

# Principi variazionali

---

Per poter parlare di *principi variazionali* dobbiamo anzitutto introdurre almeno i concetti e i risultati elementari del calcolo delle variazioni.

## Introduzione al calcolo delle variazioni

---

La *teoria delle funzioni* usuale si occupa di

funzioni che trasformano *variabili numeriche*, o *vettoriali*

in altre *variabili numeriche* o *vettoriali*;

In particolare se le funzioni sono a valori reali ne ricerca i **massimi** e i **minimi**, ecc.

Il calcolo delle variazioni, invece, costituisce un settore dell'*analisi funzionale* che si occupa di

funzioni a *valori reali*

i cui argomenti non sono delle *variabili numeriche* o *vettoriali*,

ma sono a loro volta delle **funzioni**

e ne ricerca i massimi e i minimi al variare della funzione argomento.

Una **funzione di questo tipo**, il cui argomento è a sua volta una funzione è detta *funzionale*.

## Funzionale

Sia  $X$  un insieme di funzioni:

$$f : A \longrightarrow B$$

e  $Y$  un qualunque altro insieme.

Chiamiamo *funzionale* qualsiasi applicazione:

$$\mathcal{F} : X \longrightarrow Y$$

Allora  $\mathcal{F}$  associa ad ogni funzione  $f \in X$  un elemento  $y$  dell'insieme  $Y$ :

$$X \ni f \longrightarrow y \in Y$$

Denoteremo i valori  $y$  del funzionale con le scritte:

$$\mathcal{F}[f], \quad \mathcal{F}[f(x)]$$

essendo  $f(x)$  i valori di  $f$ .

---

In particolare a noi serviranno dei

- funzionali a valori reali ( $Y = R$ ), i cui *argomenti* sono delle
- funzioni **f** definite su un sottoinsieme  $A$  di  $R$  o di  $R^n$ , a valori in  $R^N$ .

## Esempi

---

i) Data una curva  $\gamma$  nel piano  $x, y$ , di equazione cartesiana  $y = f(x)$ :

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\frac{df}{dx}(x)\right]^2} dx \quad (1)$$

è il funzionale che associa alla funzione  $f$  la lunghezza del tratto di curva compreso tra i punti di ascisse  $x_1, x_2$ .

---

ii) Dato un corpo rigido con un punto fisso, i cui punti costituiscono un insieme continuo  $\mathcal{C}$ , che ruota con velocità angolare  $\underline{\omega}(t)$ , l'energia cinetica è un funzionale della funzione  $\underline{\omega}(t)$ , definito dalla relazione:

$$T[\underline{\omega}(t)] = \frac{1}{2} \underline{\omega}(t) \times \underline{\mathcal{I}} \underline{\omega}(t) \quad (2)$$

---

iii) Dato un sistema olonomo governato da una lagrangiana  $\mathcal{L}(q_h, \dot{q}_h, t)$  l'integrale:

$$\mathcal{S}[q_h(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_h(t), \dot{q}_h(t), t) dt \quad (3)$$

è un funzionale dei parametri lagrangiani in funzione del tempo.

---

- Si noti come in un funzionale le *funzioni argomento* possono comparire anche attraverso le loro *derivate*.
- Il problema tipico del calcolo delle variazioni consiste nella ricerca di quelle funzioni argomento che rendono *massimo* o *minimo* il valore del *funzionale*.

## Funzionale lineare

Un funzionale  $\mathcal{F}$  si dice *lineare* quando soddisfa le condizioni tipiche di ogni funzione lineare, e cioè:

$$\text{a) } \mathcal{F}[f + g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$$

$$\text{b) } \mathcal{F}[\alpha f] = \alpha \mathcal{F}[f]$$

## Esempi

---

i) l'operatore differenziale  $d$  è un funzionale lineare, dal momento che per ogni funzione differenziabile  $f, g$  e per ogni numero reale  $\alpha$  si ha:

$$d[f + g] = d[f] + d[g], \quad d[\alpha f] = \alpha d[f]$$

---

ii) l'operatore integrale  $\int_{\mathcal{D}}$  è un funzionale lineare, in quanto:

$$\int_{\mathcal{D}}[f + g] = \int_{\mathcal{D}}[f] + \int_{\mathcal{D}}[g], \quad \int_{\mathcal{D}}[\alpha f] = \alpha \int_{\mathcal{D}}[f]$$

## Variazione

Dato un funzionale  $\mathcal{F}[f]$  si dice variazione di  $f$  e si indica con  $\delta f$  la differenza:

$$\delta f = f - f_0 \quad (4)$$

tra due valori qualunque della funzione argomento  $f$ .

Il concetto di variazione appena definito corrisponde a quello di

→ *incremento della variabile indipendente* di una funzione ordinaria.

L'*incremento del funzionale* si denota usualmente con  $\Delta\mathcal{F}$ :

$$\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}[f + \delta f] - \mathcal{F}[f] \quad (5)$$

## Funzionale continuo

La definizione di continuità per un funzionale richiede una certa *accuratezza*, in quanto **non può essere trasportata** automaticamente *dalla teoria delle funzioni* di variabili numeriche o vettoriali.

Infatti, la definizione usuale di continuità ci porterebbe a ritenere sufficiente affermare che un funzionale  $\mathcal{F}[f]$  è continuo in  $f_0$  quando:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad (6)$$
$$|f(x) - f_0(x)| < \delta \implies |\mathcal{F}[f(x)] - \mathcal{F}[f_0(x)]| < \varepsilon$$

Tuttavia un **funzionale** potrebbe dipendere anche dalle *derivate* della *funzione argomento* rispetto alle variabile  $x$ .

Quindi:

occorre imporre una condizione anche su tutte le

derivate, fino all'ordine in cui compaiono nel funzionale

per assicurare che l'incremento del funzionale sia limitato quanto si vuole.

Si definisce allora la

continuità in  $f_0$  fino all'ordine  $n$

per un funzionale in cui compaiono le derivate di  $f$  fino a tale ordine:

$$\mathcal{F}[f] = F(f, f', f'', \dots, f^{(n)})$$

nel modo seguente:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ :$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - f_0(x)| < \delta \\ |f'(x) - f_0'(x)| < \delta \\ \dots \quad \dots \\ |f^{(n)}(x) - f_0^{(n)}(x)| < \delta \end{array} \right\} \implies |\mathcal{F}[f(x)] - \mathcal{F}[f_0(x)]| < \varepsilon$$

---

Si osservi che con le notazioni ', ", <sup>(n)</sup> abbiamo denotato sinteticamente le *derivate* di primo, secondo e *n*-simo ordine, intendendo che se  $x$  è una sola variabile reale si tratta di derivate ordinarie, mentre se  $x$  è una *n*-pla di  $\mathbb{R}^n$  si tratta di tutte le derivate parziali dell'ordine considerato.

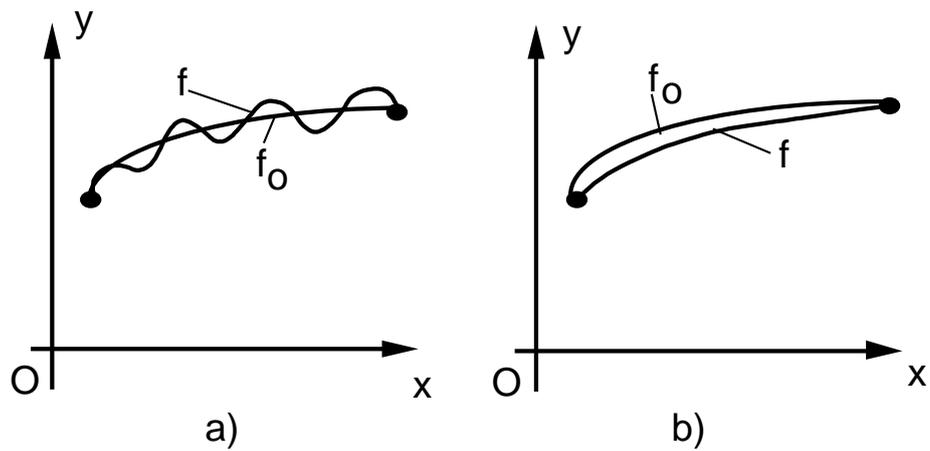


Fig. 1 - Funzionale continuo: a) fino all'ordine 0; b) fino all'ordine  $n$

## Massimi e minimi relativi di un funzionale

Anche per la definizione di *massimo (minimo)* relativo di un **funzionale**

—→ occorre specificare l'ordine di “vicinanza” tra le funzioni argomento, come si è fatto per definire la continuità

Solitamente ci si limita a considerare gli ordini 0 e 1.

## Massimi e minimi relativi forti

Diremo che un funzionale  $\mathcal{F}[f]$  possiede un *massimo* (*minimo*) *relativo forte* in  $f_0$  se e solo se:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ ; \forall f(x) :$$

$$i) |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \implies \quad \mathcal{F}[f(x)] \leq (\geq) \mathcal{F}[f_0(x)],$$

$$ii) \mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}[f_0(x)] \quad \iff \quad f(x) = f_0(x) \quad (7)$$

## Massimi e minimi relativi *deboli*

Diremo che un funzionale  $\mathcal{F}[f]$  possiede un *massimo* (*minimo*) relativo *debole* (primo ordine) in  $f_0$  se e solo se:

$$\begin{aligned} & \exists \varepsilon \in R^+; \forall f(x) \\ i) \quad & \left. \begin{array}{l} |f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \\ |f'(x) - f'_0(x)| < \varepsilon \end{array} \right\} \implies \mathcal{F}[f(x)] \leq (\geq) \mathcal{F}[f_0(x)], \\ & \hspace{15em} (8) \\ ii) \quad & \mathcal{F}[f(x)] = \mathcal{F}[f_0(x)] \iff f(x) = f_0(x) \end{aligned}$$

Questa seconda condizione è detta *debole* rispetto al prima in quanto se una funzionale possiede un massimo (minimo) forte esso è tale anche in senso debole, ma non viceversa. Infatti la condizione forte deve essere vera *per tutte le funzioni*  $f$ , *e non solamente* quelle per le quali vale anche la condizione sulle derivate prime.

## Variazione di un funzionale

Il concetto di *variazione di un funzionale* costituisce

→ l'estensione ai funzionali del concetto di *differenziale* per le funzioni ordinarie

e può essere introdotto in maniera semplice scrivendo l'incremento della funzione argomento  $f$  mediante l'ausilio di un parametro di controllo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La variazione di un funzionale, così definita, si denota con l'operatore  $\delta$ .

$$\delta \mathcal{F}[f(x)] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{F}[f(x) + \alpha \delta f(x)] \right|_{\alpha=0} \quad (9)$$

## Funzionale stazionario

Un funzionale  $\mathcal{F}[f]$  si dice stazionario in  $f_0$  quando si annulla la sua variazione in  $f_0$

## Condizione necessaria di massimo e minimo di un funzionale

Formuliamo ora la condizione necessaria affinché un funzionale abbia un massimo o un minimo, che generalizza quella ben nota per le funzioni ordinarie.

Condizione necessaria affinché un funzionale  $\mathcal{F}[f]$  abbia massimo o minimo relativo (forte o debole) in  $f_0$  è che sia stazionario in  $f_0$

Infatti se in  $f_0$  il funzionale  $\mathcal{F}$  ha un massimo o un minimo relativo (forte o debole), introdotta la variazione della funzione argomento:

$$\alpha \delta f(x) = f(x) - f_0(x)$$

per ogni funzione  $f(x)$  nell'intorno di  $f_0$  che soddisfa le condizioni (7), o rispettivamente (8), si ha che i *valori* del funzionale hanno *massimo (minimo)* per  $\alpha = 0$ , ovvero:

$$\phi(\alpha) = \mathcal{F}[f(x) + \alpha \delta f(x)]$$

ha un massimo (minimo) in  $\alpha = 0$ .

→ Ma  $\phi$  è una funzione in *una variabile*  $\alpha$

per la quale vale *condizione necessaria* di massimo (minimo):

$$\frac{d\phi}{d\alpha}(0) = 0$$

E di conseguenza, per la definizione di variazione del funzionale (9), segue:

$$\delta\mathcal{F}[f_0(x)] = 0$$

## Equazioni di Eulero

Consideriamo ora due classi particolari di funzionali che risultano particolarmente importanti per le loro applicazioni alla meccanica e alla fisica in genere.

### 1. Funzioni $\mathbf{f}$ dipendenti solo dal tempo

Sia:

$$\mathbf{f} : [t_1, t_2] \rightarrow R^N$$

una funzione di una variabile reale  $t$  (che nei problemi evolutivi è il tempo) a valori vettoriali in  $R^N$ ,

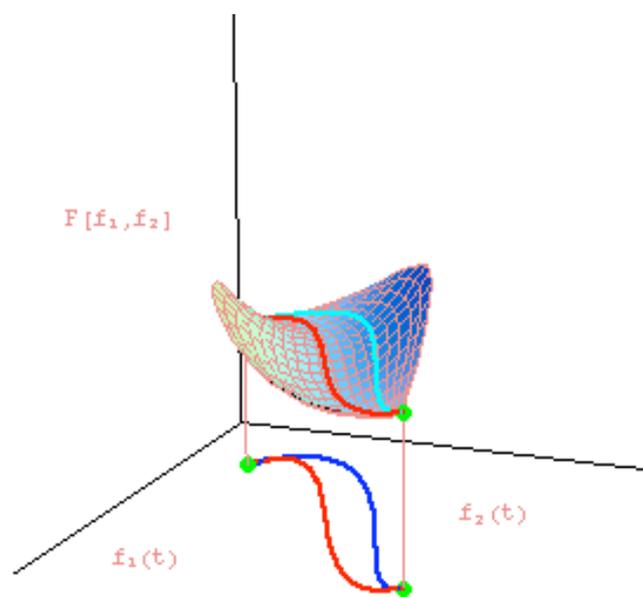
e  $\mathcal{F}[\underline{\mathbf{f}}]$  il funzionale definito da:

$$\mathcal{F}[\underline{\mathbf{f}}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, f_h(t), \dot{f}_h(t)) dt \quad (10)$$

essendo  $f_h$  le componenti del vettore  $\underline{\mathbf{f}}$ . Vogliamo determinare le condizioni alle quali devono soddisfare le funzioni  $f_h$  affinché il funzionale sia stazionario rispetto a variazioni delle funzioni  $f_h$  supposte nulle negli estremi di integrazione:

$$\delta f_h|_{t=t_1} = \delta f_h|_{t=t_2} = 0 \quad (11)$$

Geometricamente questo equivale a ricercare la curve di stazionarietà del funzionale facendo variare le curve di confronto in maniera tale che passino tutte per gli stessi estremi.



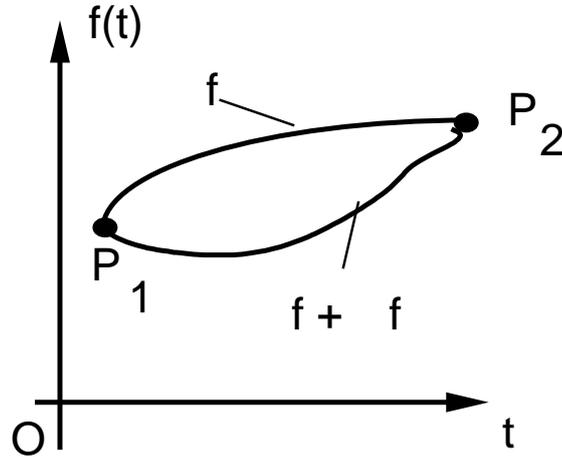


Fig. 2 - Variazioni di isocrone di un funzionale di funzioni dipendenti solo dal tempo

La ricerca delle condizioni di stazionarietà per il funzionale (10) si riconduce alla determinazione delle condizioni che annullano, in  $\alpha = 0$ , la derivata della funzione a valori reali:

$$\phi(\alpha) = \mathcal{F}[\underline{\mathbf{f}}(t) + \alpha \delta \underline{\mathbf{f}}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} F(t, f_h(t) + \alpha \delta f_h(t), \dot{f}_h(t) + \alpha \delta \dot{f}_h(t)) dt \quad (12)$$

Tenendo conto che  $\alpha$  non dipende dalla variabile di integrazione  $t$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\alpha}(0) &= \left[ \frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_2} F(t, f_h(t) + \alpha \delta f_h(t), \dot{f}_h(t) + \alpha \delta \dot{f}_h(t)) dt \right] \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} F(t, f_h(t) + \alpha \delta f_h(t), \dot{f}_h(t) + \alpha \delta \dot{f}_h(t)) \right] \Big|_{\alpha=0} dt \end{aligned}$$

Sviluppando la derivata:

$$\frac{d\phi}{d\alpha}(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left. \frac{\partial F}{\partial \bar{f}_k} \right|_{\alpha=0} \delta f_k(t) + \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{\bar{f}}_k} \right|_{\alpha=0} \delta \dot{f}_k(t) \right] dt$$

avendo denotato con  $\bar{f}_k$  le funzioni incrementate. Osserviamo, ora, che la variazione della derivata (di qualsiasi ordine) delle funzioni  $f_k$  è uguale alla derivata della variazione. Infatti:

$$\delta \dot{f}_k = \dot{\bar{f}}_k - \dot{f}_k = \frac{d}{dt}(\bar{f}_k - f_k) = \frac{d}{dt}(\delta f_k) \quad (13)$$

Inoltre evidentemente:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \bar{f}_k} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial F}{\partial f_k}, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{\bar{f}}_k} \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k}$$

Ma allora si può riscrivere il risultato, precedentemente calcolato, come:

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\alpha}(0) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_k} \delta f_k(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \frac{d}{dt} \delta f_k(t) \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial f_k} \delta f_k(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \frac{d}{dt} \delta f_k(t) dt\end{aligned}$$

Integrando per parti il secondo integrale otteniamo:

$$\frac{d\phi}{d\alpha}(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \right] \delta f_k(t) dt + \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \delta f_k(t) \right]_{t_1}^{t_2}$$

Ma grazie alla condizione (11) *le variazioni agli estremi sono nulle*, per cui la condizione di stazionarietà del funzionale diventa:

$$\frac{d\phi}{d\alpha}(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \right] \delta f_k(t) dt = 0 \quad (14)$$

Data l'arbitrarietà delle variazioni  $\delta f_k$  l'integrale (14) può annullarsi se e solo se è nulla la funzione integranda, e in particolare il termini entro parentesi quadra:

$$\frac{\partial F}{\partial f_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} = 0 \quad (15)$$

Queste condizioni che equivalgono alla stazionarietà del funzionale sono note come *equazioni di Eulero*.

Esse saranno utilizzate in relazione alla dinamica lagrangiana e hamiltoniana dei *sistemi olonomi* ad un numero *finito* di gradi di libertà.

## 2. Funzioni $\mathbf{f}$ dipendenti dal tempo e dalle coordinate

I risultati precedenti si generalizzano in maniera abbastanza diretta al caso in cui le funzioni dipendano anche dalle coordinate dello spazio (che considereremo essere  $R^3$ ), oltre che dal tempo.

Sia:

$$\mathbf{f} : [t_1, t_2] \times \mathcal{D} \rightarrow R^N, \quad \mathcal{D} \subseteq R^3$$

una funzione delle variabili  $t, x_J$ , ( $J = 1, 2, 3$ ), a valori vettoriali in  $R^N$ , e  $\mathcal{F}[\mathbf{f}]$  il funzionale definito da:

$$\mathcal{F}[\mathbf{f}(t, x_J)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} F(t, x_J, f_h(t, x_J), \dot{f}_h(t, x_J), f_{h,I}(t, x_J)) dV dt \quad (16)$$

essendo  $f_h$  le componenti del vettore  $\mathbf{f}$  e  $dV$  l'elemento di volume spaziale.

Denotiamo con le lettere maiuscole  $I, J, K = 1, 2, 3$  gli indici delle componenti delle coordinate spaziali per distinguerli dagli indici  $h, k, \ell = 1, 2, \dots, N$  che tabulano le funzioni  $f_h$ . Inoltre denotiamo:

$$f_{h,J} = \frac{\partial f_h}{\partial x_J} \quad (17)$$

Vogliamo determinare le condizioni alle quali devono soddisfare le funzioni  $f_h$  affinché il funzionale sia stazionario rispetto a variazioni delle funzioni  $f_h$  supposte nulle negli estremi di integrazione temporali e sulla frontiera spaziale di  $\mathcal{D}$ :

$$\delta f_h|_{t=t_1} = \delta f_h|_{t=t_2} = 0, \quad \delta f_h|_{(x_J) \in \partial \mathcal{D}} = 0 \quad (18)$$

Geometricamente questo equivale a ricercare, per ogni punto di coordinate  $x_J$  la curve di stazionarietà del funzionale, facendo variare le curve di

confronto in maniera tale che passino tutte per gli stessi estremi.

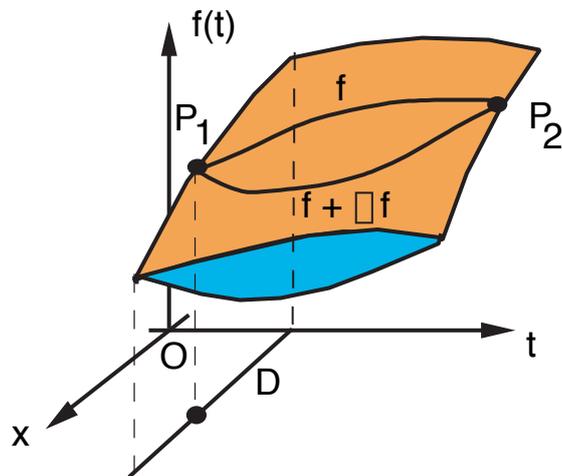


Fig. 3 - Variazioni di isocrone di un funzionale di funzioni dipendenti dal tempo e dalle coordinate

La ricerca delle condizioni di stazionarietà per il funzionale (16) si riconduce alla determinazione delle condizioni che annullano, in  $\alpha = 0$ , la derivata della funzione a valori reali:

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) &= \mathcal{F}[\mathbf{f}(t, x_J) + \alpha \delta \mathbf{f}(t, x_J)] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} F(t, x_J, f_h + \alpha \delta f_h, \dot{f}_h + \alpha \delta \dot{f}_h, f_{h,I} + \alpha \delta f_{h,I}) dV dt\end{aligned}$$

dove abbiamo sottinteso gli argomenti  $(t, x_J)$  delle funzioni  $f_h$  per alleggerire la scrittura.

Tenendo conto che  $\alpha$  non dipende dalle variabili di integrazione  $t, x_I$ , possiamo scrivere:

$$\frac{d\phi}{d\alpha}(0) =$$

$$= \frac{d}{d\alpha} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} F(t, x_J, f_h + \delta f_h, \dot{f}_h + \alpha \delta \dot{f}_h, f_{h,I} + \alpha \delta f_{h,I}) dV dt \right] \Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(t, x_J, f_h + \alpha \delta f_h, \dot{f}_h + \alpha \delta \dot{f}_h, f_{h,I} + \alpha \delta f_{h,I}) \Big|_{\alpha=0} dV dt$$

Sviluppando la derivata:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\alpha}(0) &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_k} \delta f_k + \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \delta \dot{f}_k + \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} \delta f_{k,I} \right] dV dt \end{aligned}$$

Ma le *variazioni delle derivate* (di qualsiasi ordine) delle funzioni  $f_k$  sono *uguali alle derivate delle variazioni* rispetto alle stesse variabili. Ma allora si può riscrivere il risultato, precedentemente calcolato, come:

$$\frac{d\phi}{d\alpha}(0) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_k} \delta f_k + \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \frac{\partial}{\partial t} \delta f_k + \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} \frac{\partial}{\partial x_I} \delta f_k \right] dV dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial f_k} \delta f_k dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \frac{\partial}{\partial t} [\delta f_k] dV dt + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} \frac{\partial}{\partial x_I} [\delta f_k] dV dt
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la somma di tre integrali che dobbiamo esaminare:

$$\frac{d\phi}{d\alpha}(0) = I_1 + I_2 + I_3$$

dove  $I_1, I_2, I_3$  sono i tre integrali nell'ordine in cui compaiono nello sviluppo precedente.

Ora dobbiamo far scomparire le derivate delle variazioni di  $f_k$ , rispetto al tempo e alle coordinate, in  $I_2, I_3$ .

Tenendo conto che il dominio spaziale  $\mathcal{D}$  non dipende dal tempo, possiamo scambiare l'ordine di integrazione in  $I_2$ , e integrare per parti rispetto al tempo, ottenendo:

$$I_2 = \left[ \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \delta f_k dV \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{\mathcal{D}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \right] \delta f_k dV dt$$

Ed essendo nulle le variazioni in  $t_1$  e  $t_2$ , rimane:

$$I_2 = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} \right] \delta f_k dV dt \quad (19)$$

dove si è nuovamente scambiato l'ordine di integrazione nell'ultimo integrale. Per quanto riguarda  $I_3$ , lo riscriviamo mettendo in evidenza la derivata del prodotto:

$$I_3 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_I} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_k} \delta f_{k,I} \right] dV dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_I} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} \right] \delta f_k dV dt$$

Ora possiamo applicare il teorema di Gauss all'integrale di volume che contiene la divergenza, trasformandolo nell'integrale del flusso normale attraverso la superficie di frontiera del dominio  $\mathcal{D}$ :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_I} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} \delta f_k \right] dV = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} \delta f_{k,I} n_I dV$$

dove  $(n_I)$  è il vettore normale alla frontiera del dominio  $\mathcal{D}$ . Ma quest'ultimo integrale è **nullo**, perchè le variazioni sono supposte nulle sulla frontiera del dominio spaziale  $\mathcal{D}$ .

Dunque in  $I_3$  rimane:

$$I_3 = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_I} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} \right] \delta f_k dV dt \quad (20)$$

Combinando finalmente  $I_1$  con i risultati (19) e (20), ottenuti per  $I_2$  e  $I_3$  otteniamo le condizioni di stazionarietà del funzionale:

$$\frac{d\phi}{d\alpha}(0) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} \left[ \frac{\partial F}{\partial f_k} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} - \frac{\partial}{\partial x_I} \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} \right] \delta f_k dV dt = 0$$

Data l'arbitrarietà delle variazioni  $\delta f_k$  l'integrale può annullarsi se e solo se è nulla la funzione integranda,

e in particolare il termini entro parentesi quadra:

$$\frac{\partial F}{\partial f_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{f}_k} - \frac{\partial}{\partial x_I} \frac{\partial F}{\partial f_{k,I}} = 0 \quad (21)$$

Questa forma delle *equazioni di Eulero* sarà utilizzata in relazione alla dinamica lagrangiana e hamiltoniana dei *sistemi olonomi continui* ad un numero *infinito* di gradi di libertà come i campi elettromagnetici, o di altra natura.

- E' utile osservare come sia nel caso di funzioni  $f_h$  dipendenti solo dal tempo, come nel caso di funzioni dipendenti anche dalle coordinate spaziali,

operatore variazionale  $\delta$  si comporta come un *operatore differenziale* che agisce solo sulle funzioni  $f_h$  e le loro derivate (non sulle variabili indipendenti  $t, x_I$ )

per cui, dal punto di vista *operativo* la variazione di un funzionale si può calcolare direttamente agendo con  $\delta$  e scambiando l'operazione di variazione con quella di integrale e di derivata rispetto al tempo o alle coordinate spaziali.

---

Passiamo ora ad applicare alla meccanica i metodi variazionali che abbiamo finora esaminato dal punto di vista analitico.

# Applicazioni del calcolo variazionale alla meccanica analitica

---

## Principio di Hamilton

---

### Prima formulazione

Consideriamo un sistema olonoma a  $N$  gradi di libertà, governato da una lagrangiana  $\mathcal{L}(q_h, \dot{q}_h, t)$  e definiamo il funzionale dei parametri lagrangiani:

$$\mathcal{S}[q_h] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_h(t), \dot{q}_h(t), t) dt \quad (22)$$

al quale si dà il nome di *integrale d'azione*.

## Principio di Hamilton

Durante il moto di un sistema lagrangiano il funzionale dell'integrale d'azione è stazionario

Spesso si denomina il principio di Hamilton anche come

*principio di minima azione*, formulandolo nel modo seguente:

Durante il moto l'integrale d'azione è minimo

sottintendendo che si tratta di un minimo relativo proprio.

Per questo occorre che l'intervallo di integrazione sia abbastanza piccolo, perchè non si tratta di un minimo assoluto.

In generale, comunque, la *condizione di stazionarietà* è sufficiente per dedurre le equazioni del moto del sistema.

---

Ora il funzionale  $\mathcal{S}[q_h]$  ha la struttura definita dalla (10)

e perciò risulta essere *stazionario*

se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Eulero (15)

che in questo caso vengono a coincidere con le

*equazioni del moto di Lagrange:*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \quad (23)$$

Può essere istruttivo fare anche la *verifica* diretta del risultato, mediante la *regola operativa* precedentemente indicata, che consente di utilizzare l'operatore di variazione  $\delta$  come un qualsiasi *operatore differenziale* che commuta con gli integrali e le derivate rispetto al tempo e alle coordinate. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{S}[q_h] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_h(t), \dot{q}_h(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(q_h(t), \dot{q}_h(t), t) dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h \right] dt = \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right] \delta q_h dt + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \delta q_h \right]_{t_1}^{t_2} = 0
 \end{aligned}$$

Tenendo conto che le variazioni sono nulle agli estremi dell'intervallo d'integrazione, segue:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right] \delta q_h dt = 0$$

E quindi le equazioni di Lagrange (23).

---

Uno dei vantaggi e degli aspetti più eleganti della formulazione variazionale risiede nel fatto che con un unico principio, come *quello di Hamilton*, è possibile dedurre sia le equazioni di Lagrange che quelle di Hamilton, per i sistemi meccanici come per le teorie di campo; dunque un vasto settore delle leggi della fisica.

## Seconda formulazione

La seconda formulazione del principio di Hamilton *definisce*

*l'integrale d'azione* in termini delle *variabili hamiltoniane*  $q_h, p_h$

anzichè di quelle *lagrangiane*  $q_h, \dot{q}_h$

esprimendo la *lagrangiana* in funzione dell'*hamiltoniana*

tenendo conto della trasformazione di *Legendre*

che lega le due funzioni:

$$\mathcal{L} = \dot{q}_h p_h - \mathcal{H} \quad (24)$$

In questo caso il funzionale dell'integrale d'azione  $\mathcal{S}[q_h, p_h]$  è espresso in termini di un *numero doppio di funzioni* e le *variazioni* si fanno *rispetto alle variabili canoniche*  $q_h, p_h$ :

$$\mathcal{S}[q_h, p_h] = \int_{t_1}^{t_2} [\dot{q}_h p_h - \mathcal{H}(q_h, p_h, t)] dt \quad (25)$$

Applicando il **principio di Hamilton**, annulliamo la variazione del funzionale (25) e scriviamo le **equazioni di Eulero** (15) per la funzione:

$$F(q_h, p_h, \dot{q}_h, t) = \dot{q}_h p_h - \mathcal{H}(q_h, p_h, t) \quad (26)$$

Abbiamo allora:

$$\frac{\partial F}{\partial q_h} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_h} = p_h, \quad \frac{\partial F}{\partial p_h} = \dot{q}_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_h} = 0$$

si hanno le *equazioni di Eulero* seguenti:

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_k} = 0$$

---

$$\frac{\partial F}{\partial q_h} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_h} = p_h, \quad \frac{\partial F}{\partial p_h} = \dot{q}_h - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_h} = 0$$

---

Quindi:

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}, \quad \dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \quad (27)$$

che sono le *equazioni di Hamilton* o *equazioni canoniche*.

## Determinazione della traiettoria: principio di Maupertuis

Consideriamo ora un sistema hamiltoniano

per il quale l'hamiltoniana *non dipende esplicitamente dal tempo*

In tal caso  $\mathcal{H}$ , come abbiamo visto nel capitolo sulle equazioni canoniche, è un integrale primo del moto, il cui valore costante denotiamo con  $E$ :

$$\mathcal{H}(q_h, p_h) = E \quad (28)$$

Di conseguenza l'integrale d'azione (25) si può riscrivere, introducendovi la (28):

$$\mathcal{S}[q_h, p_h] = \int_{t_1}^{t_2} [p_h \dot{q}_h - E] dt = \int_{t_1}^{t_2} p_h \dot{q}_h dt - E \int_{t_1}^{t_2} dt$$

Tenendo conto che  $E$  è costante, abbiamo:

$$\mathcal{S}[q_h, p_h] = \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_h p_h dt - E (t_2 - t_1) \quad (29)$$

E' allora abbastanza naturale prendere in considerazione il funzionale:

$$\hat{\mathcal{S}}[q_h, p_h] = \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_h p_h dt \quad (30)$$

che viene denominato *azione ridotta* e domandarsi se si può compiere una variazione delle variabili hamiltoniane in modo tale da ottenere una variazione nulla dell'azione ridotta durante il moto:

$$\hat{\delta} \hat{\mathcal{S}}[q_h, p_h] = 0 \quad (31)$$

A questo scopo occorre che

→ la *variazione*, il cui operatore è stato denotato con  $\hat{\delta}$   
per distinguerlo dall'operatore usuale di *variazione isocrona*  $\delta$ ,

abbia le seguenti proprietà:

**i)** durante la variazione *l'energia* deve mantenersi *costante* e uguale al valore  $E$  dell'integrale primo dell'hamiltoniana (variazione *isoenergetica*);

**ii)** le variazioni possono avere *durata tempprale* diversa le une dalle altre, in modo che sia soddisfatta la condizione che garantisce la validità della (31), essendo:

$$\delta \mathcal{S}[q_h, p_h] + E \delta (t_2 - t_1) = 0 \quad (32)$$

La seconda condizione permette di sostituire alla richiesta di percorrere tutte le curve di controllo nello stesso intervallo di tempo  $t_2 - t_1$  con la prima condizione che tutte le curve vengano percorse con la stessa energia  $E$ .

Di conseguenza, con questo tipo di variazione isoenergetica non è più stazionario il funzionale dell'azione usuale, ma lo è quello dell'azione ridotta.

---

- il vantaggio di questo risultato consiste nel fatto che in quest'ultimo funzionale si può eliminare il tempo, ottenendo una condizione puramente geometrica per la traiettoria del moto nello spazio delle configurazioni.

---

Infatti, tenendo conto che:

$$dq_h = \dot{q}_h dt \quad (33)$$

possiamo riscrivere:

$$\hat{\mathcal{S}}[q_h, p_h] = \int_{\gamma} p_h dq_h \quad (34)$$

dove la curva di controllo  $\gamma$

può essere parametrizzata mediante una *parametrizzazione*  
che *non coinvolge il tempo*.

Un parametrizzazione comoda, per un sistema

— a *vincoli indipendenti dal tempo*

— e con un *potenziale ordinario*

si ottiene scrivendo l'integrale primo dell'energia:

$$T + V = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + V(q_h) = E$$

da cui si ricava, tenendo conto della (33):

$$dt = \frac{d\rho}{\sqrt{2T}} = \frac{d\rho}{\sqrt{2[E - V(q_h)]}} \quad (35)$$

L'elemento  $d\rho$  è definito dalla forma quadratica fondamentale:

$$(d\rho)^2 = a_{hk}dq_hdq_k \quad (36)$$

nella quale la matrice dell'energia cinetica gioca il ruolo di tensore metrico nello spazio delle configurazioni. In questo modo il principio di stazionarietà dell'azione ridotta viene espresso indipendentemente dal tempo, nella forma puramente geometrica:

$$\hat{\delta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{p_h \dot{q}_h}{\sqrt{2T}} d\rho = \hat{\delta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{2T} d\rho = \hat{\delta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{2[E - V(q_h)]} d\rho = 0 \quad (37)$$

che prende il nome di *principio di Maupertuis*, essendo  $p_h \dot{q}_h = 2T$ .

Si noti come per una particella singola di massa  $m$  si ha:

$$a_{hk} = m \delta_{hk}$$

la (37) si scrive semplicemente:

$$\hat{\delta} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(q_h)]} ds = 0 \quad (38)$$

essendo  $ds$  l'ascissa curvilinea sulla curva  $\gamma$ . La (38) rappresenta la condizione variazionale alla quale deve soddisfare la traiettoria della particella durante il moto.

- Evidentemente, in assenza di forze,  $V = \text{costante}$  e la traiettoria è rettilinea, dovendo avere lunghezza minima nello spazio euclideo:

$$\hat{\delta} \int_{s_1}^{s_2} ds = 0$$

Si osservi come questo risultato si generalizza ad un sistema ad  $N$  gradi di libertà non soggetto a forze: infatti in questo caso la condizione variazionale (37) diviene:

$$\hat{\delta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho = 0$$

cioè la condizione che la lunghezza dell'arco di curva, misurato secondo la metrica  $a_{hk}$ , sia stazionaria (minima tra due punti vicini), ovvero che la traiettoria sia una *geodetica* dello spazio delle configurazioni.

---

## Principio di Hamilton per le teorie di campo

---

### Prima formulazione

Consideriamo il seguente funzionale che supponiamo rappresentare un integrale d'azione per un *campo*  $\psi_h(t, x_J)$  *continuo* a *infiniti gradi di libertà*, dove  $h$  rappresenta qui un eventuale indice che caratterizza il campo in qualche spazio:

$$\mathcal{S}[\psi_h] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{D}} L(\psi_h(t, x_J), \dot{\psi}_h(t, x_J), \psi_{h,J}, t, x_J) dV dt \quad (39)$$

La funzione  $L$  così definita viene detta *densità di lagrangiana* del campo  $\psi_h$ .

Diremo che il campo  $\psi_h$

ammette una *descrizione lagrangiana*

se le equazioni che lo governano sono le *equazioni di Eulero* che rendono stazionario l'integrale d'azione (39).

Ora le equazioni di Eulero (21) in questo caso sono date da:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_h} + \frac{\partial}{\partial x_I} \frac{\partial L}{\partial \psi_{h,I}} - \frac{\partial L}{\partial \psi_h} = 0 \quad (40)$$

Queste equazioni, che generalizzano le equazioni di Lagrange ai sistemi continui prendono in il nome di *equazioni di Eulero-Lagrange*.

- Si osservi che, in generale, i continui materiali (solidi, fluidi) non ammettono una formulazione lagrangiana.

## Esempi

1 - Consideriamo un *campo scalare*  $\psi$  governato dalla densità di lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c^2} \dot{\psi}^2 - \psi_{,I} \psi_{,I} \right) - \frac{1}{2} \mu \psi^2 \quad (41)$$

Calcoliamo le derivate:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{c^2} \dot{\psi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi_{,I}} = -\psi_{,I}, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = -\mu \psi$$

Otteniamo le *equazioni di Eulero-Lagrange* seguenti, che rappresentano le equazioni di campo:

$$\psi_{,I,I} - \frac{1}{c^2} \ddot{\psi} = \mu \psi$$

Ovvero:

$$\underline{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mu \psi \quad (42)$$

che è l'*equazione di Klein-Gordon*.

Per  $\mu = 0$  si ottiene l'usuale equazione delle onde lineari di D'Alembert.

Anche il *campo elettromagnetico* si può descrivere mediante una densità di lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{B}}^2 - \underline{\mathbf{E}}^2) + \rho \phi - \frac{1}{c} \underline{\mathbf{j}} \times \underline{\mathbf{A}} \quad (43)$$

mediante la variazione dei campi  $\phi$  e  $\underline{\mathbf{A}}$  e tenendo conto delle relazioni che legano i potenziali ai campi elettrico e magnetico.

## Seconda formulazione

La *seconda formulazione* del **principio di Hamilton**, per i sistemi continui, considera

→ *l'integrale d'azione* in termini

→ del **campo**  $\psi_h$

→ e del suo **coniugato**, che definiamo:

$$\pi_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_h} \quad (44)$$

Seguendo un procedimento analogo a quello che si utilizza per i sistemi hamiltoniani ad un numero finito di gradi di libertà,

si introduce la *trasformata di Legendre* della densità di lagrangiana:

$$H = \dot{\psi}_h \pi_h - L \quad (45)$$

che prende il nome di **densità di hamiltoniana** e

si interpreta come **densità di energia** del campo.

---

L'integrale d'azione viene allora scritto nella forma hamiltoniana come:

$$\mathcal{S}[\psi_h, \pi_h] = \int_{t_1}^{t_2} [\dot{\psi}_h \pi_h - H(\psi_h, \pi_h, \psi_{h,J}, t, x_J)] dV dt \quad (46)$$

Applicando il *principio di Hamilton*, annulliamo la variazione del funzionale (46) e scriviamo le **equazioni di Eulero-Lagrange** (21) per la funzione:

$$F(\psi_h, \pi_h, \dot{\psi}_h, \psi_{h,J}, t) = \dot{\psi}_h \pi_h - H(\psi_h, \pi_h, \psi_{h,J}, t, x_J) \quad (47)$$

Calcolando le derivate:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_h} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_h}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{\psi}_h} = \pi_h, \quad \frac{\partial F}{\partial \psi_{h,I}} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_{h,I}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \pi_h} = \dot{\psi}_h - \frac{\partial H}{\partial \pi_h}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_h} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \pi_{h,I}} = 0$$

si hanno le equazioni di Eulero-Lagrange seguenti:

$$\dot{\pi}_h - \frac{\partial}{\partial x_I} \frac{\partial H}{\partial \psi_{h,I}} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_h}, \quad \dot{\psi}_h = \frac{\partial H}{\partial \pi_h} \quad (48)$$

che rappresentano le *equazioni hamiltoniane* per i sistemi continui e i campi.

## Esempio

Riprendendo lo stesso esempio visto nella prima formulazione abbiamo che, per il *campo scalare* governato dall'*equazione di Klein-Gordon*,

il *campo coniugato* è dato da:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{c^2} \dot{\psi}$$

Quindi la *densità di hamiltoniana* risulta:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c^2} \dot{\psi}^2 + \psi_{,I} \psi_{,I} \right) + \frac{1}{2} \mu \psi^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c^2} \dot{\psi}^2 + (\nabla \psi)^2 + \mu \psi^2 \right]$$

## Leggi di conservazione

Abbiamo visto in precedenza, trattando delle

*coordinate cicliche* o *ignorabili*,

come ad ognuna di tali coordinate

— sia nella formulazione **lagrangiana**

— come in quella **hamiltoniana**

corrisponde un *integrale primo* del moto

che si identifica con il *momento canonico* corrispondente.

---

Si ha dunque la **legge di conservazione di quel momento**.

Osserviamo che tale risultato vale anche per i sistemi continui e i campi

in quanto se una coordinata del campo, ad esempio  $\psi_{\bar{h}}$  è *ciclica* per la *densità di lagrangiana*, si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{\bar{h}}} = 0$$

e quindi la corrispondente **equazione di Eulero-Lagrange** diviene

la legge di conservazione:

$$\frac{\partial \pi_{\bar{h}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_I} \frac{\partial L}{\partial \psi_{\bar{h},I}} = 0$$

dove  $\pi_{\bar{h}}$  rappresenta la *densità della grandezza che si conserva*

che vale:

$$P_{\bar{h}} = \int_{\mathcal{D}} p_{\bar{h}} dV \quad (49)$$

e  $\frac{\partial L}{\partial \psi_{\bar{h},I}}$  è la densità del flusso della grandezza conservata, flusso che è pari a:

$$\Phi_{\bar{h}I} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial L}{\partial \psi_{\bar{h},I}} dV \quad (50)$$

Si noti come nelle equazioni di Eulero-Lagrange il termine a secondo membro, quando non è nullo, rappresenta la “sorgente” che produce (o dissipa) il momento definito dalla (49).

## Teorema di Noether

Il legame tra *integrali primi* del moto e *coordinate cicliche* costituisce un caso particolare di un risultato generale che si basa su *considerazioni di simmetria*, cioè su

criteri di *invarianza* della *lagrangiana* rispetto a un *gruppo di trasformazioni*  
noto come *teorema di Noether*.

Ad ogni gruppo, ad un parametro, di trasformazioni biunivoche differenziabili (diffeomorfismi) nello spazio delle configurazioni, che lascia invariante una lagrangiana indipendente dal tempo, corrisponde un integrale primo del moto

---

## DIMOSTRAZIONE

---

E' data la lagrangiana che *non dipende* esplicitamente dal tempo:

$$\mathcal{L}(q_h, \dot{q}_h)$$

Consideriamo una legge di trasformazione biunivoca delle coordinate lagrangiane:

$$q_h \longleftrightarrow q'_h(\lambda)$$

che lascia invariata la lagrangiana. Si suppone che il gruppo di trasformazioni sia caratterizzato da un solo parametro  $\lambda$ .

Ciò significa che:

$$dq'_h = u_h d\lambda \quad \iff \quad u_h = \frac{\partial q'_h}{\partial \lambda} \quad (51)$$

essendo  $\mathbf{u} \equiv (u_h)$  per definizione il versore del differenziale di  $\mathbf{q}' \equiv (q'_h)$ . Ora se  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto al gruppo di trasformazioni ad un solo parametro in questione, deve risultare, dopo la trasformazione:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

Ma:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_h} \frac{\partial q'_h}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_h} \frac{\partial q'_h}{\partial \lambda} \quad (52)$$

Ora dalla (51) si ha:

$$u_h = \frac{\partial q'_h}{\partial \lambda}, \quad \dot{u}_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_h}{\partial \lambda} = \frac{\partial \dot{q}'_h}{\partial \lambda}$$

Quindi sostituendo nella (52) risulta:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_h} \dot{u}_h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_h} u_h \quad (53)$$

Se la lagrangiana è invariata continuano a valere le equazioni del moto di Lagrange anche rispetto ai nuovi parametri lagrangiani e possiamo esprimere:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_h}$$

Di conseguenza risulta finalmente nella (53):

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_h} \dot{u}_h + u_h \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_h} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_h} u_h \right)$$

Dunque resta individuato l'integrale primo del moto:

$$I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'_h} u_h \quad (54)$$

- Il teorema si estende anche a lagrangiane dipendenti esplicitamente dal tempo, lavorando nello spazio degli eventi e scegliendo una variabile evolutiva  $\tau$  diversa da  $t$ , in modo da considerare  $q_0 = t$  come un parametro che ha una derivata non costante rispetto alla variabile evolutiva.

- Si noti che nel formalismo dello spazio degli eventi una lagrangiana che non dipende esplicitamente dal tempo si può considerare ciclica rispetto a  $q_0$ : in tale caso il suo momento coniugato  $p_0$ , che risulta essere l'hamiltoniana, è un integrale primo del moto.

Come casi particolari notevoli si ha che per la lagrangiana che governa il moto di una particella:

- l'invarianza per traslazione di una coordinata cartesiana comporta la conservazione della componente della quantità di moto nella direzione della traslazione;

- l'invarianza per rotazione attorno ad un asse fisso comporta la conservazione del momento della quantità di moto nella direzione dell'asse fisso.

\* \* \*