva, è naturale avere ottenuto *autovalori reali* e una *base di autovettori*. Inoltre questi ultimi risultano anche ortonormali rispetto alla metrica $\underline{\underline{A}}_0$ nello spazio R^2 e cioè sussiste la condizione:

$$\underline{\underline{d}}^{(i)} \underline{\underline{A}}_0 \underline{\underline{d}}^{(j)} = \delta_{ij}, \quad (3.3.37)$$

tramite la quale resta determinato il fattore di normalizzazione degli autovettori:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}. \quad (3.3.38)$$

Fluido perfetto unidimensionale

Un terzo esempio fisico che esaminiamo è

→ il *fluido perfetto unidimensionale*,

le cui equazioni si ottengono da quelle del fluido tridimensionale

con l'**eliminazione degli indici** i, j che, in questo caso,

assumono **un solo valore** ($i, j = 1$).

Ai fini dello studio della propagazione ondosa

utilizzeremo l'*equazione dell'entropia*, più semplice,

in luogo di quella dell'energia.

Dalle (3.2.26), (3.2.27) e (3.2.32)

nel caso unidimensionale abbiamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad (3.3.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = 0, \quad (3.3.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho S v) = 0. \quad (3.3.41)$$

Mediante la regola di corrispondenza (3.3.8) costruiamo il sistema delle equazioni di propagazione per le onde semplici: 

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \longrightarrow -\lambda \rho_\varphi + \partial_\varphi(\rho v) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = 0 \longrightarrow -\lambda \partial_\varphi(\rho v) + \partial_\varphi(\rho v^2 + p) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho S v) = 0 \longrightarrow -\lambda \partial_\varphi(\rho S) + \partial_\varphi(\rho S v) = 0.$$

Quindi questo è il sistema algebrico per le onde semplici:

$$-\lambda \rho_\varphi + \partial_\varphi(\rho v) = 0, \tag{3.3.42}$$

$$-\lambda \partial_\varphi(\rho v) + \partial_\varphi(\rho v^2 + p) = 0, \tag{3.3.43}$$

$$-\lambda \partial_\varphi(\rho S) + \partial_\varphi(\rho S v) = 0. \tag{3.3.44}$$

Osserviamo come, *in taluni casi*, come in quello del fluido perfetto che stiamo esaminando,

l'equazione caratteristica si fattorizza, disaccoppiando le onde

● In un caso come questo abbiamo 3 equazioni e, quindi lo spazio degli stati è R^3 ,

● per cui ci aspettiamo 3 autovalori e 3 autovettori linearmente indipendenti

● e un' equazione caratteristica di terzo grado.

Tuttavia il polinomio caratteristico si disaccoppia nel prodotto di un fattore quadratico e di un fattore lineare.

Questa situazione ci consente di trovare facilmente gli autovalori del nostro problema.

Per vederlo sviluppiamo l'equazione dell'entropia (3.3.44) e raccogliamo opportunamente:

$$\overbrace{\{-\lambda \rho_\varphi + \partial_\varphi(\rho v)\}}^0 S - (\lambda - v) \rho S_\varphi = 0. \quad (3.3.45)$$

Grazie alla (3.3.42) il primo termine della (3.3.45) è nullo e, supponendo $\rho \neq 0$ trattandosi di un fluido materiale, rimane semplicemente: ↘

$$(\lambda - v) S_\varphi = 0. \quad (3.3.46)$$

Questa equazione ammette soluzioni in due casi:

— nel primo si ha:

$$\lambda = v. \quad (3.3.47)$$

E viene determinato, in questo modo, un autovalore del problema e, quindi, una velocità di propagazione;

— nel secondo si ha:

$$S_\varphi = 0. \quad (3.3.48)$$

In questo caso non viene determinato immediatamente un autovalore, ma si ha una condizione che comporta soluzioni non banali.

Esaminiamo separatamente i due casi.

i) Onda materiale

La condizione del primo caso (3.3.47) identifica un autovalore reale il cui valore coincide con quello della velocità della particella di fluido. Si tratta di un'onda che viaggia con la velocità della materia e, per questo, viene denominata *onda materiale*, o anche *onda di contatto*.

Per determinare l'autovettore corrispondente sostituiamo il valore dell'autovalore nelle restanti equazioni indipendenti del sistema. Nella (3.3.42) abbiamo:

$$-\lambda \rho_\varphi + \partial_\varphi(\rho v) = 0 \implies -v \rho_\varphi + \partial_\varphi(\rho v) = 0, \quad (3.3.49)$$

da cui segue:

$$v_\varphi = 0. \quad (3.3.50)$$

Mentre nella (3.3.43) abbiamo: \Downarrow

$$-\lambda \partial_\varphi(\rho v) + \partial_\varphi(\rho v^2 + p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -v \partial_\varphi(\rho v) + \partial_\varphi(\rho v^2 + p) = 0. \quad (3.3.51)$$

Ma: $-v \rho_\varphi + \partial_\varphi(\rho v) = 0. \quad \Downarrow$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\rho v v_\varphi + p_\varphi = 0. \quad (3.3.52)$$

Tenendo conto della (3.3.50) rimane: \searrow

$$p_\varphi = 0. \quad (3.3.53)$$

Scegliendo come variabili di campo:

$$\underline{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ S \end{pmatrix}, \quad (3.3.54)$$

e tenendo conto dei risultati precedenti abbiamo:

$$\underline{\mathbf{u}}_\varphi \equiv \begin{pmatrix} \rho_\varphi \\ 0 \\ S_\varphi \end{pmatrix}. \quad (3.3.55)$$

Ora la termodinamica ci consente di disporre solo di due variabili termodinamiche indipendenti mediante le quali si esprimono tutte le altre funzioni di stato.

→ Qui conviene scegliere come variabili indipendenti ρ, p
e considerare $S(\rho, p)$ come funzione di stato.

In questo modo abbiamo:

$$S_\varphi = \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_p \rho_\varphi + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_\rho p_\varphi. \quad (3.3.56)$$

Tenendo conto della (3.3.53), che ci dice che

$$p_\varphi = 0,$$



abbiamo semplicemente:



$$S_\varphi = \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_p \rho_\varphi. \quad (3.3.57)$$

Di conseguenza la derivata normale associata all'autovalore $\lambda = v$ risulta:

$$\underline{\mathbf{u}}_\varphi \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_p \end{pmatrix} \rho_\varphi. \quad (3.3.58)$$

ii) Onde soniche

Passiamo ora a considerare il secondo caso,

nel quale *vale la condizione* (3.3.48), cioè $S_\varphi = 0$,

mentre λ resta da determinare. Ci rimangono da utilizzare le equazioni (3.3.42) e (3.3.43) che sviluppate danno:

$$-\lambda \rho_\varphi + \partial_\varphi(\rho v) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\lambda \rho_\varphi + \rho_\varphi v + \rho v_\varphi = 0 \quad (3.3.59)$$

$$-\lambda \partial_\varphi(\rho v) + \partial_\varphi(\rho v^2 + p) = 0$$



$$-\lambda \rho_\varphi v - \lambda \rho v_\varphi + \rho_\varphi v^2 + 2 \rho v v_\varphi + p_\varphi = 0. \quad (3.3.60)$$

Dalla (3.3.59) ricaviamo:

$$-\lambda \rho_\varphi + \rho_\varphi v + \rho v_\varphi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho v_\varphi = (\lambda - v) \rho_\varphi, \quad (3.3.61)$$

che sostituita nella (3.4.127) comporta:

$$\begin{array}{r}
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 -\lambda \underbrace{\rho_\varphi v}_{\text{red}} - \lambda \underbrace{\rho v_\varphi}_{\text{blue}} + v \underbrace{\rho_\varphi v}_{\text{red}} + 2v \underbrace{\rho v_\varphi}_{\text{blue}} + p_\varphi = 0 \quad \downarrow \\
 \updownarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 -(\lambda - v) \underbrace{\rho_\varphi v}_{\text{red}} - (\lambda - 2v) \underbrace{\rho v_\varphi}_{\text{blue}} + p_\varphi = 0 \quad \downarrow \\
 \qquad \qquad \qquad \downarrow \quad \downarrow
 \end{array}$$

$$(\lambda - v)^2 \rho_\varphi - p_\varphi = 0. \quad (3.3.62)$$

Questa volta conviene scegliere come

variabili termodinamiche indipendenti ρ ed S

e considerare $p(\rho, S)$ come una funzione di stato.

Allora abbiamo:

$$p_\varphi = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho_\varphi + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho S_\varphi, \quad (3.3.63)$$

ed essendo, per la (3.3.48), $S_\varphi = 0$

si ha semplicemente:

$$p_\varphi = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \rho_\varphi. \quad (3.3.64)$$

La *fisica* ci dice che questa quantità è positiva, per cui solitamente si introduce la notazione:

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}, \quad (3.3.65)$$

c_s prende il nome di *velocità adiabatica del suono*.

Di conseguenza la (3.3.62) ci permette di calcolare le rimanenti due velocità normali delle onde semplici nel fluido:

$$(\lambda - v)^2 \rho_\varphi - \underbrace{c_s^2 \rho_\varphi}_{p_\varphi} = 0 \quad \implies \quad \lambda = v \pm c_s. \quad (3.3.66)$$

Queste rappresentano la velocità delle onde soniche in un fluido in moto.

Le derivate normali del campo, associate a queste velocità sono, di conseguenza, date da:

$$\underline{\mathbf{u}}_{\varphi} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \pm c_s / \rho \\ 0 \end{pmatrix} \rho_{\varphi}. \quad (3.3.67)$$

In questo caso, con la scelta del campo (3.3.55), abbiamo le matrici dei coefficienti del sistema:

$$\underline{\mathbf{A}}_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & \rho & 0 \\ S & 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{A}}_1 \equiv \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ v^2 + p_{\rho} & 2\rho v & p_s \\ S v & \rho S & \rho v \end{pmatrix}, \quad (3.3.68)$$

dove:

$$p_\rho = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S, \quad p_s = \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho. \quad (3.3.69)$$

In questo caso:

- le matrici *non sono simmetriche*
- e gli autovettori quindi *non sono ortonormali*.

Notiamo come la scelta del campo **u** non è univoca e come cambiando il campo si ottengano matrici diverse, pur con gli stessi autovalori.

Nel caso in cui il fluido sia un gas ideale si ha:

$$c_s = \sqrt{\frac{p}{\rho}}. \quad (3.3.70)$$

3.4 Onde di discontinuità

Definizione di onda di discontinuità

Supponiamo di avere un sistema quasi-lineare iperbolico nella forma generale:

$$\underline{A}_0 \underline{u}_t + \underline{A}_i \underline{u}_{x_i} = \underline{f}. \quad (3.4.1)$$

Consideriamo ora un fronte d'onda di equazione $\varphi(t, x_i) = 0$ e supponiamo che esista una soluzione particolare del sistema, che sia continua attraverso il fronte d'onda, ma tale che la derivata prima, nella direzione normale al fronte d'onda sia discontinua, mentre tutte le altre derivate siano continue. Una soluzione di questo tipo prende il nome di onda discontinuità.

Si tratta di una soluzione regolare dappertutto eccetto che sul fronte d'onda.

In questo caso si può studiare

→ la propagazione della discontinuità della derivata normale trasportata dal fronte stesso.

Per fare questo

- conviene introdurre, in luogo delle coordinate cartesiane t, x_i ,
- ▷ un sistema di coordinate curvilinee τ, ξ_i

che siano

{	<u>localmente ortogonali,</u>
	tali che l'ipersuperficie di equazione $\tau = 0$
	<u>coincida con il fronte d'onda $\varphi = 0$</u>

E' naturale, allora, denotare con la lettera φ la coordinata τ .

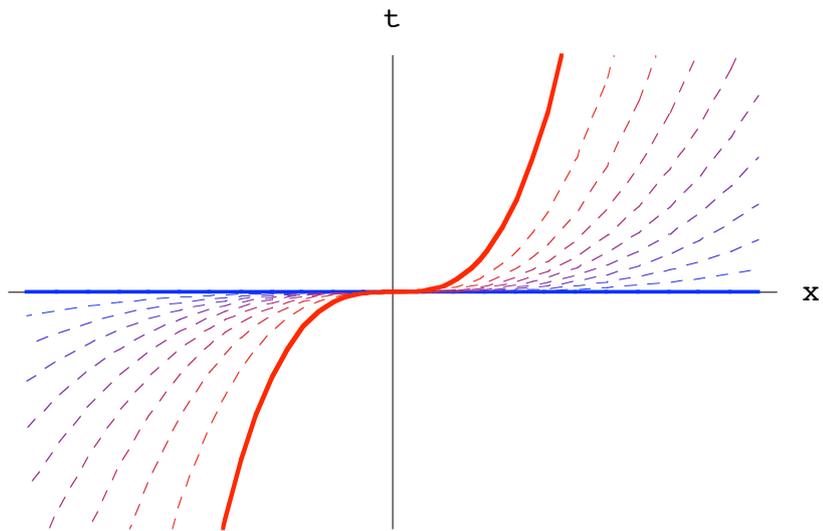


Fig. 13 - **Trasformazione di coordinate** $(t, x_i) \longleftrightarrow (\varphi, \xi_i)$

Richiediamo anche che la trasformazione di coordinate:

$$(t, x_i) \longleftrightarrow (\varphi, \xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4.2)$$

sia regolare.

Attraverso tale trasformazione possiamo pensare

→ il campo \mathbf{u} come

una funzione composta delle coordinate cartesiane,

tramite le coordinate curvilinee:

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\varphi(t, x_i), \xi_j(t, x_i)). \quad (3.4.3)$$

Questa rappresentazione ci permette di *calcolare le derivate parziali* del campo:

$$\underline{\mathbf{u}}_t = \underline{\mathbf{u}}_\varphi \varphi_t + \underline{\mathbf{u}}_{\xi_j} \xi_{jt}, \quad \xi_{jt} = \frac{\partial \xi_j}{\partial t}, \quad (3.4.4)$$

$$\underline{\mathbf{u}}_{x_i} = \underline{\mathbf{u}}_\varphi \varphi_i + \underline{\mathbf{u}}_{\xi_j} \xi_{ji}, \quad \xi_{ji} = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}. \quad (3.4.5)$$

Notiamo che, con questa scelta delle coordinate curvilinee, $\underline{\mathbf{u}}_\varphi$

è proprio la derivata normale al fronte d'onda che presenta la discontinuità.

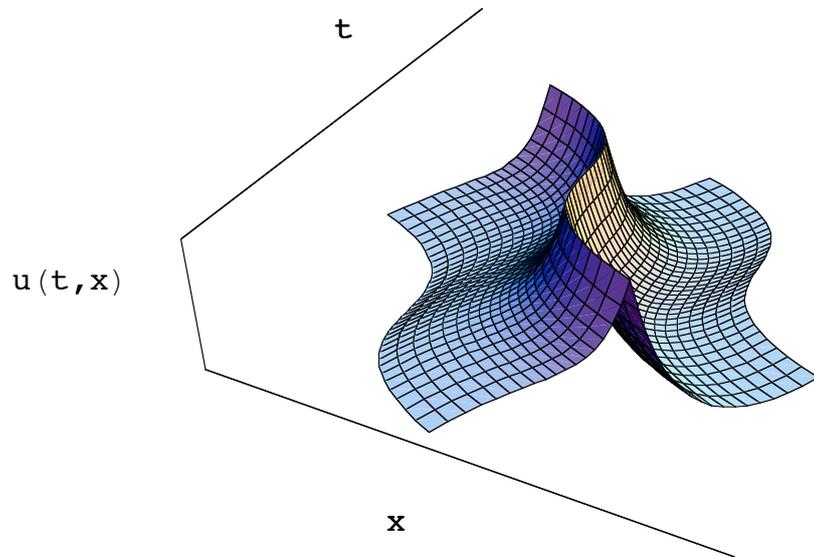


Fig. 14 - Andamento del campo nel nuovo sistema di coordinate

Per la soluzione che stiamo considerando essa è *discontinua* attraverso il fronte d'onda, ovvero:

$$\underline{\mathbf{u}}_\varphi = \begin{cases} \underline{\mathbf{u}}_\varphi = \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)}, & \varphi < 0, \\ \underline{\mathbf{u}}_\varphi = \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)}, & \varphi > 0, \end{cases} \quad (3.4.6)$$

dove abbiamo introdotto le notazioni:

$$\underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(\pm)} = \lim_{\varphi \rightarrow 0^\pm} \underline{\mathbf{u}}_\varphi. \quad (3.4.7)$$

Di conseguenza, possiamo scrivere il sistema quasi-lineare (3.4.1) immediatamente a sinistra e a destra del fronte d'onda, prendendo il limite, rispettivamente, per $\varphi \rightarrow 0^\pm$, come:

$$\underline{\mathbf{A}}_0 \left\{ \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)} \varphi_t + \underline{\mathbf{u}}_{\xi_j} \xi_{jt} \right\} + \underline{\mathbf{A}}_i \left\{ \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)} \varphi_i + \underline{\mathbf{u}}_{\xi_j} \xi_{ji} \right\} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}), \quad (3.4.8)$$

$$\underline{\mathbf{A}}_0 \left\{ \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)} \varphi_t + \underline{\mathbf{u}}_{\xi_j} \xi_{jt} \right\} + \underline{\mathbf{A}}_i \left\{ \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)} \varphi_i + \underline{\mathbf{u}}_{\xi_j} \xi_{ji} \right\} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}). \quad (3.4.9)$$

Sottraendo membro a membro la (3.4.8) e la (3.4.9) otteniamo:

$$\underline{\mathbf{A}}_0 \left\{ \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)} - \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)} \right\} \varphi_t + \underline{\mathbf{A}}_i \left\{ \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)} - \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)} \right\} \varphi_i = 0. \quad (3.4.10)$$

Dalla cinematica delle onde sappiamo che si può scrivere, grazie alle (2.3.2) e (2.3.4):

$$\varphi_i = |\vec{\nabla} \varphi| n_i, \quad \varphi_t = -|\vec{\nabla} \varphi| \lambda.$$

Quindi, possiamo riscrivere la (3.4.10) nella forma di un problema agli autovalori:

$$\underline{\mathbf{A}}_0 \underbrace{\{\underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)} - \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)}\}}_{\underline{\Pi}} \varphi_t + \underline{\mathbf{A}}_i \underbrace{\{\underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)} - \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)}\}}_{\underline{\Pi}} \varphi_i = 0.$$

$$\left(\underline{\mathbf{A}}_n - \lambda \underline{\mathbf{A}}_0 \right) \underline{\Pi} = 0, \quad (3.4.11)$$

dove:

$$\underline{\Pi} = \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)} - \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)}, \quad (3.4.12)$$

denota la discontinuità (*salto*) della derivata normale del campo, attraverso il fronte d'onda.

Ai fini operativi si dimostrerà utile anche l'introduzione dell'operatore:

$$\delta \equiv \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \lim_{\varphi \rightarrow 0^-} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \quad (3.4.13)$$

che permette di ottenere direttamente la discontinuità della derivata normale di una funzione del campo e **segue le stesse regole di un normale operatore differenziale**.

Ad esempio, il vettore del salto della derivata del campo si ottiene agendo con δ sul campo stesso:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{\Pi}. \quad (3.4.14)$$

Per una *funzione differenziabile* qualunque di $F(\mathbf{u})$ abbiamo:

$$\delta F = \lim_{\varphi \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) - \lim_{\varphi \rightarrow 0^-} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}. \quad (3.4.15)$$

Le onde di discontinuità si propagano nello spazio con velocità normali λ che sono autovalori del problema (3.4.11) e con ampiezze \underline{II} che sono autovettori dello stesso problema.

- Notiamo come il *termine di produzione* \underline{f} , essendo continuo, non entra in gioco, nella condizione per le discontinuità (3.4.11).

- L' 'iperbolicità' del sistema garantisce che le velocità di propagazione delle onde di discontinuità, come già per le onde semplici, abbiano senso fisico, essendo quantità reali e che le derivate normali del campo ad esse associate formino una base dello spazio delle variabili di campo.

- Notiamo ancora come la risoluzione del problema delle onde semplici e delle onde di discontinuità

si riconduca allo stesso problema agli autovalori.

Regola operativa

Osserviamo che per ottenere direttamente

il problema agli autovalori (3.4.11),

partendo dal sistema differenziale (3.4.1)

è comodo applicare la regola di corrispondenza:

$$\partial_t \longrightarrow -\lambda \delta, \quad \partial_i \longrightarrow n_i \delta. \quad (3.4.16)$$

Questa regola consente di ottenere gli autovalori e gli autovettori senza costruire esplicitamente le matrici, analogamente a quanto accade per le onde semplici e come vedremo negli esempi.

Osserviamo come,

nel caso in cui lo spazio delle coordinate sia unidimensionale ($n = 1$),

ciò sia presente solo una coordinata spaziale x , oltre al tempo t ,

il vettore normale risulti avere una sola componente uguale all'unità,

e quindi la regola divenga semplicemente:

$$\partial_t \longrightarrow -\lambda \delta, \quad \partial_x \longrightarrow \delta. \quad (3.4.17)$$

Legge di evoluzione delle ampiezze delle onde di discontinuità

A differenza delle *onde semplici*, per le quali $\mathbf{u}(\varphi)$ rappresenta una *soluzione regolare* del sistema quasi-lineare alle derivate parziali, che viene completamente determinata assegnando le condizioni al contorno sul fronte d'onda,

→ le onde di discontinuità rappresentano delle soluzioni non regolari sul fronte d'onda, caratterizzate dal vettore di discontinuità \mathbf{II} , che non è un integrale del sistema quasi-lineare.

Di conseguenza si pone il problema di trovare
la legge di evoluzione di \mathbf{II} al variare del tempo.

Esamineremo il *caso unidimensionale*, che è il più semplice,

— per un *sistema quasi-lineare iperbolico* (cioè con autovalori reali e distinti) per il problema unidimensionale, in forma normale:

$$\underline{\mathbf{u}}_t + \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{u}}_x = \underline{\mathbf{f}}. \quad (3.4.18)$$

Alla matrice $\underline{\mathbf{A}}$, che a priori può non essere simmetrica, è sempre possibile associare

— il classico problema agli autovalori:

$$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}) \underline{\mathbf{d}} = 0, \quad (3.4.19)$$

dove $\underline{\mathbf{d}}$ si dice *autovettore destro*.

Ma si può anche considerare

— il problema agli autovalori per gli autovettori sinistri $\underline{\ell}$

che ha la forma:

$$\underline{\ell}(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}) = 0. \quad (3.4.20)$$

Evidentemente gli autovalori sono gli stessi per entrambi i problemi, in quanto questi ammettono soluzione non banale se e solo se viene soddisfatta la medesima equazione caratteristica:

$$\det(\underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{I}}) = 0. \quad (3.4.21)$$

Inoltre **gli autovettori sinistri e destri sono tra loro ortonormali.**

Infatti, considerando l'autovettore destro **$\underline{\mathbf{d}}$** corrispondente all'autovalore λ e l'autovettore sinistro **$\underline{\ell}'$** associato all'autovalore λ' , abbiamo:

$$\underline{\ell}' (\underline{\mathbf{A}} - \lambda' \underline{\mathbf{I}}) = 0. \quad (3.4.22)$$

Moltiplicando questa relazione, a destra, per **$\underline{\mathbf{d}}$** e tenendo conto che è un autovettore di autovalore λ , otteniamo:

$$(\lambda - \lambda') \underline{\ell}' \cdot \underline{\mathbf{d}} = 0. \quad (3.4.23)$$

Essendo gli autovalori distinti rimane la condizione di ortogonalità tra gli autovettori.

Inoltre è sempre possibile *scegliere la norma dei vettori* in maniera che il prodotto scalare di due vettori relativi allo stesso autovalore sia uno.

Quindi avremo:

$$\underline{\ell}^{(i)} \cdot \underline{\mathbf{d}}^{(j)} = \delta_{ij}. \quad (3.4.24)$$

E' chiaro che questa relazione vale anche nel caso in cui alcuni autovalori siano coincidenti:

infatti, in questo caso, saranno ortogonali i sottospazi degli autovettori sinistri, e rispettivamente destri, associati agli autovalori coincidenti.

Ora procediamo secondo i seguenti passi:

i) moltiplichiamo a sinistra il sistema (3.4.18) per l'autovettore sinistro associato all'autovalore λ , ottenendo:

$$\underline{\ell} \cdot \underline{\mathbf{u}}_t + \underline{\ell} \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{u}}_x = \underline{\ell} \cdot \underline{\mathbf{f}}. \quad (3.4.25)$$

Ora, grazie alla (3.4.20) abbiamo:

$$\underline{\ell} \underline{\mathbf{A}} = \lambda \underline{\ell}, \quad (3.4.26)$$

che sostituiamo nella (3.4.25), ottenendo l'eliminazione della matrice:

$$\underline{\ell}(\underline{\mathbf{u}}_t + \lambda \underline{\mathbf{u}}_x) = \underline{\ell} \cdot \underline{\mathbf{f}}, \quad \underline{\ell} \cdot \underline{\mathbf{f}} = \underline{\ell} \cdot \underline{\mathbf{f}}. \quad (3.4.27)$$

ii) Consideriamo la *caratteristica* (si noti che nel caso unidimensionale caratteristica e bicaratteristica coincidono con la stessa curva) che ha equazione parametrica $x = x(x_0, t)$, soluzione dell'*equazione differenziale*:

$$\frac{d x}{d t} = \lambda, \quad (3.4.28)$$

e osserviamo che:

$$\frac{d}{d t} \equiv \partial_t + \frac{d x}{d t} \partial_x \equiv \partial_t + \lambda \partial_x, \quad (3.4.29)$$

è l'operatore che dà la *derivata totale rispetto al tempo calcolata lungo la caratteristica*.

Di conseguenza, possiamo riscrivere la (3.4.27) nella forma:

$$\underline{\ell}(\underline{\mathbf{u}}_t + \lambda \underline{\mathbf{u}}_x) = f \quad \Longrightarrow \quad \underline{\ell} \cdot \frac{d\underline{\mathbf{u}}}{dt} = f, \quad (3.4.30)$$

dove ora stiamo considerando $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}(t, x(t))$, cioè lungo la caratteristica.

iii) Il terzo passo consiste nel far comparire il vettore di discontinuità $\underline{\Pi}$ come funzione del tempo, calcolata lungo la caratteristica, per poterne determinare la legge di evoluzione.

Questo si può fare considerando una soluzione $\underline{\mathbf{u}}_*(t, x)$ del sistema (3.4.18) che possiamo identificare come lo *stato imperturbato* del campo *prima dell'arrivo del fronte d'onda*.

Questo rappresenta il campo $\underline{\mathbf{u}}$, conveniamo, per $\varphi < 0$.

Possiamo, poi, valutare il campo \mathbf{u} perturbato dal passaggio del fronte d'onda, tenendo conto che sul fronte i due valori del campo si raccordano con continuità, mentre la derivata normale del primo ordine subisce una discontinuità pari a $\underline{\Pi}$. Allora possiamo scrivere il campo perturbato, in prossimità del fronte d'onda, nell'approssimazione del primo ordine, come:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_* + \underline{\Pi} \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2). \quad (3.4.31)$$

Questo risultato si ottiene supponendo che il campo sia sviluppabile in *serie di Mac Laurin*, rispetto alla variabile φ , sia a destra che a sinistra del fronte d'onda di equazione $\varphi = 0$. I due sviluppi sono, infatti:

$$\mathbf{u}(\varphi) = \mathbf{u}(0) + \mathbf{u}_\varphi^{(+)}(0) \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2), \quad (3.4.32)$$

$$\mathbf{u}_*(\varphi) = \mathbf{u}(0) + \mathbf{u}_\varphi^{(-)}(0) \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2). \quad (3.4.33)$$

Sottraendo membro a membro i due sviluppi e tenendo conto che, per definizione:

$$\underline{II} = \underline{\mathbf{u}}_{\varphi}^{(+)}(0) - \underline{\mathbf{u}}_{\varphi}^{(-)}(0), \quad (3.4.34)$$

si ottiene la (3.4.31).

iv) Il passo successivo consiste nello scrivere l'equazione lungo la caratteristica (3.4.30) *a destra e a sinistra del fronte d'onda*:

$$\underline{\ell} \cdot \frac{d \underline{\mathbf{u}}}{d t} = f, \quad \varphi > 0, \quad (3.4.35)$$

$$\underline{\ell}_* \cdot \frac{d \underline{\mathbf{u}}_*}{d t} = f_*, \quad \varphi < 0. \quad (3.4.36)$$

Le notazioni sono ovvie, intendendo con la notazione F_* denotare qualunque funzione di $F(\underline{\mathbf{u}})$ calcolata per $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_*$.

Nell'approssimazione del primo ordine in φ abbiamo, *per ogni funzione del campo*, gli sviluppi:

$$F(\underline{\mathbf{u}}(\varphi)) = F(\underline{\mathbf{u}}(0)) + \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}(0)) \cdot \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(+)}(0) \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2), \quad (3.4.37)$$

$$F(\underline{\mathbf{u}}_*(\varphi)) = F(\underline{\mathbf{u}}_*(0)) + \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}_*(0)) \cdot \underline{\mathbf{u}}_\varphi^{(-)}(0) \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2). \quad (3.4.38)$$

Da questi, sottraendo membro a membro e tenendo conto che $\underline{\mathbf{u}}(0) = \underline{\mathbf{u}}_*(0)$ si ottiene il legame, al primo ordine, tra la F prima e dopo il fronte d'onda: 

$$F(\underline{\mathbf{u}}(\varphi)) = F(\underline{\mathbf{u}}_*(\varphi)) + \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}_*(0)) \cdot \underline{\Pi} \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2). \quad (3.4.39)$$

Applicando la (3.4.38) alla derivata di $F(\underline{\mathbf{u}}(\varphi))$ abbiamo:

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}_*(\varphi)) = \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}_*(0)) + \frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\mathbf{u}} \partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}_*(0)) \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(-)} \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2). \quad (3.4.40)$$

Per cui, a meno di termini del secondo ordine possiamo riscrivere la (3.4.39) come:

$$F(\underline{\mathbf{u}}(\varphi)) = F(\underline{\mathbf{u}}_*(\varphi)) + \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{u}}}(\underline{\mathbf{u}}_*(\varphi)) \cdot \underline{\Pi} \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2). \quad (3.4.41)$$

Per alleggerire le notazioni in seguito scriveremo semplicemente:

$$F = F_* + \underline{\nabla}_u F^* \cdot \underline{\Pi} \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2), \quad \underline{\nabla}_u \equiv \frac{\partial}{\partial \underline{\mathbf{u}}}. \quad (3.4.42)$$

Quindi avremo le seguenti approssimazioni al primo ordine:

— per l'autovalore $\lambda = \lambda(\underline{\mathbf{u}}(\varphi))$:

$$\lambda = \lambda_* + \underline{\nabla}_u \lambda_* \cdot \underline{\Pi} \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2), \quad (3.4.43)$$

— per l'autovettore sinistro:

$$\underline{\ell} = \underline{\ell}_* + \underline{\Pi} \cdot \underline{\nabla}_u \underline{\ell}_* \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2), \quad (3.4.44)$$

— per l'operatore di derivazione lungo la caratteristica:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^*}{dt} + \nabla_u \lambda_* \cdot \Pi \varphi \partial_x + \mathcal{O}(\varphi^2), \quad (3.4.45)$$

dove:

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \lambda \partial_x, \quad \frac{d^*}{dt} = \partial_t + \lambda_* \partial_x, \quad (3.4.46)$$

— per la componente del termine di produzione lungo l'autovettore sinistro:

$$f = f_* + \nabla_u f_* \cdot \Pi \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2). \quad (3.4.47)$$

Di conseguenza abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \frac{d^*}{dt} \mathbf{u}_* + (\nabla_u \lambda_* \cdot \underline{\Pi}) (\mathbf{u}_x + \underline{\Pi} \varphi_x) \varphi + \varphi \frac{d^*}{dt} \underline{\Pi} + \underline{\Pi} \frac{d^*}{dt} \varphi + \mathcal{O}(\varphi^2).$$

Inserendo questi risultati nella (3.4.35) otteniamo:

$$\begin{aligned} & (\underline{\ell}_* + \underline{\Pi} \cdot \nabla_u \underline{\ell}_* \varphi) \left\{ \frac{d^*}{dt} \mathbf{u}_* + (\nabla_u \lambda_* \cdot \underline{\Pi}) (\mathbf{u}_x + \right. \\ & \left. + \underline{\Pi} \varphi_x) \varphi + \varphi \frac{d^*}{dt} \underline{\Pi} + \underline{\Pi} \frac{d^*}{dt} \varphi \right\} = f_* + \nabla_u f_* \cdot \underline{\Pi} \varphi. \end{aligned} \tag{3.4.48}$$

▷ Identificando il coefficienti dei termini dell'*ordine zero* in φ e tenendo conto della (3.4.36) abbiamo:

$$\{\underline{\ell}_* \cdot \underline{\Pi} + \underline{\Pi} (\underline{\nabla}_u \underline{\ell}_*) \underline{\Pi}\} \frac{d^*}{dt} \varphi = 0, \quad (3.4.49)$$

che è soddisfatta per la legge di cinematica delle onde:

$$\frac{d^*}{dt} \varphi \equiv \varphi_t + \lambda_* \varphi_x = 0. \quad (3.4.50)$$

▷ Al *primo ordine* abbiamo:

$$\underline{\ell}_* \cdot \frac{d^*}{dt} \underline{\Pi} + (\underline{\nabla}_u \lambda_* \cdot \underline{\Pi}) (\underline{\ell}_* \cdot \underline{\mathbf{u}}_x + \underline{\ell}_* \cdot \underline{\Pi} \varphi_x) + \underline{\Pi} (\underline{\nabla}_u \underline{\ell}_*) \frac{d^*}{dt} \underline{\mathbf{u}}_* = \underline{\nabla}_u f_* \cdot \underline{\Pi}. \quad (3.4.51)$$

Questa relazione rappresenta la legge di evoluzione cercata.

Possiamo migliorarne la scrittura tenendo conto del fatto che il vettore di discontinuità $\underline{\Pi}$ è un autovettore destro del problema (3.4.19), associato all'autovalore λ considerato.

In una trattazione completa dobbiamo tenere conto che gli *autovalori* del problema possono non essere tutti distinti, per cui l'autovalore λ_* , che stiamo considerando, può avere una *molteplicità M* e, quindi, essendo il sistema iperbolico, essere associato a M autovettori indipendenti.

Allora denoteremo con $\underline{\mathbf{d}}_{*J}$, $J = 1, 2, \dots, M$ questi autovettori e rappresenteremo $\underline{\Pi}$ come combinazione lineare di questi:

$$\underline{\Pi} = \Pi_J \underline{\mathbf{d}}_{*J}, \quad (3.4.52)$$

Per cui denoteremo come $\underline{\ell}_I$ l'autovettore sinistro che compare nella (3.4.51). Ricordiamo che, con un'opportuna scelta delle norme, abbiamo la condizione di ortonormalizzazione:

$$\underline{\ell}_{*I} \cdot \underline{\mathbf{d}}_{*J} = \delta_{IJ}. \quad (3.4.53)$$

Con queste notazioni la legge di evoluzione viene così riscritta:

$$\Rightarrow \frac{d \Pi_I}{d t} + a_J \Pi_J \Pi_I + b_{IJ} \Pi_J = 0, \quad (3.4.54)$$

dove:

$$a_J = \varphi_x \underline{\nabla}_u \lambda_* \cdot \underline{\mathbf{d}}_{*J}, \quad (3.4.55)$$

$$b_{IJ} = (\underline{\ell}_{*I} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{*x}) (\underline{\nabla}_u \lambda_* \cdot \underline{\mathbf{d}}_{*J}) + \underline{\mathbf{d}}_{*J} (\underline{\nabla}_u \underline{\ell}_{*I}) \frac{d^*}{dt} \underline{\mathbf{u}}_* + \\ + \underline{\ell}_{*I} \cdot \frac{d \underline{\mathbf{d}}_{*J}}{dt} - \underline{\nabla}_u f_{*I} \cdot \underline{\mathbf{d}}_{*J},$$

dove $f_{*I} = \underline{\ell}_{*I} \cdot \underline{\mathbf{f}}$ e i coefficienti a_J, b_{IJ} non dipendono da $\underline{\Pi}_I$ e sono noti una volta assegnata la soluzione $\underline{\mathbf{u}}_*$. Sfruttando l'ortonormalità degli autovettori possiamo anche riscrivere:

$$b_{IJ} = (\underline{\ell}_{*I} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{*x}) (\underline{\nabla}_u \lambda_* \cdot \underline{\mathbf{d}}_{*J}) + \underline{\mathbf{d}}_{*J} (\underline{\nabla}_u \underline{\ell}_{*I}) \frac{d^*}{dt} \underline{\mathbf{u}}_* - \\ - \frac{d^*}{dt} \underline{\mathbf{u}}_* (\underline{\nabla}_u \underline{\ell}_{*I}) \underline{\mathbf{d}}_{*J} - \underline{\nabla}_u f_{*I} \cdot \underline{\mathbf{d}}_{*J}. \quad (3.4.56)$$

Questa struttura si semplifica notevolmente nel caso in cui la molteplicità dell'autovalore sia uguale a uno.

Infatti, allora, gli indici I, J assumono solo tale valore e possono essere eliminati, ottenendo:

$$\Rightarrow \frac{d \Pi}{d t} + a \Pi^2 + b \Pi = 0, \quad (3.4.57)$$

con:

$$a = \varphi_x \nabla_u \lambda_* \cdot \mathbf{d}_* \quad (3.4.58)$$

$$b = (\underline{\ell}_* \cdot \mathbf{u}_{*x}) (\nabla_u \lambda_* \cdot \mathbf{d}_*) + \mathbf{d}_* (\nabla_u \underline{\ell}_*) \frac{d^*}{d t} \mathbf{u}_* - \quad (3.4.59)$$

$$\frac{d^*}{d t} \mathbf{u}_* (\nabla_u \underline{\ell}_*) \mathbf{d}_* - \nabla_u f_* \cdot \mathbf{d}_*.$$

Questa è la classica equazione di Bernoulli,

che si integra con la sostituzione $\Pi = 1/\zeta$ che la rende lineare, a coefficienti variabili:

$$\frac{d\zeta}{dt} - b\zeta = a. \quad (3.4.60)$$

Il suo integrale è dato da:

$$\Pi(t) = \frac{\Pi_0 e^{-\int_0^t b(\tau) d\tau}}{1 - \mathcal{F}(t)}, \quad \Pi_0 = \Pi(0). \quad (3.4.61)$$

dove:

$$\mathcal{F}(t) = -\Pi_0 \int_0^t a(\tau) e^{-\int_0^\tau b(\mathcal{T}) d\mathcal{T}} d\tau, \quad (3.4.62)$$

Osserviamo che nella (3.4.61) *il denominatore può annullarsi* in corrispondenza di un *valore critico del tempo* t_c per cui si ha $\mathcal{F}(t_c) = 1$.

Al limite per t che tende a questo valore Π tende all'infinito:

$$t \longrightarrow t_c \implies \mathcal{F}(t_c) = 1 \implies \Pi \longrightarrow \infty.$$

Questo viene interpretato come l'insorgere di un'onda d'urto, con la conseguente perdita di continuità all'ordine zero.

I risultati precedenti si generalizzano anche al *caso tridimensionale*:

in questo caso la legge di evoluzione contiene, in più, anche un *termine geometrico* che può rendere nullo il denominatore, indipendentemente da un valore critico del tempo ed è responsabile dell'incontro di più bicaratteristiche in uno stesso punto dello spazio (*fenomeno caustico*).

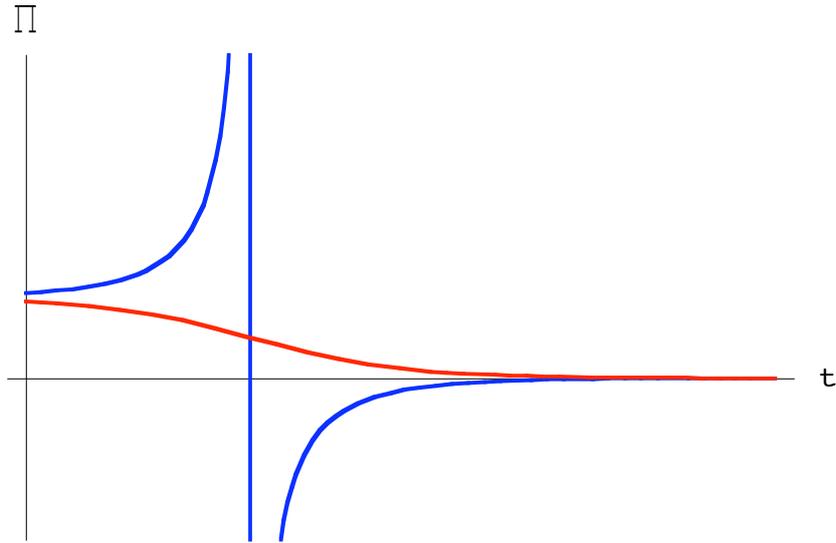


Fig. 15 - Evoluzione di $\Pi(t)$ in uno stato costante:
tempo critico nel futuro (tracciato **blu**) o nel passato (tracciato **rosso**)

Condizione di eccezionalità

La condizione:

$$\underline{\nabla}_u \lambda \cdot \underline{\mathbf{d}} = 0, \quad (3.4.63)$$

viene detta condizione di eccezionalità.

Quando viene verificata su un fronte d'onda essa è sufficiente a garantire che il termine a nella legge di evoluzione sia nullo, con la conseguenza che il denominatore della (3.4.61) non è mai nullo, essendo uguale ad uno.

$$a = \varphi_x \underbrace{\underline{\nabla}_u \lambda_* \cdot \underline{\mathbf{d}}_*}_{\parallel 0}, \quad \implies \quad \mathcal{F}(t) = -\Pi_0 \int_0^t \underbrace{a(\tau)}_{\parallel 0} e^{-\int_0^\tau b(\mathcal{T}) d\mathcal{T}} d\tau = 0.$$

Nonostante il suo nome la condizione di eccezionalità

è verificata quasi sempre nei

sistemi iperbolici derivanti dalla fisica e questo garantisce, ai fini dell'evoluzione delle onde di discontinuità, un comportamento del tutto simile ai *sistemi lineari*.

I sistemi lineari verificano, a loro volta, la *condizione di eccezionalità*,

in quanto, in un sistema lineare, le matrici e perciò i loro **autovalori**, **non dipendono dal campo**, e quindi risulta semplicemente:

$$\underline{\nabla}_u \lambda = 0 \quad (\text{caso lineare}). \quad (3.4.64)$$

La condizione di eccezionalità, in generale, può anche essere scritta nella *forma equivalente*:

$$\delta \lambda = 0, \quad (3.4.65)$$

in quanto:

$$\begin{aligned} \delta \lambda &\equiv \underline{\nabla}_u \lambda \cdot \delta \mathbf{u} = \\ &= \underline{\nabla}_u \lambda \cdot \underline{\Pi} = \underline{\Pi} \underline{\nabla}_u \lambda \cdot \mathbf{d} = 0. \end{aligned}$$

Quest'ultima relazione evidenzia il fatto rilevante che la condizione di eccezionalità è indipendente dalla scelta del campo \mathbf{u} , ma è una proprietà invariante dell'autovalore λ considerato.

Quando un'onda soddisfa la condizione di eccezionalità viene detta onda eccezionale.

Eccezionalità delle onde multiple nei sistemi di leggi di bilancio

Diamo ora un importante risultato.

Teorema - *Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché, in un sistema iperbolico di leggi di bilancio, le velocità caratteristiche siano associate ad onde eccezionali è che abbiano molteplicità $M > 1$.*

Dimostrazione

Consideriamo un generico sistema di leggi di bilancio:

$$\partial_t \mathbf{f}_0 + \partial_i \mathbf{f}_i = \mathbf{f}, \quad (3.4.66)$$

che supponiamo iperbolico, e il problema agli autovalori associato che scriviamo nella forma: ↘

$$\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_J} - \lambda \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} \right) d_J = 0. \quad (3.4.67)$$

Se esiste un autovalore $\bar{\lambda}$ di molteplicità $M > 1$,

ad esso saranno associati M autovettori.

Dunque, oltre all'autovettore $\underline{\mathbf{d}} \equiv (d_J)$,
 ne esiste almeno un altro $\underline{\mathbf{d}}' \equiv (d'_I)$,
 indipendente, associato allo stesso autovalore.

Ora deriviamo l'equazione precedente rispetto a u_I e poniamo $\lambda = \bar{\lambda}$,
 ottenendo:

$$\left(\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_I \partial u_J} - \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_I \partial u_J} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_I} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} \right) d_J + \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_J} - \bar{\lambda} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} \right) \frac{\partial d_J}{\partial u_I} = 0.$$

Moltiplichiamo ora quest'equazione per d'_I . Abbiamo:

$$\left(\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_I \partial u_J} - \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_I \partial u_J} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_I} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} \right) d'_I d_J +$$

$$\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_J} - \bar{\lambda} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} \right) d'_I \frac{\partial d_J}{\partial u_I} = 0. \quad (3.4.68)$$

Moltiplichiamo scalarmente la relazione precedente per l'autovettore sinistro $\underline{\ell}'$ e teniamo conto che:

$$\underline{\ell}' \cdot \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_J} - \bar{\lambda} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} \right) = 0. \quad (3.4.69)$$

Rimane, dunque nella (3.4.69):

$$\underline{\ell}' \cdot \left(\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_I \partial u_J} - \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_I \partial u_J} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_I} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} \right) d'_I d_J = 0. \quad (3.4.70)$$

Tutto il procedimento si può ripetere, dall'inizio, scambiando i vettori (d'_I) , (d_J) , cioè partendo dall'equazione:

$$\left(\frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_I} - \bar{\lambda} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_I} \right) d'_I = 0, \quad (3.4.71)$$

derivandola rispetto a u_J e moltiplicandola per d_J e poi scalarmente per $\underline{\ell}'$.

Si ottiene, in questo modo,

tenendo conto della *simmetria* delle matrici hessiane:

$$\underline{\ell}' \cdot \left(\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{f}}_n}{\partial u_I \partial u_J} - \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_I \partial u_J} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_J} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_I} \right) d'_I d'_J = 0. \quad (3.4.72)$$

Sottraendo membro a membro la (3.4.70) e la (3.4.72) otteniamo:

$$\underline{\ell}' \cdot \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_I} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} - \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_J} \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_I} \right) d'_I d'_J = 0. \quad (3.4.73)$$

Possiamo riscrivere la (3.4.73) come: 

$$\left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_I} d'_I \right) \underline{\ell}' \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_J} d_J = \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_J} d_J \right) \underline{\ell}' \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{f}}_0}{\partial u_I} d'_I, \quad (3.4.74)$$

ovvero:

$$\left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_I} d'_I \right) \underline{\ell}' \underline{\mathbf{A}}_0 \underline{\mathbf{d}} = \left(\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_J} d_J \right) \underline{\ell}' \underline{\mathbf{A}}_0 \underline{\mathbf{d}}'. \quad (3.4.75)$$

Tenendo conto delle relazioni di ortonormalizzazione tra gli autovettori destri e sinistri:

$$\underline{\ell}' \underline{\mathbf{A}}_0 \underline{\mathbf{d}}' = 1, \quad \underline{\ell}' \underline{\mathbf{A}}_0 \underline{\mathbf{d}} = 0, \quad (3.4.76)$$

abbiamo, finalmente:

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_J} d_J = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\nabla}_u \bar{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{d}} = 0. \quad (3.4.77)$$

Analogamente si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial u_I} d'_I = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\nabla}_u \bar{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{d}}' = 0. \quad (3.4.78)$$

Dunque l'onda multipla risulta eccezionale.

Esempi fisici

Elettrodinamica non lineare tridimensionale

A completamento di quanto abbiamo già visto nel caso delle onde semplici, esaminiamo ora la propagazione delle onde di discontinuità in alcuni **problemi tridimensionali**.

Consideriamo le equazioni di Maxwell, per l'elettrodinamica non lineare

▷ dei mezzi con **permeabilità magnetica** che è una **funzione isotropa** dell'intensità del **campo magnetico**,

▷ in assenza di cariche e correnti elettriche (che possiamo omettere in quanto ai fini del problema agli autovalori per le onde di discontinuità non entrano comunque in gioco).

Le equazioni sono date dalle 6 equazioni evolutive:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0, \quad (3.4.79)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (3.4.80)$$

e da due ulteriori condizioni non evolutive:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.4.81)$$

dove:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \varepsilon = \text{costante}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \mu \equiv \mu(\vec{H}^2). \quad (3.4.82)$$

Notiamo come, nell'esempio unidimensionale esaminato per le onde semplici, le condizioni (3.4.81) fossero **automaticamente soddisfatte** e quindi non era necessario introdurle.

Nel caso tridimensionale il sistema evolutivo (3.4.79) e (3.4.80) è un

- sistema di 6 equazioni evolutive indipendenti
 - per le 6 incognite rappresentate dalle componenti di \vec{E} , \vec{H} .
 - Le ulteriori condizioni (3.4.81) sono vincoli differenziali aggiuntivi che si impongono alle soluzioni del sistema (3.4.79), (3.4.80) per selezionarne la classe che ha senso fisico.
-

Ai fini dell'iperbolicità dovremo considerare il solo sistema di equazioni evolutive, senza i vincoli, la cui considerazione rimuove alcuni autovettori del problema agli autovalori per le onde di discontinuità (e quindi anche semplici).

Il sistema (3.4.79), (3.4.80) può essere riscritto nella forma indiciale:

$$\partial_t D_k - \varepsilon_{ijk} \partial_i H_j = 0, \quad (3.4.83)$$

$$\partial_t B_k + \varepsilon_{ijk} \partial_i E_j = 0, \quad (3.4.84)$$

ovvero nella forma compatta di leggi di conservazione:

$$\partial_t \begin{pmatrix} D_k \\ B_k \end{pmatrix} + \partial_i \begin{pmatrix} -\varepsilon_{ijk} H_j \\ \varepsilon_{ijk} E_j \end{pmatrix} = 0, \quad (3.4.85)$$

e quindi anche nella forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \delta_{jk} & 0 \\ 0 & \mu \delta_{jk} + 2 \mu' H_j H_k \end{pmatrix} \partial_t \begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_{ijk} \\ \varepsilon_{ijk} & 0 \end{pmatrix} \partial_i \begin{pmatrix} E_j \\ H_j \end{pmatrix}.$$

Si noti che le matrici sono simmetriche, grazie all'antisimmetria del simbolo di Levi-Civita, e se assumiamo che $\underline{\mathbf{A}}_0$ sia definita positiva ci aspettiamo autovalori reali e una base ortonormale di autovettori. Il sistema è sicuramente iperbolico. Le equazioni per le onde di discontinuità si possono ottenere direttamente dal sistema differenziale in forma vettoriale (3.4.79), (3.4.80), mediante la regola di corrispondenza (3.4.16), e sono:

$$-\lambda \varepsilon \delta \vec{E} - \vec{n} \times \delta \vec{H} = 0, \quad (3.4.86)$$

$$-\lambda (\mu \underline{\mathbf{I}} + 2 \mu' \vec{H} \otimes \vec{H}) \delta \vec{H} + \vec{n} \times \delta \vec{E} = 0. \quad (3.4.87)$$

Moltiplichiamo scalarmente la (3.4.86) per \vec{n} e semplificando otteniamo:

$$\lambda \vec{n} \cdot \delta \vec{E} = 0, \quad (3.4.88)$$

relazione che può essere soddisfatta per $\lambda = 0$ o per $\vec{n} \cdot \delta \vec{E} = 0$. Esaminiamo separatamente i due casi.

i) Caso $\lambda \equiv \lambda^{(3)} = 0$

Introducendo l'informazione $\lambda = 0$ nelle (3.4.86) e (3.4.87) otteniamo:

$$\vec{n} \times \delta \vec{H} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \vec{H} = \alpha \vec{n}, \quad (3.4.89)$$

$$\vec{n} \times \delta \vec{E} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \vec{E} = \beta \vec{n}, \quad (3.4.90)$$

con α, β funzioni scalari arbitrarie.

Questa onda è chiaramente eccezionale, dal momento che la sua velocità di propagazione è addirittura nulla, e quindi risulta certamente:

$$\delta \lambda^{(3)} = 0. \quad (3.4.91)$$

D'altra parte questo non sorprende trattandosi di un'onda multipla in un sistema di leggi di bilancio. Infatti, scegliendo come campo:

$$\mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}, \quad (3.4.92)$$

l'autovettore si scrive: 

$$\underline{\mathbf{d}}^{(3)} \equiv \begin{pmatrix} \beta \vec{n} \\ \alpha \vec{n} \end{pmatrix}. \quad (3.4.93)$$

L'autovettore dipende da due funzioni al variare delle quali si ha un piano invariante nello spazio degli stati $\underline{\mathbf{u}}$.

Dunque l'autovalore ha molteplicità $M = 2$ (autovalore doppio)

ed esistono 2 autovettori linearmente indipendenti.

Possiamo, allora trovare una coppia di autovettori ortonormali, rispetto alla metrica $\underline{\mathbf{A}}_0$,

associati a questo autovalore, scegliendo, per esempio, alternativamente

$$\alpha = 1/\sqrt{\varepsilon}, \beta = 0 \text{ e rispettivamente } \alpha = 0, \beta = 1/\sqrt{\mu + 2\mu' \vec{H}_n^2}.$$

Quindi:

$$\mathbf{d}_1^{(3)} \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2^{(3)} \equiv \frac{1}{\sqrt{\mu + 2\mu' \vec{H}_n^2}} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{n} \end{pmatrix}, \quad H_n = \vec{H} \cdot \vec{n}. \quad (3.4.94)$$

ii) Caso $\lambda \neq 0, \vec{n} \cdot \delta \vec{E} = 0$

Supponiamo ora che:

$$\vec{n} \cdot \delta \vec{E} = 0 \quad \implies \quad \delta \vec{E} \perp \vec{n}. \quad (3.4.95)$$

Ora moltiplichiamo vettorialmente la (3.4.86) per \vec{n} a sinistra in modo da ricavare $\vec{n} \times \delta \vec{E}$: ↘

$$-\lambda \varepsilon \vec{n} \times \delta \vec{E} - \vec{n} \times (\vec{n} \times \delta \vec{H}) = 0 \implies -\lambda \varepsilon \vec{n} \times \delta \vec{E} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \delta \vec{H}) + \delta \vec{H} = 0$$

↓

$$\lambda \varepsilon \vec{n} \times \delta \vec{E} = (\mathbf{1} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \delta \vec{H}. \quad (3.4.96)$$

Sostituendo la (3.4.96) nella (3.4.87) abbiamo:

$$-\lambda^2 \varepsilon (\mu \mathbf{1} + 2\mu' \vec{H} \otimes \vec{H}) \delta \vec{H} + (\mathbf{1} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \delta \vec{H} = 0,$$

ovvero:

$$\left\{ (\lambda^2 \varepsilon \mu - 1) \underline{\mathbf{I}} + 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' \vec{H} \otimes \vec{H} + \vec{n} \otimes \vec{n} \right\} \delta \vec{H} = 0. \quad (3.4.97)$$

A questo punto si possono presentare le seguenti situazioni:

- $\delta \vec{H}$ ortogonale al piano di \vec{n} e \vec{H} ,
- oppure $\delta \vec{H}$ complanare con \vec{n} e \vec{H} .

a) $\delta \vec{H}$ ortogonale al piano di \vec{n} e \vec{H} , ovvero:

$$\delta \vec{H} = \gamma \vec{n} \times \vec{H}, \quad (3.4.98)$$

con γ funzione arbitraria non nulla. Sostituendo nella (3.4.97) abbiamo: ↘

$$(\lambda^2 \varepsilon \mu - 1) \vec{n} \times \vec{H} = 0. \quad (3.4.99)$$

Da cui gli autovalori:

$$\lambda^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad \lambda^{(5)} = +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (3.4.100)$$

La molteplicità è $M = 1$ in quanto abbiamo solo un parametro γ .

Dalla (3.4.86) abbiamo, poi, di conseguenza:

$$\delta \vec{E} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \vec{n} \times \delta \vec{H} \equiv \mp \gamma \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\vec{H} - H_n \vec{n}). \quad (3.4.101)$$

Gli autovettori risultano ortonormali tra loro e con i precedenti scegliendo

$$\gamma = 1/\sqrt{2\mu(\vec{H}^2 - H_n^2)}$$

e si possono scrivere come:

$$\mathbf{d}^{(1)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\mu(\vec{H}^2 - H_n^2)}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\vec{H} - H_n \vec{n}) \\ \vec{n} \times \vec{H} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d}^{(5)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\mu(\vec{H}^2 - H_n^2)}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\vec{H} - H_n \vec{n}) \\ \vec{n} \times \vec{H} \end{pmatrix}.$$

Le onde risultano eccezionali in quanto:

$$\delta \lambda = \pm \frac{\mu'}{2 \varepsilon \mu^3} \vec{H} \cdot \delta \vec{H} \equiv \pm \gamma \frac{\mu'}{2 \varepsilon \mu^3} \vec{H} \cdot \vec{n} \times \vec{H} = 0.$$

b) $\delta \vec{H}$ complanare con \vec{n} e \vec{H}

Possiamo esprimere la complanarità con la relazione:

$$\delta \vec{H} = a \vec{H} + b \vec{n}. \quad (3.4.102)$$

Questo comporta nella (3.4.97):

$$\{(\lambda^2 \varepsilon \mu - 1) \underline{\mathbf{I}} + 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' \vec{H} \otimes \vec{H} + \vec{n} \otimes \vec{n}\} (a \vec{H} + b \vec{n}) = 0. \quad (3.4.103)$$

Ovvero:

$$(\lambda^2 \varepsilon \mu - 1) (a \vec{H} + b \vec{n}) + 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' \vec{H} \{ \vec{H} \cdot (a \vec{H} + b \vec{n}) \} + \vec{n} \{ \vec{n} \cdot (a \vec{H} + b \vec{n}) \} = 0.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} & \{ (\lambda^2 \varepsilon \mu - 1) a + 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' \vec{H} \cdot (a \vec{H} + b \vec{n}) \} \vec{H} + \\ & + \{ (\lambda^2 \varepsilon \mu - 1) b + \vec{n} \cdot (a \vec{H} + b \vec{n}) \} \vec{n} = 0. \end{aligned}$$

La condizione precedente deve essere soddisfatta per ogni soluzione del campo \vec{H} e per ogni direzione della normale \vec{n} .

Per cui occorre richiedere l'annullarsi dei coefficienti di questi vettori:

$$(\lambda^2 \varepsilon \mu - 1) a + 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' \vec{H} \cdot (a \vec{H} + b \vec{n}) = 0, \quad (3.4.104)$$

$$(\lambda^2 \varepsilon \mu - 1) b + \vec{n} \cdot (a \vec{H} + b \vec{n}) = 0. \quad (3.4.105)$$

Questo rappresenta un sistema omogeneo per le incognite a, b che possiamo riscrivere:

$$\begin{cases} (\lambda^2 \varepsilon \mu - 1 + 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' \vec{H}^2) a + 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' H_n b = 0, \\ H_n a + \lambda^2 \varepsilon \mu b = 0. \end{cases} \quad (3.4.106)$$

Il determinante dei coefficienti vale:

$$\begin{aligned} D &= (\lambda^2 \varepsilon \mu - 1 + 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' \vec{H}^2) \lambda^2 \varepsilon \mu - 2 \lambda^2 \varepsilon \mu' H_n^2 \equiv \\ &\equiv \lambda^2 \varepsilon \left\{ \lambda^2 \varepsilon \mu (\mu + 2 \mu' \vec{H}^2) - 2 \mu' H_n^2 - \mu \right\}. \end{aligned}$$

Tenendo conto che ora si deve avere $\lambda \neq 0$, annullando D seguono gli autovalori:

$$\lambda^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{\mu + 2 \mu' H_n^2}{\mu + 2 \mu' \vec{H}^2}}, \quad \lambda^{(4)} = +\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{\mu + 2 \mu' H_n^2}{\mu + 2 \mu' \vec{H}^2}}. \quad (3.4.107)$$

La molteplicità di questi autovalori è $M = 1$ in quanto i due parametri a, b sono linearmente dipendenti e possiamo determinare, ad esempio: 

$$b = -a H_n \frac{\mu + 2 \mu' \vec{H}^2}{\mu + 2 \mu' H_n^2}.$$

Le rispettive discontinuità per il campo elettrico e magnetico valgono, di conseguenza, grazie alla (3.4.86):

$$\delta \vec{E} = \pm a \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\mu + 2 \mu' \vec{H}^2}{\mu + 2 \mu' H_n^2}} \vec{n} \times \vec{H}, \quad \delta \vec{H} = a \left(\vec{H} - \frac{\mu + 2 \mu' \vec{H}^2}{\mu + 2 \mu' H_n^2} H_n \vec{n} \right).$$

E quindi gli autovettori corrispondenti sono dati da: ↘

$$\underline{\mathbf{d}}^{(2)} \equiv a \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\mu+2}{\mu+2} \frac{\mu' \vec{H}^2}{H_n^2}} \vec{n} \times \vec{H} \\ \vec{H} - \frac{\mu+2}{\mu+2} \frac{\mu' \vec{H}^2}{H_n^2} H_n \vec{n} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{d}}^{(4)} \equiv a \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\mu+2}{\mu+2} \frac{\mu' \vec{H}^2}{H_n^2}} \vec{n} \times \vec{H} \\ \vec{H} - \frac{\mu+2}{\mu+2} \frac{\mu' \vec{H}^2}{H_n^2} H_n \vec{n} \end{pmatrix}.$$

Il coefficiente a si può determinare in modo da normalizzare i vettori opportunamente.

Fluido perfetto tridimensionale

Abbiamo visto, in precedenza, come

le **equazioni del fluido perfetto tridimensionale** si possano scrivere nella forma:

$$\rho_t + (\rho v_i)_{x_i} = 0, \quad (3.4.108)$$

$$(\rho v_j)_t + (\rho v_i v_j + p \delta_{ij})_{x_i} = 0, \quad (3.4.109)$$

$$(\rho S)_t + (\rho S v_i)_{x_i} = 0. \quad (3.4.110)$$

Le equazioni per le onde di discontinuità sono, quindi, date da:

$$-\lambda \delta \rho + n_i \delta (\rho v_i) = 0, \quad (3.4.111)$$

$$-\lambda \delta (\rho v_j) + n_i \delta (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = 0, \quad (3.4.112)$$

$$-\lambda \delta (\rho S) + n_i \delta (\rho S v_i) = 0. \quad (3.4.113)$$

Come per le onde semplici nel caso unidimensionale, osserviamo che, grazie alla (3.4.111), *la* (3.4.113) *si può scrivere* come:

$$\implies (\lambda - v_n) \delta S = 0, \quad v_n = v_i n_i. \quad (3.4.114)$$

$$\implies (\lambda - v_n) \delta S = 0.$$

A partire da questa relazione, allora due casi possibili:

i) Onda materiale

Si ha l'onda materiale in corrispondenza dell'autovalore che denotiamo con l'indice 2 per ragioni di ordinamento:

$$\lambda^{(2)} = v_n. \quad (3.4.115)$$

Sostituendo la (3.4.115) nella (3.4.111) e semplificando otteniamo:

$$n_i \delta v_i = 0. \quad (3.4.116)$$

Mentre nella (3.4.112) abbiamo:

$$-\lambda \delta (\rho v_j) + n_i \delta (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = 0,$$



$$-v_n (\delta \rho) v_j + v_n (\delta \rho) v_j + \rho v_j n_i \delta v_i + n_i \delta p = 0.$$

Da cui, semplificando e tenendo conto che $n_i \neq 0$, ricaviamo:

$$\delta p = 0. \tag{3.4.117}$$

Scegliendo come campo le variabili:

$$\underline{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \rho \\ v_j \\ S \end{pmatrix}, \quad (3.4.118)$$

la discontinuità del campo si scrive:

$$\delta \underline{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta v_j \\ \delta S \end{pmatrix}. \quad (3.4.119)$$

Osserviamo che la discontinuità $\delta \rho$ è lasciata arbitraria dal sistema delle equazioni per le onde, mentre,

scegliendo ρ, p come variabili termodinamiche indipendenti e $S(\rho, p)$ come funzione di stato risulta:

$$\delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_p \delta \rho + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_\rho \delta p. \quad (3.4.120)$$

Essendo, per la (3.4.117), $\delta p = 0$, segue:

$$\delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_p \delta \rho. \quad (3.4.121)$$

La discontinuità per la velocità risulta soggetta alla sola condizione (3.4.116) e, poiché nello spazio tridimensionale esistono due vettori indipendenti \vec{e}_1, \vec{e}_2 normali ad (n_i) , possiamo scrivere: 

$$\delta v_j = \alpha_1 (\vec{e}_1)_j + \alpha_2 (\vec{e}_2)_j, \quad (3.4.122)$$

con α_1, α_2 funzioni arbitrarie.

Notiamo come una scelta possibile degli autovettori nel piano di \vec{e}_1, \vec{e}_2 , se si assume che \vec{v} non sia parallela ad \vec{n} , è data da:

$$\vec{e}_1 = \alpha_1 \vec{n} \times \vec{v} \quad \vec{e}_2 = \alpha_2 \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{v}). \quad (3.4.123)$$

La molteplicità dell'onda materiale

risulta, quindi $M = 3$ avendo **tre funzioni arbitrarie** a disposizione:

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3 = \delta\rho,$$

che possono essere scelte in modo da ortonormalizzare gli autovettori destri con quelli sinistri, rispetto alla metrica:

$$\underline{\mathbf{A}}_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v_j & \rho & 0 \\ S & 0 & \rho \end{pmatrix}. \quad (3.4.124)$$

Gli autovettori destri corrispondenti possono essere scelti in modo che:

$$\underline{\mathbf{d}}_1^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \varepsilon_{jkl} n_k v_l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{d}}_2^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 (v_j - v_n n_j) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{d}}_3^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 0 \\ \alpha_3 \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_p \end{pmatrix}.$$

L'onda materiale è *eccezionale*, come si ricava calcolando:

$$\delta \lambda^{(2)} = \delta v_n = n_i \delta v_i = 0, \quad (3.4.122)$$

grazie alla (3.4.113), o anche, semplicemente tenendo conto che si tratta di un'onda multipla in un sistema di leggi di bilancio.

ii) *Onde soniche*

Le onde soniche corrispondono alla soluzione

$$\delta S = 0. \quad (3.4.123)$$

della (3.4.111): $\implies (\lambda - v_n) \delta S = 0.$

Sviluppando la (3.4.108) otteniamo:

$$-\lambda \delta \rho + n_i \delta (\rho v_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho n_i \delta v_i = (\lambda - v_n) \delta \rho. \quad (3.4.124)$$

Mentre lo sviluppo della (3.4.109) fornisce:

$$\begin{aligned} -\lambda \delta (\rho v_j) + n_i \delta (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) &= 0 \\ \Downarrow \\ \underbrace{\{-\lambda \delta \rho + n_i \delta (\rho v_i)\}}_0 v_j - \lambda \rho \delta v_j + \rho v_n \delta v_j + n_j \delta p &= 0, \end{aligned}$$

che, grazie alla (3.4.108) diviene:

$$-\lambda \rho \delta v_j + \rho v_n \delta v_j + n_j \delta p = 0. \quad (3.4.125)$$

Moltiplicando per n_j e tenendo conto che $n_j n_j = 1$, abbiamo:

$$(\lambda - v_n) \rho n_i \delta v_i - \delta p = 0. \quad (3.4.126)$$

Sostituendo la (3.4.124)



nella (3.4.126) otteniamo:



$$\rho n_i \delta v_i = (\lambda - v_n) \delta \rho \implies (\lambda - v_n)^2 \delta \rho - \delta p = 0. \quad (3.4.127)$$

Ora, tenendo conto che per le onde soniche $\delta S = 0$ esprimiamo, come nel caso unidimensionale:

$$\delta p = c_s^2 \delta \rho, \quad c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S. \quad (3.4.128)$$

Quindi otteniamo:

$$\{(\lambda - v_n)^2 - c_s^2\} \delta \rho = 0. \quad (3.4.129)$$

E quindi **le velocità di propagazione delle onde soniche:**

$$\lambda^{(1)} = v_n - c_s, \quad \lambda^{(3)} = v_n + c_s. \quad (3.4.130)$$

Le onde soniche hanno molteplicità $M = 1$ e **gli autovettori destri** corrispondenti sono:

$$\underline{\mathbf{d}}^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{c_s}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix} \delta \rho, \quad \underline{\mathbf{d}}^{(3)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ +\frac{c_s}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix} \delta \rho. \quad (3.4.131)$$

Le onde soniche non sono eccezionali. Infatti, per la (3.4.129) abbiamo:

$$\delta \lambda = \delta (v_n \mp c_s).$$

E per la (3.4.127):

$$\rho n_i \delta v_i = (\lambda - v_n) \delta \rho \iff \delta v_n = (\lambda - v_n) \frac{\delta \rho}{\rho} \equiv \mp c_s \frac{\delta \rho}{\rho}$$



$$\delta \lambda = \delta (v_n \mp c_s) = \mp \frac{c_s \delta \rho + \rho \delta c_s}{\rho} \equiv \mp \left\{ \frac{c_s}{\rho} + \left(\frac{\partial c_s}{\partial \rho} \right)_S \right\} \delta \rho \neq 0,$$

essendo $\delta \rho$ arbitrario.

3.5 Onde d'urto

Definizione di onda d'urto

Supponiamo di avere un sistema quasi-lineare iperbolico

→ in forma di leggi di bilancio:

$$\partial_t \underline{\mathbf{f}}_0 + \partial_i \underline{\mathbf{f}}_i = \underline{\mathbf{f}}. \quad (3.5.1)$$

Consideriamo ora un fronte d'onda di equazione $\varphi(t, x_i) = 0$ e supponiamo che esista una soluzione particolare del sistema,

discontinua attraverso il fronte d'onda, ma tale da essere regolare altrove (soluzione debole).

Una soluzione di questo tipo prende il nome di onda d'urto.

In questo caso si può studiare la propagazione della discontinuità trasportata dal fronte stesso.

Ci si rende conto facilmente che, a causa della perdita di continuità della soluzione sul fronte d'onda, è necessario supporre che il sistema iperbolico sia un sistema di leggi di bilancio.

Infatti, a causa della discontinuità della funzione $\mathbf{u}(t, x_i)$ la formulazione differenziale del problema non sussiste sul fronte d'onda ed è necessario ricorrere alla formulazione integrale. Poichè il passaggio alla formulazione integrale richiede l'eliminazione delle derivate del campo sotto il segno di integrale, si deve ricorrere al teorema di Gauss che richiede che il sistema si presenti in forma di divergenza.

Per ottenere la formulazione integrale del problema (3.5.1):

— riscriviamo il sistema nella forma:

$$\partial_\alpha \underline{\mathbf{f}}_\alpha = \underline{\mathbf{f}}, \quad \alpha = 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad x_0 = t, \quad (3.5.2)$$

— integriamo su un dominio spazio-temporale $\mathcal{D} \subset R^{n+1}$ incluso nel dominio di definizione della funzione $\underline{\mathbf{u}}(t, x_i)$:

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_\alpha \underline{\mathbf{f}}_\alpha d^{n+1}x = \int_{\mathcal{D}} \underline{\mathbf{f}} d^{n+1}x. \quad (3.5.3)$$

Scegliamo il dominio \mathcal{D} come un iper-cilindro circolare retto, spazio-temporale che include un tratto del fronte d'onda di equazione $\varphi(t, x_i) = 0$, le cui iper-basi S_1, S_2 , localmente parallele all'iper-piano tangente al fronte, hanno misura uguale ad S_B e la iper-superficie laterale S_3 ha misura $S_L = B_L h_L$, che possiamo assumere piccola quanto si vuole.

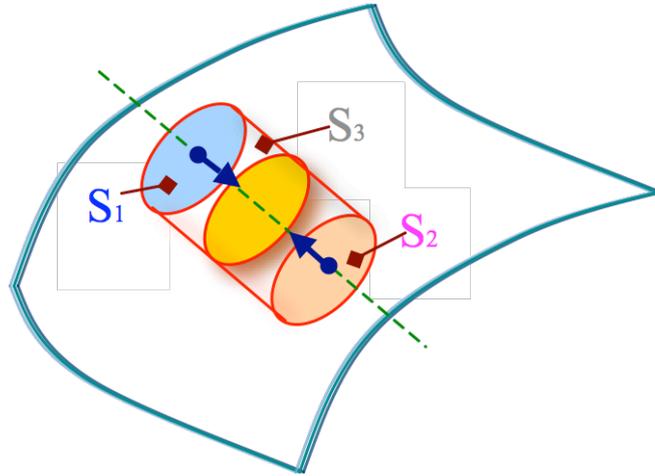


Fig. 17 - Cilindro in prossimità del fronte d'onda d'urto

Mediante il teorema di Gauss:

$$\int_{\mathcal{D}} \partial_{\alpha} \underline{\mathbf{f}}_{\alpha} d^{n+1}x = - \int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{f}}_{\alpha} \nu_{\alpha} d\Sigma, \quad (3.5.4)$$

riscriviamo l'integrale a primo membro nella (3.5.2) eliminando la derivata della funzione $\underline{\mathbf{f}}_\alpha$ che contiene il campo discontinuo.

Il *vettore unitario* ν_α rappresenta la *normale alla frontiera* $\partial \mathcal{D}$ del dominio, rivolta verso l'interno. Data la scelta fatta per il dominio \mathcal{D} , abbiamo:

$$\int_{\partial \mathcal{D}} \underline{\mathbf{f}}_\alpha \nu_\alpha \, d\Sigma = \int_{S_1} \underline{\mathbf{f}}_\alpha \nu_{1\alpha} \, d\Sigma + \int_{S_2} \underline{\mathbf{f}}_\alpha \nu_{2\alpha} \, d\Sigma + \int_{S_3} \underline{\mathbf{f}}_\alpha \nu_{3\alpha} \, d\Sigma, \quad (3.5.5)$$

dove ν_1, ν_2, ν_3 sono le *rispettive normali* nello spazio-tempo. Possiamo eliminare l'ultimo integrale, relativo alla iper-superficie laterale dell'iper-cilindro, facendo uso del teorema della media, ottenendo:

$$\int_{S_3} \underline{\mathbf{f}}_\alpha \nu_{3\alpha} \, d\Sigma = B_L h_L \langle \underline{\mathbf{f}}_{3\alpha} \nu_{3\alpha} \rangle. \quad (3.5.6)$$

Con $\langle \ \rangle$ si è indicato il valor medio della funzione.

Mediante il **teorema della media** eliminiamo anche l'integrale di volume a secondo membro della (3.5.3):

$$\int_{\mathcal{D}} \underline{\mathbf{f}} d^{n+1}x = D \langle \underline{\mathbf{f}} \rangle, \quad (3.5.7)$$

essendo D la misura del dominio iper-cilindrico \mathcal{D} .

— Prendendo il limite per $h_L \rightarrow 0$,

in modo che **le due basi tendano alla iper-superficie del fronte d'onda**, gli integrali (3.5.6) e (3.5.7) tendono a zero.

Tenendo conto che le normali alle basi sono opposte ($\nu_2 = -\nu_1$) possiamo, finalmente riscrivere la (3.5.3), nel limite per $h_L \rightarrow 0$:

$$\int_{S_1} \{ \underline{\mathbf{f}}_{\alpha}^{(+)} - \underline{\mathbf{f}}_{\alpha}^{(-)} \} \nu_{1\alpha} d\Sigma = 0, \quad (3.5.8)$$

dove si è tenuto conto del fatto che

la funzione $\underline{\mathbf{f}}_\alpha$, dipendendo dal campo è discontinua attraverso il fronte d'onda, e si è posto:

$$\underline{\mathbf{f}}_\alpha^{(\pm)} = \lim_{h_L \rightarrow 0^\pm} \underline{\mathbf{f}}_\alpha. \quad (3.5.9)$$

Dal momento che la (3.5.8) deve valere

qualunque sia la scelta della superficie S_1 , si deve avere necessariamente:

$$\int_{S_1} \{ \underline{\mathbf{f}}_\alpha^{(+)} - \underline{\mathbf{f}}_\alpha^{(-)} \} \nu_{1\alpha} d\Sigma = 0, \forall S_1 \implies \{ \underline{\mathbf{f}}_\alpha^{(+)} - \underline{\mathbf{f}}_\alpha^{(-)} \} \nu_{1\alpha} = 0. \quad (3.5.10)$$

Osserviamo, infine, che **la normale** ($\nu_{1\alpha}$) viene a coincidere con la **normale al fronte d'onda** e quindi risulta **parallela** a $\varphi_\alpha = \partial_\alpha \varphi$.

Così abbiamo:

$$\{\underline{\mathbf{f}}_{\alpha}^{(+)} - \underline{\mathbf{f}}_{\alpha}^{(-)}\} \varphi_{\alpha} = 0. \quad (3.5.11)$$

— Essendo $\varphi_0 = \varphi_t$

— introducendo la **velocità normale dell'onda d'urto** (secondo le solite regole cinematiche), **che chiameremo** s

per distinguerla dalle velocità caratteristiche denotate con λ ,

abbiamo finalmente le **equazioni di Rankine-Hugoniot** per le onde d'urto:

$$-s [\underline{\mathbf{f}}_0] + [\underline{\mathbf{f}}_i] n_i = 0, \quad s = -\frac{\varphi_t}{|\vec{\nabla} \varphi|}, \quad n_i = \frac{\varphi_i}{|\vec{\nabla} \varphi|}. \quad (3.5.12)$$

Dove con: $[w] = w^{(+)} - w^{(-)}$, si denota il salto di ogni grandezza w .

Regola operativa

Per ottenere direttamente le equazioni di Rankine-Hugoniot (3.5.12), partendo dal sistema di leggi di bilancio (3.5.1) è comodo applicare

la regola di corrispondenza:

$$\partial_t \longrightarrow -s [\], \quad \partial_i \longrightarrow n_i [\], \quad (3.5.13)$$

che nel caso unidimensionale diventa semplicemente:

$$\partial_t \longrightarrow -s [\], \quad \partial_x \longrightarrow [\]. \quad (3.5.14)$$

Osserviamo come,

a differenza del caso delle onde semplici

e di quelle delle onde di discontinuità

le equazioni di Rankine-Hugoniot

non si presentano come un problema agli autovalori

e, quindi, le velocità normali degli urti

non sono, in generale, velocità caratteristiche.

Esempio - Elettrodinamica non lineare unidimensionale

Come esempio consideriamo

- il caso dell'elettrodinamica non lineare unidimensionale,
- nel quale supponiamo che D sia una funzione non lineare del campo elettrico E .

Abbiamo le quazioni:

$$D_t + E_x = 0, \quad D = \varepsilon_0 E + K_E E^2, \quad E \equiv E(t, x),$$

$$B_t + H_x = 0, \quad B = \mu_0 H, \quad H \equiv H(t, x).$$

Le equazioni di Rankine-Hugoniot si scrivono,

a partire dalla regola di corrispondenza precedente:

$$-s [D] + [H] = 0, \quad (3.5.15)$$

$$-s [B] + [E] = 0. \quad (3.5.16)$$

Ovvero:

$$-s [\varepsilon_0 E + K_E E^2] + [H] = 0, \quad (3.5.17)$$

$$-s [\mu_0 H] + [E] = 0. \quad (3.5.18)$$

i) Urti caratteristici

Incominciamo con osservare che cosa succede

nella **situazione particolare** in cui:

$$[E^2] = 0. \quad (3.5.19)$$

Queste condizioni comportano nelle equazioni di Rankine-Hugoniot:

$$-s [\varepsilon_0 E + K_E E^2] + [H] = 0 \quad \Longrightarrow \quad -s \varepsilon_0 [E] + [H] = 0,$$

$$-s [\mu_0 H] + [E] = 0 \quad \Longrightarrow \quad -s \mu_0 [H] + [E] = 0,$$

essendo anche ε_0, μ_0 costanti e quindi continue attraverso il fronte d'onda.

Ci si trova, in tal modo, nella stessa situazione che sai avrebbe per le **equazioni di Maxwell lineari** ed è facile ottenere per sostituzione:

$$(s^2 \varepsilon_0 \mu_0 - 1) [E] = 0, \quad [H] = s \varepsilon_0 [E]. \quad (3.5.20)$$

E quindi, in corrispondenza di un urto non banale ($[E] \neq 0$):

$$s^2 \varepsilon_0 \mu_0 - 1 = 0. \quad (3.5.21)$$

Si ottengono, allora, le velocità di propagazione delle onde d'urto per le quali *i quadrati dei campi sono continui* attraverso il fronte d'onda:

$$s = \pm c_0, \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (3.5.22)$$

Questo tipo di urti che viaggia

con *velocità uguali alle velocità caratteristiche*,

possono presentarsi in generale e non solo in elettrodinamica,

e vengono denominati *urti caratteristici*.

Notiamo che, nel nostro caso questi urti corrispondono ad *un'inversione del segno* del campo elettrico:

$$E = -E_*. \quad (3.5.23)$$

Questa situazione diviene particolarmente significativa nel caso tridimensionale, dove il quadrato di un vettore rimane immutato per rotazione del vettore di un angolo qualunque.

ii) Urti non caratteristici

Se invece supponiamo:

$$[E^2] \neq 0, \quad (3.5.24)$$

dobbiamo sviluppare le equazioni di Rankine-Hugoniot,

ottenendo, in *forma esplicita*:

$$-s (\varepsilon_0 E + K_E E^2) + H = -s (\varepsilon_0 E_* + K_E E_*^2) + H_*, \quad (3.5.25)$$

$$-s \mu_0 H + E = -s \mu_0 H_* + E_*. \quad (3.5.26)$$

E risolverle per E e H dopo il passaggio del fronte d'onda,

- in funzione dei campi prima dell'urto E^* , H^* , che si suppongono noti
- e della velocità dell'urto s che si comporta come un parametro libero.

Nel nostro caso abbiamo, sotto l'ipotesi $E \neq -E^*$,
necessaria per esplicitare E :

$$E = -E^* - \frac{s^2 \varepsilon_0 \mu_0 - 1}{s^2 K_E \mu_0}, \quad (3.5.27)$$

$$H = H^* - \frac{s^2 \varepsilon_0 \mu_0 - 1}{s^3 K_E \mu_0^2} - \frac{2}{s \mu_0} E^*. \quad (3.5.28)$$

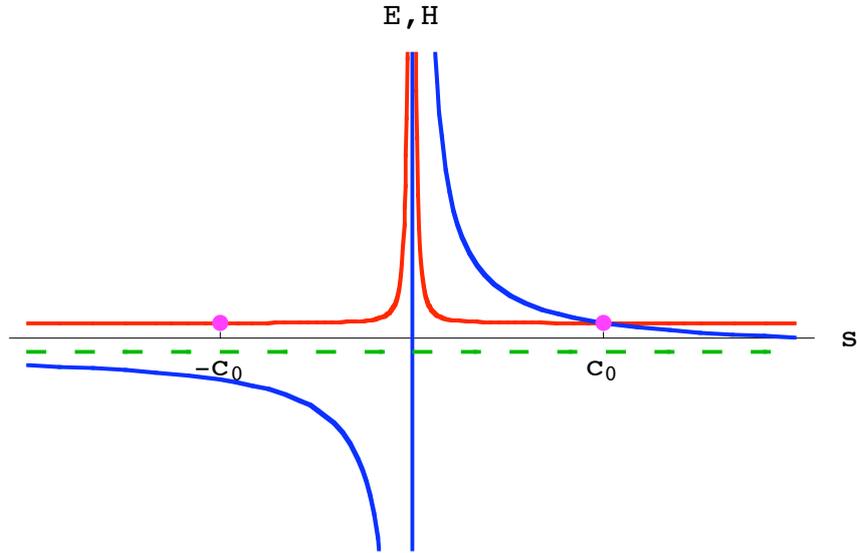


Fig. 18 - Andamento di $E(s)$ (tracciato rosso) e $H(s)$ (tracciato blu) per un urto non caratteristico che si propaga in uno stato costante $E^* = H^*$ (tracciato verde) e urti caratteristici (punti viola)