

# Equazioni differenziali ordinarie - Analisi qualitativa

---

## Sistemi autonomi non conservativi

Nel caso di sistemi autonomi:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

non conservativi

→ *non disponiamo* dell'integrale primo dell'energia

e si possono presentare varie situazioni.

---

- il sistema delle equazioni del moto è *integrabile*, come accade, per esempio quando le equazioni sono lineari. In questo caso le traiettorie di fase si ottengono per integrazione diretta delle equazioni del moto

---

- l'equazione delle curve integrali è *integrabile*: in questo caso le curve integrali si ottengono integrando questa equazione

---

- è possibile trovare qualche altro *integrale primo del moto*, diverso dall'energia; in questo caso le curve di livello dell'integrale primo sono le curve integrali del sistema

---

- nessuna delle situazioni precedenti si verifica

---

→ *Il primo caso* si verifica, *ad esempio*, quando si tratta il *moto armonico* in presenza di *resistenza viscosa*.

In questa situazione sappiamo integrare il moto e quindi disponiamo delle equazioni parametriche delle traiettorie di fase. L'integrale generale del moto è del tipo:

$$x = A e^{-pt} \cos(\hat{\omega}t + \gamma), \quad \hat{\omega} = \sqrt{\omega^2 - p^2}$$

Da cui segue:

$$y = -px - \hat{\omega} A e^{-pt} \sin(\hat{\omega}t + \gamma)$$

Le equazioni parametriche rappresentano una traiettoria di fase dall'andamento spiraliforme, che tende asintoticamente alla posizione di equilibrio stabile dell'oscillatore. Una rappresentazione significativa della

traiettoria di fase si ottiene eliminando parzialmente il parametro  $t$ , esprimendo:

$$\cos(\hat{\omega} t + \gamma) = \frac{x}{A e^{-pt}}, \quad \text{sen}(\hat{\omega} t + \gamma) = -\frac{y + px}{\hat{\omega} A e^{-pt}}$$

Da cui quadrando e sommando otteniamo:

$$\frac{x^2}{A^2 e^{-2pt}} + \frac{(y + px)^2}{\hat{\omega}^2 A^2 e^{-2pt}} = 1$$

Equazione che ricorda quella di un'ellisse di centro nell'origine e assi non coincidenti con gli assi cartesiani; si nota però che a denominatore sono presenti delle funzioni del tempo che hanno l'effetto di modificare istante per istante le lunghezze dei semiassi.

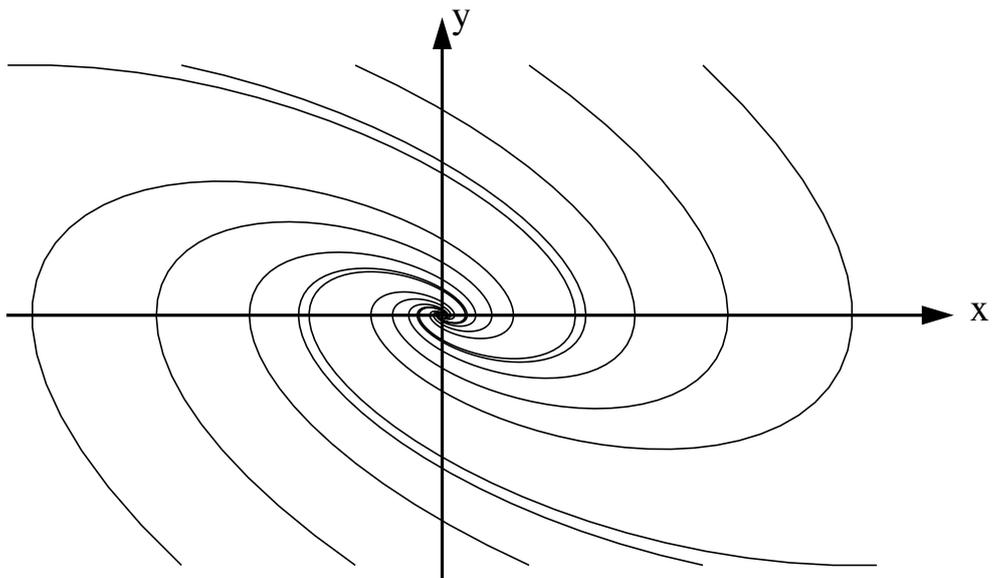


Fig. 1 - Traiettorie di fase del moto armonico in presenza di resistenza viscosa

→ Come *secondo esempio* consideriamo un caso in cui si integra facilmente l'*equazione delle curve integrali*, come accade quando si considera il *moto* di un corpo che si muove in presenza di una *resistenza idraulica*, al quale è stata impressa una *elevata velocità iniziale*, di modo che le altre forze sono trascurabili, almeno in un certo intervallo di tempo, rispetto alla resistenza del mezzo.

In questa situazione, schematizzando il corpo con un punto, l'equazione differenziale del moto si scrive:

$$m \ddot{x} = -h \dot{x}^2$$

E l'equazione delle curve integrali diviene semplicemente:

$$y' = -\frac{h}{m}y$$

Questa è un'equazione lineare e si integra subito, ottenendo:

$$y = y_0 e^{-\frac{h}{m}(x-x_0)}$$

Al variare delle condizioni iniziali del moto  $(x_0, y_0)$  si ottiene l'intera famiglia delle curve integrali.

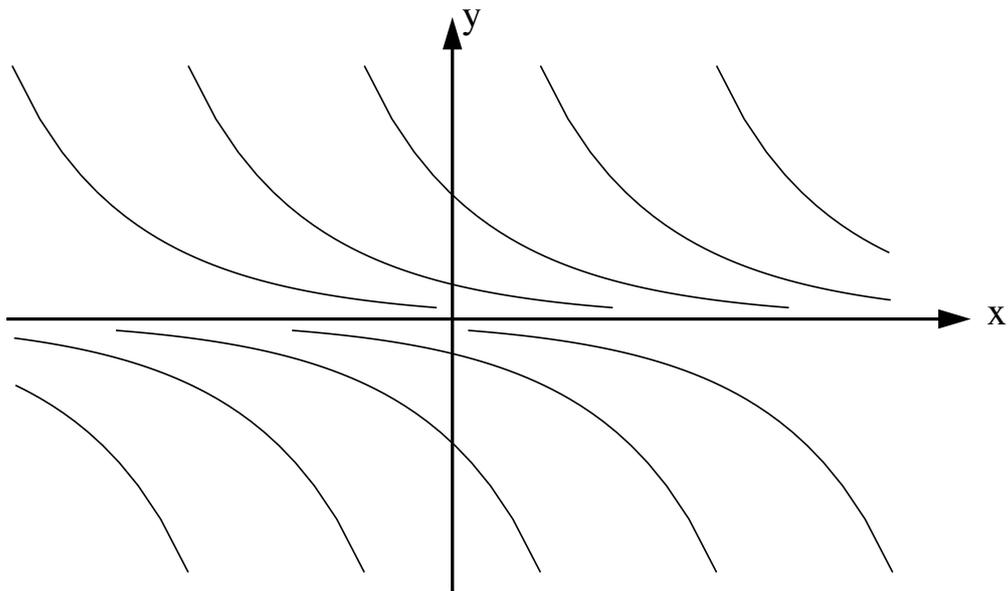


Fig. 2 - Traiettorie di fase del moto di un punto in presenza di resistenza idraulica

→ Come *terzo esempio* consideriamo

un punto soggetto ad una forza che somiglia a una *forza elastica elastica* ma,

in luogo della costante elastica, è presente una *funzione lineare della velocità*  $\alpha \dot{x}$ :

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} x = 0$$

L'equazione del moto si può riscrivere evidenziando l'esistenza di un integrale primo del moto:

$$\frac{d}{dt} \left( m \dot{x} + \frac{1}{2} \alpha x^2 \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m \dot{x} + \frac{1}{2} \alpha x^2 = C$$

Allora le curve di livello di questo integrale primo:

$$y = \frac{1}{m} \left( C - \frac{1}{2} \alpha x^2 \right)$$

rappresentano le curve integrali del sistema.

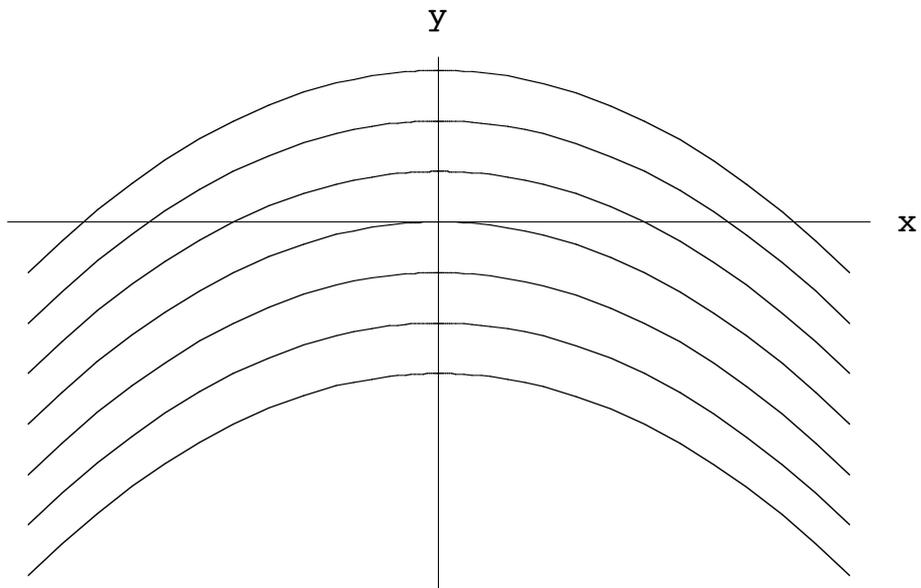


Fig. 3 - Curve di livello di un integrale primo diverso dall'energia meccanica

## Linearizzazione nell'intorno di un punto singolare

In molti problemi, però,

- non si sanno integrare
  - nè le equazioni del moto
  - nè l'equazione delle curve integrali
- nè si conoscono degli integrali primi del moto

In questi casi si può ricorrere ad un metodo di

- approssimazione del sistema differenziale *delle equazioni del moto*,
- linearizzandole nell'intorno di un punto di fase, per avere delle indicazioni sull'andamento delle traiettorie di fase in quell'intorno.

Consideriamo un sistema autonomo:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) \equiv \begin{pmatrix} y \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix} \quad (2)$$

in cui:

$$\mathbf{f} : A \longrightarrow R^2, \quad A \subseteq R^2$$

è supposta, al solito

*differenziale* e

*lipschitziana*, per garantire l'unicità della soluzione

Inoltre richiediamo che nel punto di fase  $\underline{\mathbf{u}}^* \in A$  la **matrice jacobiana** della  $\underline{\mathbf{f}}$  sia *non singolare*:

$$\det \underline{\mathbf{A}}^* \neq 0, \quad \underline{\mathbf{A}}^* \equiv \left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} (u_\ell^*) \right\| \quad (3)$$

Allora possiamo scrivere lo *sviluppo in serie di Taylor* della  $\underline{\mathbf{f}}$  nell'intorno di  $\underline{\mathbf{u}}^*$ :

$$f_i(u_\ell) = f_i(u_\ell^*) + \frac{\partial f_i}{\partial u_k} (u_\ell^*) (u_k - u_k^*) + R_i(2)$$

Ovvero in forma simbolica:

$$\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}^*) + \underline{\mathbf{A}}^* (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}^*) + \underline{\mathbf{R}}(2)$$

*Fino a che* il moto, e quindi *le traiettorie di fase*, si mantengono *in un intorno* di  $\underline{\mathbf{u}}^*$  di raggio  $\varepsilon$  opportunamente piccolo, si ha:

$$\|\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}^*\| < \varepsilon$$

e il resto della serie si può considerare *trascurabile* a meno di un errore dell'ordine di  $\varepsilon^2$

Grazie al fatto che la matrice è supposta *non singolare*, il termine del *primo ordine* è sempre *non nullo* per  $\underline{\mathbf{u}} \neq \underline{\mathbf{u}}^*$ .

---

Notiamo che questa circostanza può essere *verificata*  
*in ogni istante di tempo* successivo a quello iniziale solo quando  $\underline{\mathbf{u}}^*$  è un punto di *equilibrio stabile*,

in quanto in questo caso, se la condizione iniziale viene assegnata in un intorno di  $\underline{\mathbf{u}}^*$ , il moto e quindi le traiettorie di fase non escono dall'intorno.

---

Se invece  $\underline{\mathbf{u}}^*$  *non è* un punto di equilibrio *stabile*, l'approssimazione sarà verificata solamente nei limiti di un *opportuno intervallo di tempo*, entro il quale le traiettorie si mantengono nell'intorno.

Successivamente i termini di ordine superiore al primo divengono gradualmente più elevati e l'approssimazione non è più valida.

---

Nell'approssimazione lineare, allora il sistema delle equazioni del moto viene scritto nella forma:

$$\dot{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}^*) + \underline{\mathbf{A}}^* (\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}^*)$$

Normalmente i punti di fase nell'intorno dei quali è interessante studiare il

comportamento delle traiettorie di fase, sono punti singolari e in particolare i **punti di equilibrio** del sistema.

Ma in un punto di equilibrio si ha:

$$\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}^*) = \underline{\mathbf{0}}$$

Quindi il sistema delle eqazioni linearizzate si riscrive:

$$\dot{\underline{\mathbf{z}}} = \underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{z}}, \quad \underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}^* \quad (4)$$

dove, per comodità sono state introdotte le *coordinate relative* al punto di equilibrio.

## Classificazione dei punti singolari

→ Per *classificare*, secondo la loro *topologia*:

- i vari tipi di *punti singolari* che possono presentarsi in un sistema linearizzato
- ed esaminare l'*andamento delle traiettorie di fase*
- e quindi la *stabilità dell'equilibrio*

occorre integrare il sistema lineare (4).

Le soluzioni del sistema forniscono le equazioni parametriche delle traiettorie di fase.

## Cambio di variabili

Per facilitare l'*eliminazione del parametro  $t$*

e ottenere delle *equazioni cartesiane* delle *traiettorie di fase*

più semplici e più facilmente interpretabili, conviene effettuare un *cambio di variabili* prima di integrare il sistema (4).

L'ideale è cercare di *diagonalizzare*, quando è possibile, *la matrice*  $\mathbf{A}^*$ , perchè questo equivale ad ottenere delle *equazioni disaccoppiate*.

A questo scopo consideriamo il problema agli autovalori:

$$(\underline{\mathbf{A}}^* - \lambda \underline{\mathbf{I}}) \underline{\mathbf{d}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Gli autovalori sono dati dall'equazione caratteristica:

$$\det(\underline{\mathbf{A}}^* - \lambda \underline{\mathbf{I}}) = 0$$

che è, in questo caso, un'equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - 2p\lambda + q = 0 \tag{5}$$

nella quale:

$$2p = \text{tr}(\underline{\mathbf{A}}^*), \quad q = \det(\underline{\mathbf{A}}^*)$$

Data la struttura (2) del sistema differenziale

→ la matrice  $\underline{A}^*$  *non è* generalmente *simmetrica* avendo la struttura seguente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^*, 0) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x^*, 0) \end{pmatrix}$$

essendo  $\underline{u}^* \equiv (x^*, 0)$  il punto di equilibrio considerato.

Gli autovalori non sono necessariamente reali, diversamente da quanto accade per le matrici simmetriche.

Dovremo esaminare, perciò, le diverse possibilità che possono presentarsi in dipendenza del segno del *discriminante*  $\frac{\Delta}{4} = p^2 - q$  dell'equazione caratteristica (5) del sistema.

## 1 - autovalori reali distinti: $p^2 - q > 0$

Gli autovalori sono dati da:

$$\lambda^{(1)} = p - \sqrt{p^2 - q}, \quad \lambda^{(2)} = p + \sqrt{p^2 - q}$$

In corrispondenza dei due autovalori distinti, il problema agli autovalori ammette sempre due autovettori linearmente indipendenti  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ , i quali non sono generalmente ortogonali tra loro.

La *trasformazione di similitudine* ottenuta mediante la matrice  $\mathcal{S}$  di elementi:

$$S_{ik} = d_i^{(k)}$$

porta la matrice  $\underline{\hat{A}}$  nella forma diagonale:

$$\underline{\hat{A}}^* = \underline{\mathcal{S}}^{-1} \underline{\hat{A}}^* \underline{\mathcal{S}}$$

e trasforma i vettori  $\underline{u}$  secondo la legge:

$$\underline{z} = \underline{\mathcal{S}} \underline{\hat{z}}$$

Il sistema differenziale per i nuovi stati  $\underline{\hat{z}} \equiv (\xi, \eta)$  diviene allora:

$$\underline{\mathcal{S}} \dot{\underline{\hat{z}}} = \underline{\hat{A}}^* \underline{\mathcal{S}} \underline{\hat{z}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\underline{\hat{z}}} = \underline{\mathcal{S}}^{-1} \underline{\hat{A}}^* \underline{\mathcal{S}} \underline{\hat{z}}$$

E quindi:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \hat{\mathbf{A}}^* \hat{\mathbf{z}}$$

Ovvero, esplicitamente:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda^{(1)} \xi \\ \dot{\eta} = \lambda^{(2)} \eta \end{cases}$$

Le due equazioni sono disaccoppiate e l'integrale generale si scrive nella forma, comoda da gestire:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 e^{\lambda^{(1)} t} \\ \eta = \eta_0 e^{\lambda^{(2)} t} \end{cases} \quad (6)$$

Queste rappresentano anche le *equazioni parametriche* delle *traiettorie di fase* nel nuovo sistema di coordinate.

Per  $\xi_0 = 0$  si ottiene come traiettoria di fase l'asse delle ordinate e per  $\eta_0 = 0$  si ottiene l'asse delle ascisse.

Per valori non nulli delle condizioni iniziali si procede all'eliminazione del parametro  $t$ , ricavando:

$$t = \log \left[ \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{\lambda(1)}} \right]$$

E quindi:

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{\lambda(2)}{\lambda(1)}}$$

In conclusione le traiettorie di fase hanno **equazione cartesiana**:

$$\eta = k \xi^\alpha, \quad \alpha = \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(1)}}, \quad k = \eta_0 \xi_0^{-\alpha} \quad (7)$$

---

La matrice, per ipotesi è non singolare e quindi gli autovalori sono entrambi non nulli, per cui si ha, in ogni caso:

$$0 < |\alpha| < +\infty$$

e inoltre

$$\alpha \neq 1$$

in quanto gli autovalori devono essere distinti.

Nodi:  $\alpha > 0$

---

Le traiettorie presentano un *andamento* simile a quello *parabolico* e le singolarità si dicono **nodi**.

Si hanno le *due possibilità*:

---

**i)  $0 < \alpha < 1$**

---

Le traiettorie di fase, che passano tutte per l'origine, hanno tangente comune verticale.

Infatti:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \alpha k \xi^{\alpha-1} = \frac{\alpha k}{\xi^{|\alpha-1|}}$$

Ed essendo,  $\alpha - 1 < 0$  segue:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{d\eta}{d\xi} \right| = +\infty$$

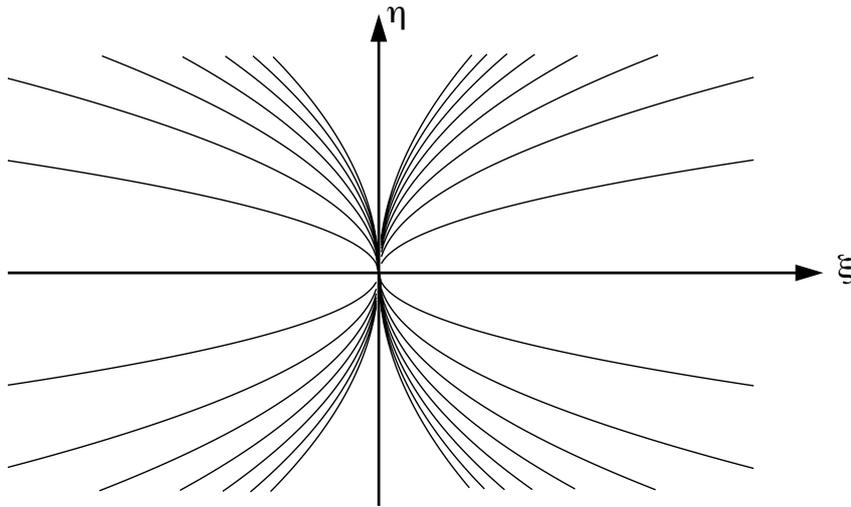


Fig. 4 - Nodi - Autovalori reali distinti: caso:  $0 < \alpha < 1$

→ *Stabilità*

Occorre determinare il *verso di percorrenza* delle traiettorie, facendo attenzione che, *dopo la trasformazione*

- 
- *l'ordinata*  $\eta$  non rappresenta più la *derivata temporale* dell'ascissa  $\xi$ ,
  - e quindi non determina il verso di percorrenza.

Bisogna tornare alle equazioni parametriche.

---

La *positività* di  $\alpha$  impone agli *autovalori* di avere *segno concorde*:  
allora o sono *entrambi positivi* o *entrambi negativi*.

— Nel primo caso  $|\xi|$  ed  $|\eta|$  sono *esponenziali crescenti* e il moto tende ad allontanarsi dall'origine e si ha, quindi, *instabilità*;

— nel secondo caso gli *esponenziali* sono *decrementi* e si ha *stabilità* asintotica.

---

Per la *regola dei segni di Cartesio*, nell'equazione caratteristica,

- *due radici positive (instabilità)* corrispondono a *due variazioni* di segno dei coefficienti,
  - e *due radici negative (stabilità)* a *due permanenze*.
-

Ma il *determinante* è positivo in ogni caso, dovendo essere  $\alpha > 0$

$$q = \lambda^{(1)} \lambda^{(2)} > 0$$

E quindi la stabilità è decisa dal *segno di*  $p$ .

$$\text{Si ha } \begin{cases} \textit{stabilità} \text{ per } & p < 0 \\ \text{e } \textit{instabilità} \text{ per } & p > 0 \end{cases}$$

La stabilità è *asintotica* come si vede considerando il limite per  $t \rightarrow +\infty$  nelle equazioni parametriche.

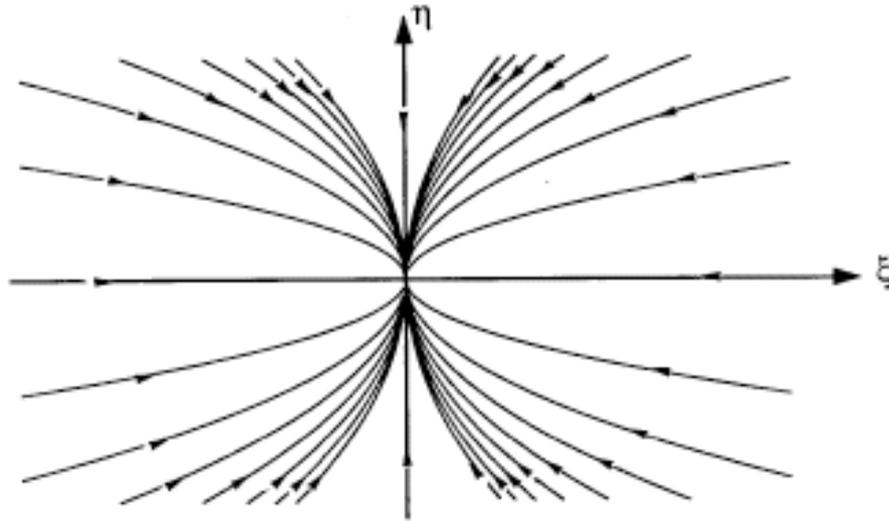


Fig. 5 - Nodo stabile - Caso:  $0 < \alpha < 1$

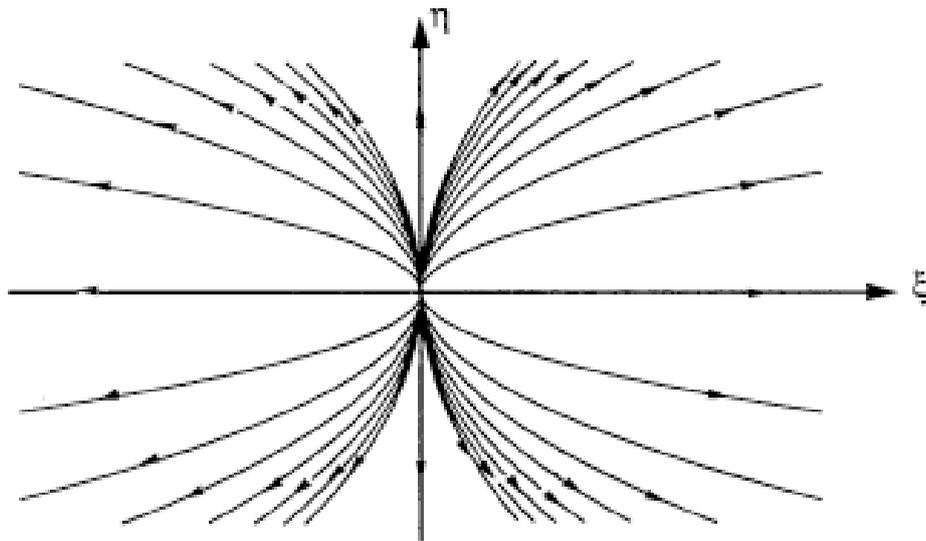


Fig. 6 - Nodo instabile - Caso:  $0 < \alpha < 1$

---

ii)  $\alpha > 1$

---

La struttura delle traiettorie è simile al caso precedente, ma la tangente nell'origine è *orizzontale*, in quanto  $\alpha - 1 > 0$  e quindi:  $\xi \rightarrow 0 \implies \frac{d\eta}{d\xi} \rightarrow 0$

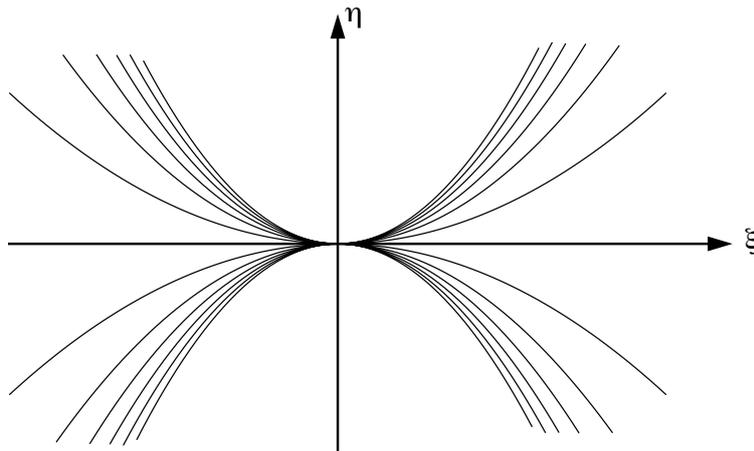


Fig. 7 - Nodi - Autovalori reali distinti: caso:  $\alpha > 1$

Anche la stabilità si determina allo stesso modo del caso precedente.

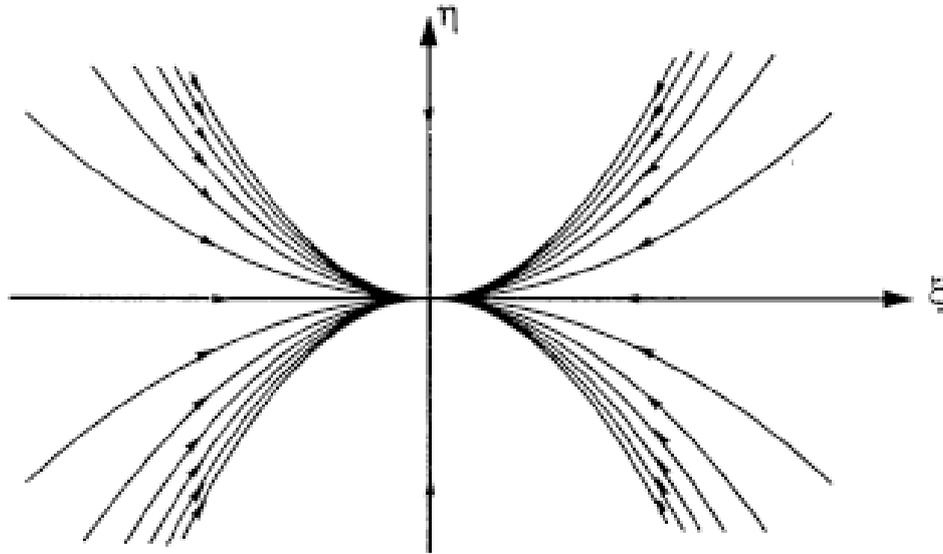


Fig. 8 - Nodo stabile - Caso:  $\alpha > 1$

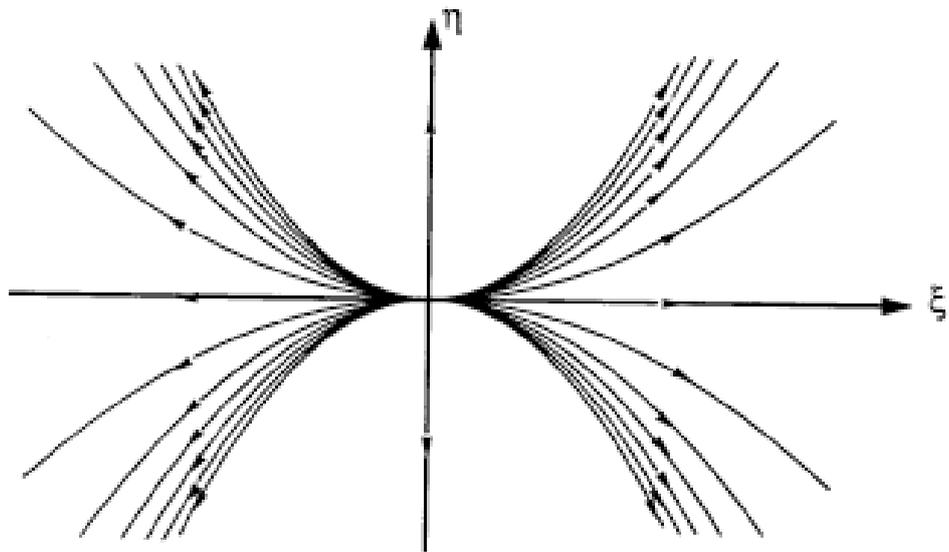


Fig. 9 - Nodo instabile - Caso:  $\alpha > 1$

Punti di sella:  $\alpha < 0$

---

Quando  $\alpha < 0$  i *segni* degli *autovalori* risultano *discordi* e si ha:

$$\alpha = -|\alpha|, \quad q = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)} < 0$$

L'equazione cartesiana delle traiettorie si può scrivere allora:

$$\eta \xi^{|\alpha|} = k$$

Le traiettorie presentano una struttura di tipo iperbolico.

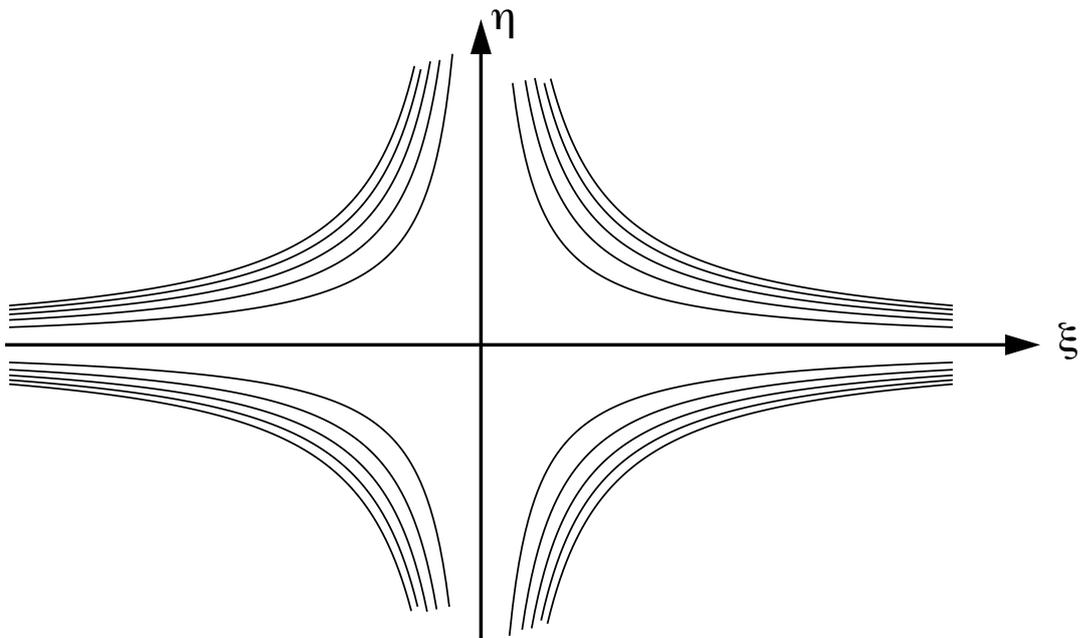


Fig. 10 - Punti di sella - Autovalori reali distinti: caso  $\alpha < 0$

I *segni* degli *autovalori* sono *discordi* e di conseguenza i punti di sella sono sempre *instabili*,  
come si vede esaminando le equazioni parametriche.

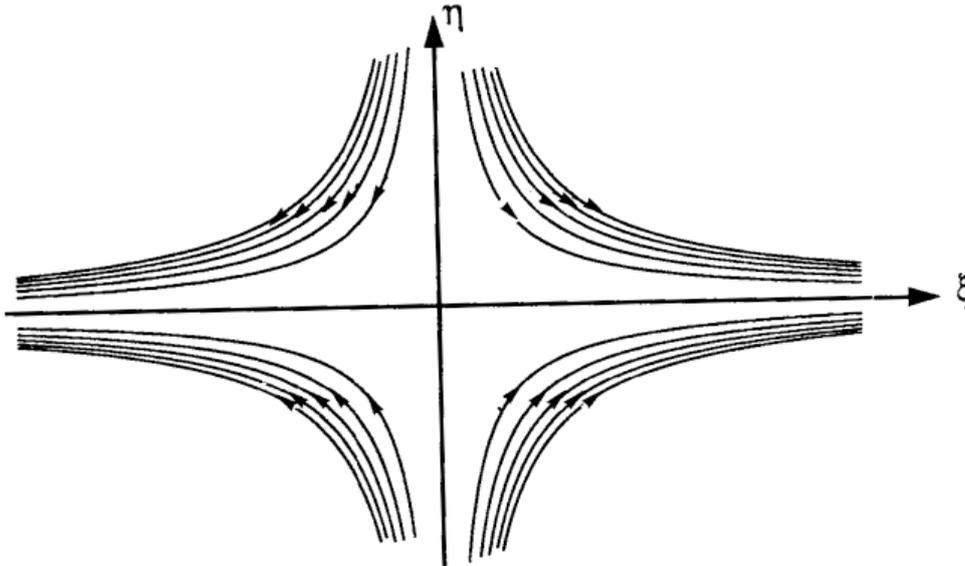


Fig. 11 - Punto di sella instabile - A

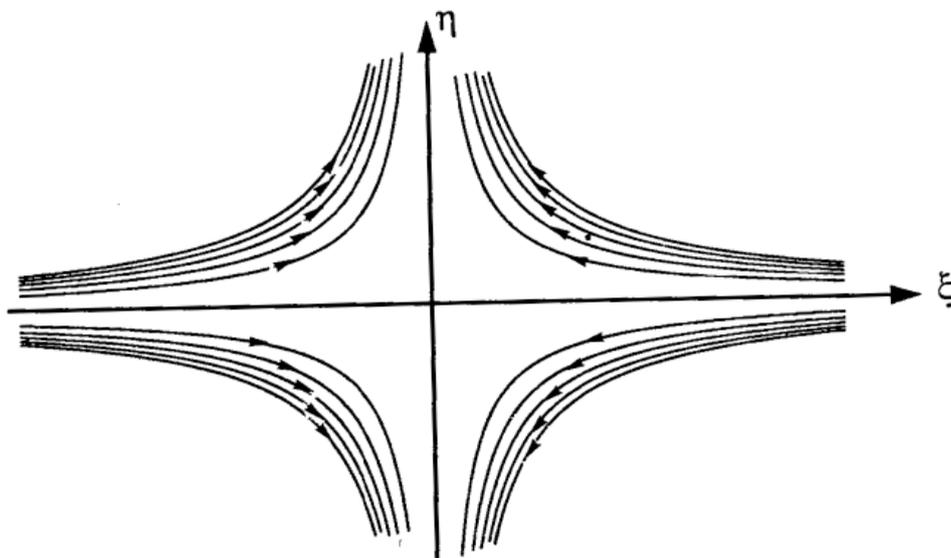


Fig. 12 - Punto di sella instabile - B

## 2 - autovalori reali coincidenti: $p^2 - q = 0$

Le singolarità che si ottengono in questo caso  
in cui gli autovalori sono dati da:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = p$$

sono chiamate *nodii degeneri*.

## Nodi degeneri

---

Quando gli autovalori sono coincidenti possono presentarsi **due situazioni**.

i)  $\mathbf{A}^*$  *diagonalizzabile*

In corrispondenza dei due autovalori reali coincidenti, esistono *due autovettori linearmente indipendenti*.

In questo caso  $\mathbf{A}^*$  è diagonalizzabile, in quanto si può costruire una matrice  $\mathbf{S}$  non singolare, che porta i vettori di base dello spazio a coincidere con gli autovettori, che formano essi pure una base.

Allora il sistema differenziale si riconduce, nelle *nuove variabili* in cui la matrice è *diagonale*, nella forma:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = p \xi \\ \dot{\eta} = p \eta \end{cases}$$

l'integrale generale del quale fornisce le equazioni parametriche delle traiettorie di fase:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 e^{pt} \\ \eta = \eta_0 e^{pt} \end{cases} \quad (8)$$

- Gli *assi cartesiani* sono traiettorie di fase, come si vede assegnando alternativamente una condizione iniziale nulla.

L'eliminazione del parametro conduce all'equazione delle traiettorie:

$$\eta = k \xi, \quad k = \frac{\eta_0}{\xi_0}$$

- La *stabilità* è decisa dal *segno* dell'*autovalore doppio* che è uguale a  $p$

$$\text{Si ha } \begin{cases} \textit{stabilità} \text{ per } & p < 0 \\ \text{e } \textit{instabilità} \text{ per } & p > 0 \end{cases}$$

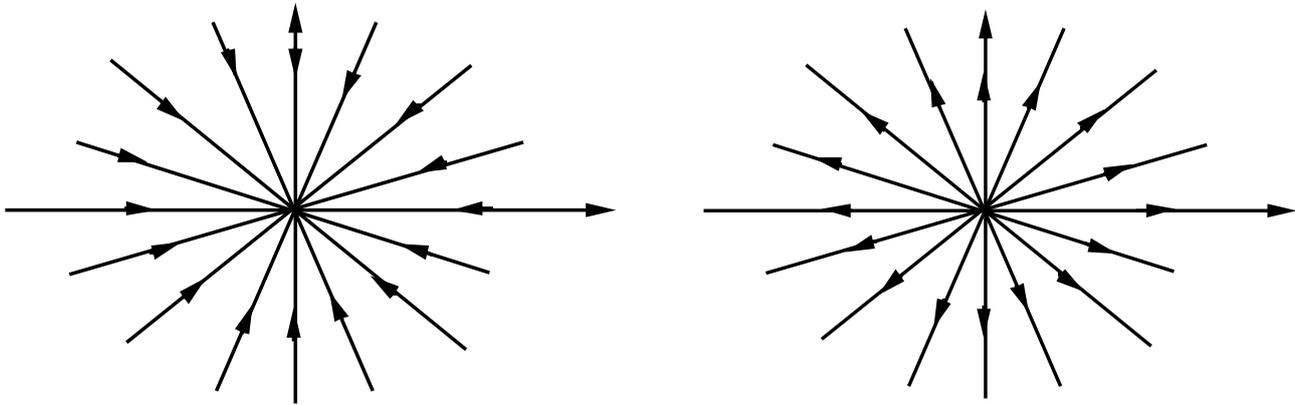


Fig. 13 - Nodi degeneri stabile e instabile - Caso della matrice diagonalizzabile

ii)  $A^*$  *non diagonalizzabile*

In corrispondenza dei due autovalori reali coincidenti, esiste *un solo autovettore linearmente indipendente.*

In questo caso si ha a disposizione un solo autovettore indipendente, in quanto anche gli autovettori sono coincidenti,

e *manca una base di autovettori* che possa essere portata a coincidere con la base del riferimento.

E quindi non si può diagonalizzare la matrice.

Tuttavia è possibile portare la matrice in una forma parzialmente semplificata (**forma di Jordan**), costruendo una matrice di similitudine  $\mathfrak{S}$  definita nel modo seguente:

$$\mathfrak{S} \equiv \begin{pmatrix} d_1 & u_1 \\ d_2 & u_2 \end{pmatrix}$$

dove:

$$\mathbf{d} \equiv (d_1, d_2)$$

è l'unico autovettore, normalizzato all'unità e:

$$\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2)$$

è un vettore che forma con esso una base ortogonale e non è evidentemente autovettore. Allora si ha:

$$\underline{\mathbf{d}}^2 = 1, \quad \underline{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{u}} = 0$$

Gli elementi della matrice riferita alla base di questi due vettori, cioè dopo la trasformazione di similitudine indotta da  $\underline{\mathbf{S}}$  sono allora i seguenti:

$$\hat{A}_{11}^* = \underline{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{d}} = \lambda = p, \quad \hat{A}_{12}^* = \underline{\mathbf{d}} \times \underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{u}} = 1$$

$$\hat{A}_{21}^* = \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{d}} = \lambda \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{d}} = 0 \quad \hat{A}_{22}^* = \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{u}} = p$$

- I valori di  $A_{11}$  e di  $A_{21}$  si ottengono facilmente tenendo conto che  $\underline{\mathbf{d}}$  è autovettore ricordando la relazione di ortogonalità tra i due vettori  $\underline{\mathbf{d}}, \underline{\mathbf{u}}$ .

- Il valore di  $A_{12}$  non è noto a priori, e può essere sempre posto uguale all'unità, definendo opportunamente il modulo di  $\underline{u}$ . Siamo sicuri che  $A_{12} \neq 0$ , altrimenti la matrice risulterebbe diagonale, e  $\underline{u}$  sarebbe autovettore, contro l'ipotesi.

- Il valore di  $A_{22}$  si determina tenendo conto che la trasformazione di similitudine non altera la traccia di una matrice, per cui:

$$\text{Tr}(\hat{\underline{A}}^*) = \text{tr}(\underline{A}^*), \quad \implies \quad p + A_{22} = 2p \quad \implies \quad A_{22} = p$$

Allora si ha la matrice nella *forma di Jordan*:

$$\hat{\underline{A}}^* \equiv \begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

Il sistema delle equazioni differenziali, per le nuove variabili diviene, di conseguenza:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = p\xi + \eta \\ \dot{\eta} = p\eta \end{cases}$$

E' immediato ottenere, dalla seconda equazione:

$$\eta = \eta_0 e^{pt}$$

Sostituendo nella prima equazione abbiamo:

$$\dot{\xi} = p\xi + \eta_0 e^{pt}$$

L'integrale generale di quest'ultima è la somma dell'integrale generale  $\hat{\xi}$  della omogenea associata:

$$\dot{\xi} = p \xi$$

e di un integrale particolare  $\xi_1$  della non omogenea. E' facile verificare che:

$$\hat{\xi} = \xi_0 e^{pt}, \quad \xi_1 = \eta_0 t e^{pt}$$

Quindi l'integrale generale del sistema risulta essere:

$$\begin{cases} \xi = (\xi_0 + \eta_0 t) e^{pt} \\ \eta = \eta_0 e^{pt} \end{cases}$$

Sono queste le equazioni parametriche delle traiettorie di fase. Si osserva che le traiettorie attraversano l'asse delle ordinate, in corrispondenza del valore del tempo  $\tau = -\frac{\xi_0}{\eta_0}$ .

→ *eliminazione del parametro t*

Il rapporto tra le due equazioni conduce a:

$$\xi = \frac{\xi_0 + \eta_0 t}{\eta_0} \eta$$

L'eliminazione completa del parametro si effettua risolvendo  $t$  dalla seconda equazione parametrica:

$$t = \frac{1}{p} \log \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)$$

Si ha allora l'equazione cartesiana delle traiettorie di fase in forma esplicitata rispetto a  $\xi$ :

$$\xi = \frac{\xi_0}{\eta_0} \eta + \frac{\eta}{p} \log \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)$$

→ *tangente*

Differenziando possiamo ricavare informazioni sul comportamento della tangente alla traiettoria di fase:

$$d\xi = \left\{ \frac{\xi_0}{\eta_0} + \frac{1}{p} \left[ 1 + \log \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right) \right] \right\} d\eta$$

Da cui:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\left\{ \frac{\xi_0}{\eta_0} + \frac{1}{p} \left[ 1 + \log \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right) \right] \right\}}$$

Si ha allora:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

• La tangente nell'origine è comune a tutte le traiettorie di fase ed è orizzontale.

→ *Stabilità*

Esaminando le equazioni parametriche e osserviamo che per  $t \rightarrow +\infty$  il fattore esponenziale è prevalente e risulta crescente per  $p > 0$  e decrescente per  $p < 0$ , e l'equilibrio risulta instabile nel primo caso e asintoticamente stabile nel secondo.

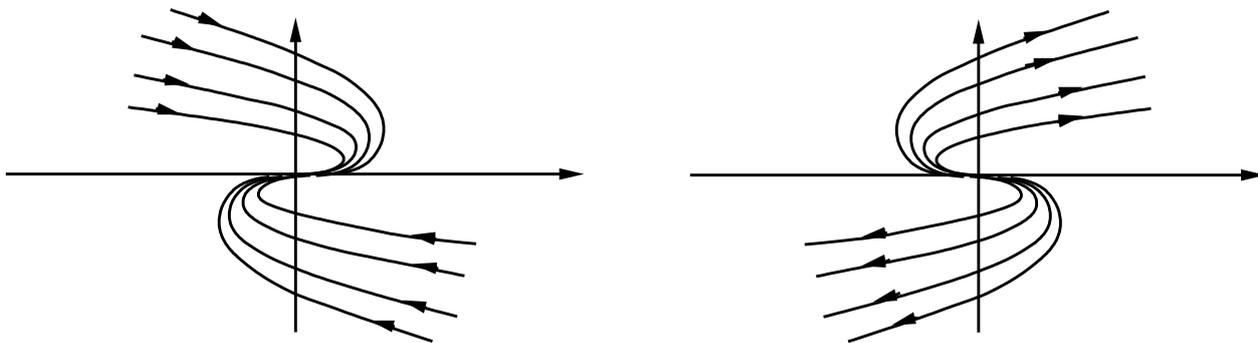


Fig. 14 - Nodi degeneri stabile e instabile - Caso della matrice non diagonalizzabile

### 3 - autovalori complessi coniugati: $p^2 - q < 0$

#### Fuochi

---

Gli autovalori sono dati da:

$$\lambda^{(1)} = p - i\sqrt{q - p^2}, \quad \lambda^{(2)} = p + i\sqrt{q - p^2}$$

Nel caso complesso, come in quello reale, in corrispondenza di

→ *due autovalori distinti*, il problema agli autovalori ammette sempre

→ *due autovettori linearmente indipendenti*  $\underline{\mathbf{d}}_1$ ,  $\underline{\mathbf{d}}_2$ ,

che formano, quindi, una base.

La *trasformazione di similitudine* ottenuta mediante la matrice  $\underline{\mathcal{S}}$  di elementi:

$$S_{ik} = d_i^{(k)}$$

porta, anche in questo caso, la matrice  $\underline{\mathcal{A}}$  nella *forma diagonale*:

$$\hat{\underline{\mathcal{A}}}^* = \underline{\mathcal{S}}^{-1} \underline{\mathcal{A}}^* \underline{\mathcal{S}}$$

e trasforma i vettori  $\underline{\mathbf{z}}$  secondo la legge:

$$\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathcal{S}} \hat{\underline{\mathbf{z}}}$$

Il sistema differenziale per i nuovi stati  $\hat{\underline{z}} \equiv (\xi, \eta)$  diviene allora:

$$\mathcal{S} \dot{\hat{\underline{z}}} = \mathcal{A}^* \mathcal{S} \hat{\underline{z}}$$

E quindi:

$$\dot{\hat{\underline{z}}} = \hat{\mathcal{A}}^* \hat{\underline{z}}$$

Ovvero, esplicitamente:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda^{(1)} \xi \\ \dot{\eta} = \lambda^{(2)} \eta \end{cases}$$

Le due equazioni sono *disaccoppiate* e sono l'una complessa coniugata dell'altra.

L'integrale generale si scrive:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0 e^{pt} e^{-i\sqrt{q-p^2}t} \\ \eta = \eta_0 e^{pt} e^{i\sqrt{q-p^2}t} \end{cases}$$

essendo  $\eta, \eta_0$  complesse coniugate di  $\xi, \xi_0$ .

Conviene allora separare la parte reale da quella immaginaria:

$$\xi = X + iY, \quad \eta = X - iY, \quad \xi_0 = X_0 + iY_0, \quad \eta_0 = X_0 - iY_0$$

ottenendo:

$$\begin{cases} X = A e^{pt} \cos(\sqrt{q - p^2} t + \gamma) \\ Y = A e^{pt} \operatorname{sen}(\sqrt{q - p^2} t + \gamma) \end{cases} \quad (9)$$

dove si è tenuto conto del fatto che:

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}, \quad \operatorname{sen} \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

e si è posto:

$$A = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}, \quad \cos \gamma = \frac{X_0}{A}, \quad \operatorname{sen} \gamma = \frac{Y_0}{A}$$

Abbiamo così ricavato, anche in questo caso, le *equazioni parametriche* della traiettoria di fase.

→ *eliminazione del parametro*  $t$

Quadrando e sommando *eliminiamo parzialmente il parametro*  $t$  ricavando:

$$X^2 + Y^2 = A^2 e^{2pt}$$

Questa rappresenta una *traiettoria di fase* ad andamento spiraleforme.

Una singolarità di questo tipo prende il nome di *fuoco*.

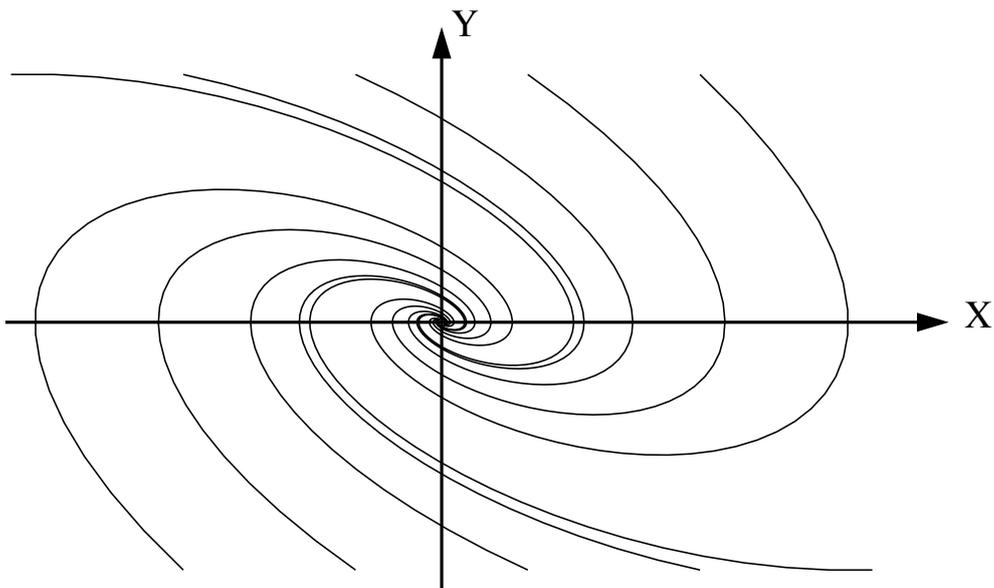


Fig. 15 - Fuochi - Autovalori complessi coniugati

→ *Stabilità*

Per  $p > 0$  il moto tende ad allontanarsi indefinitamente dal punto di equilibrio e si ha quindi un *fuoco instabile*, mentre per  $p < 0$  la curva tende a schiacciarsi sul punto fisso, e il moto tende asintoticamente all'origine; si ha allora un *fuoco stabile*.

Quando il fuoco è stabile il sistema compie delle oscillazioni smorzate nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile, come si è già visto esaminando l'oscillatore armonico smorzato.

$$\text{Si ha } \begin{cases} \textit{stabilità} \text{ per } & p < 0 \\ \text{e } \textit{instabilità} \text{ per } & p > 0 \end{cases}$$

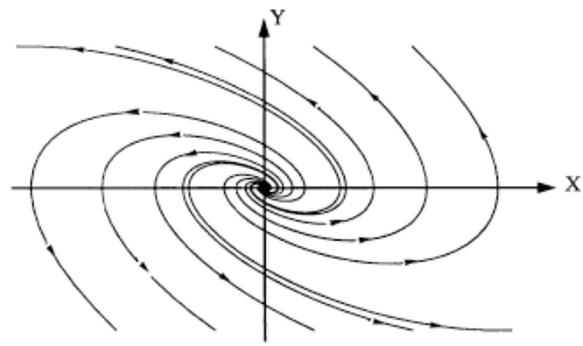
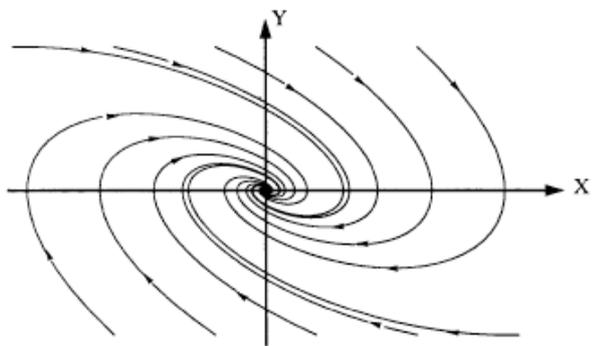


Fig. 16 - Fuoco stabile e fuoco instabile

## Considerazioni complessive sulla stabilità dei punti di equilibrio

Si può osservare che in *tutti i casi* esaminati,

con la sola eccezione dei *punti di sella*, che sono sempre instabili,

vale il seguente criterio generale per la stabilità dei punti di equilibrio:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{\mathbf{z}}\| = \begin{cases} +\infty & \text{se } p > 0 \text{ equilibrio } \textit{instabile} \\ 0 & \text{se } p < 0 \text{ equilibrio } \textit{asintoticamente stabile} \end{cases}$$

---

Notiamo anche come i segni degli autovalori sono legati alla definitezza di segno della matrice, la quale è definita negativa se l'equilibrio è stabile e definita positiva o non definita di segno se l'equilibrio è instabile.

→ *Regola della divergenza*

Ricordiamo, infine, che il parametro  $p$  è legato alla traccia della matrice  $\underline{A}^*$  dalla relazione:

$$2p = \text{tr}(\underline{A}^*) = A_{11}^* + A_{22}^*$$

Inoltre, per la (3), che definisce la matrice  $\underline{A}^*$ , abbiamo:

$$A_{11}^* = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, 0), \quad A_{22}^* = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, 0)$$

Quindi si ottiene:

$$2p = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, 0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x^*, 0) = \nabla \times \mathbf{f}|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*}, \quad \nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

La stabilità di un punto singolare, non di sella, si può valutare calcolando la *divergenza* del vettore  $\mathbf{f}$  che caratterizza il sistema, nel punto singolare.

Se questa è negativa l'equilibrio è stabile, se è positiva è instabile.

$$\text{Si ha } \begin{cases} \textit{stabilità} \text{ per } & \nabla \times \mathbf{f}|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = 2p < 0 \\ \text{e } \textit{instabilità} \text{ per } & \nabla \times \mathbf{f}|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = 2p > 0 \end{cases}$$

Possiamo riassumere tutti i risultati precedenti nel seguente quadro: ↘

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} p^2 - q \left\{ \begin{array}{l} > 0, q \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ nodi, } p \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ instabili} \\ < 0 \text{ stabili} \end{array} \right. \\ < 0 \text{ punti di sella instabili} \end{array} \right. \\ \\ = 0 \text{ nodi degeneri, } p \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ instabili} \\ < 0 \text{ stabili} \end{array} \right. \\ \\ < 0, p \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ fuochi instabili} \\ = 0 \text{ centri stabili} \\ < 0 \text{ fuochi stabili} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

che risulta meglio visualizzabile mediante un grafico nel piano delle variabili  $q, p$ .

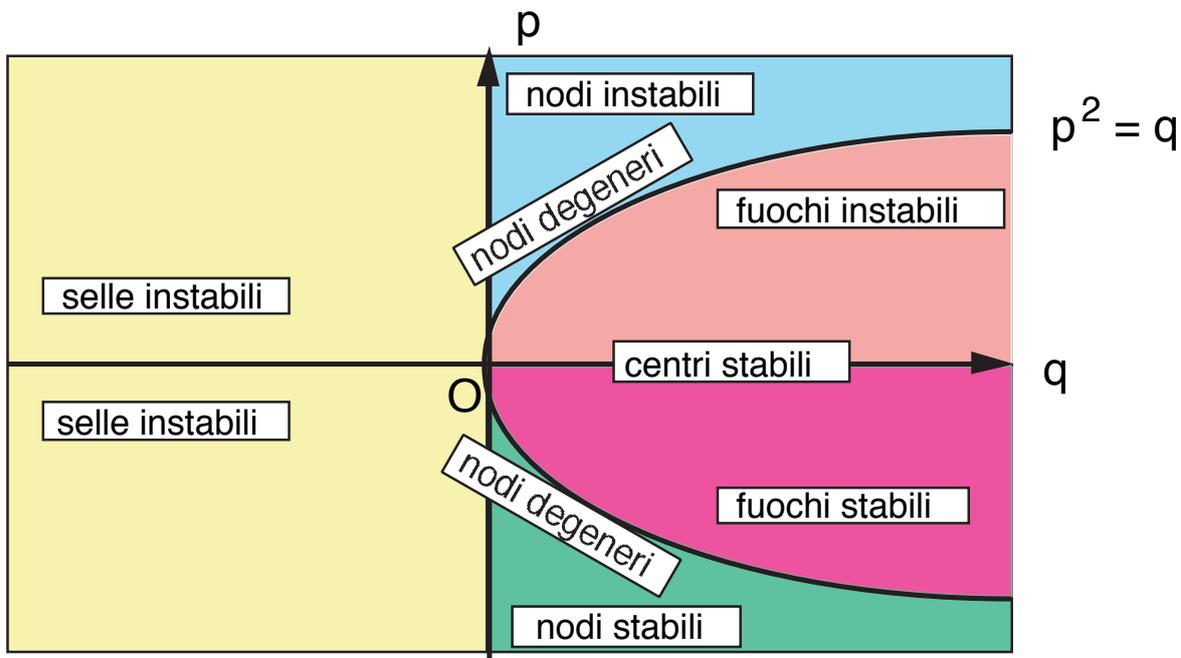


Fig. 17 - Quadro riassuntivo delle singolarità

## Pendolo in presenza di resistenza del mezzo

L'equazione del secondo ordine che governa il moto del pendolo, in presenza di resistenza del mezzo, è la seguente:

$$m \ell^2 \ddot{\vartheta} + h \ell \dot{\vartheta} + m g \operatorname{sen} \vartheta = 0$$

— *Il sistema delle equazioni del primo ordine è allora:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \operatorname{sen} x + 2p y \end{cases}$$

essendo:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}, \quad -2p = \frac{h}{m\ell}$$

Notiamo, che per definizione  $p$  è sempre negativo. Si ha quindi:

$$\varphi(x, y) = -\omega^2 \operatorname{sen} x + 2p y$$

Segue che:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\omega^2 \cos x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2p$$

— *I punti di equilibrio sono:*

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \pi$$

Le soluzioni periodiche individuano le stesse configurazioni. Abbiamo allora, all'equilibrio le seguenti matrici:

i) *nel punto di equilibrio:*  $x_1^* = 0$

$$\mathbf{A}^* \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 2p \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - 2p\lambda + \omega^2 = 0$$

— Quando il suo discriminante ridotto:

$$\frac{\Delta}{4} = p^2 - \omega^2$$

è positivo abbiamo due radici reali distinte. Poichè  $p < 0$  e  $q = \omega^2 > 0$  si ha che la singolarità è un *nodo stabile*. Siamo nel caso in cui la resistenza del mezzo è prevalente.

— Quando il discriminante è nullo si hanno due radici reali coincidenti, e quindi si ha un *nodo degenera*, che, essendo  $p < 0$ , è stabile.

— Quando il discriminante è negativo si hanno due radici complesse coniugate, quindi si ha un *fuoco stabile*, essendo  $p < 0$ .

ii) *nel punto di equilibrio*:  $x_2^* = \pi$

$$\mathbf{A}^* \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 2p \end{pmatrix}$$

L'equazione caratteristica è:

$$\lambda^2 - 2p\lambda - \omega^2 = 0$$

Il discriminante ridotto:

$$\frac{\Delta}{4} = p^2 + \omega^2$$

è sempre positivo e quindi abbiamo due radici reali distinte. Poichè  $p < 0$  e  $q = -\omega^2 < 0$  si ha che la singolarità è un *punto di sella* sempre instabile.

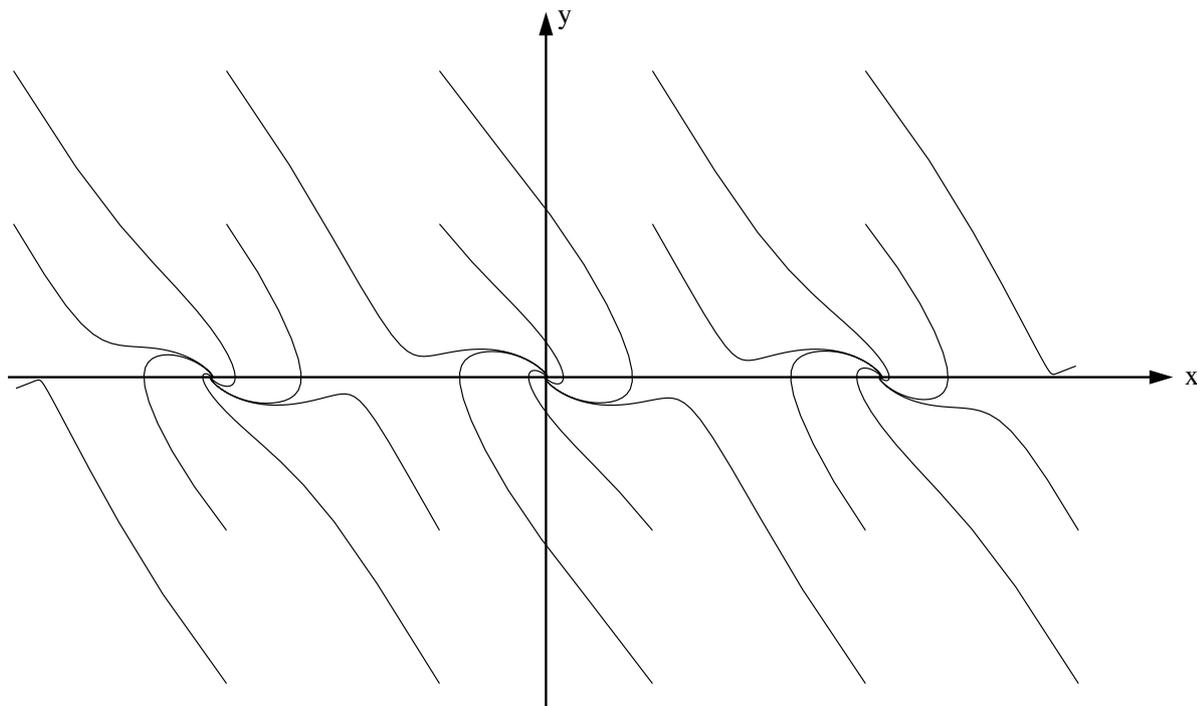


Fig. 18 - Diagramma di fase del pendolo in presenza di una forte resistenza viscosa

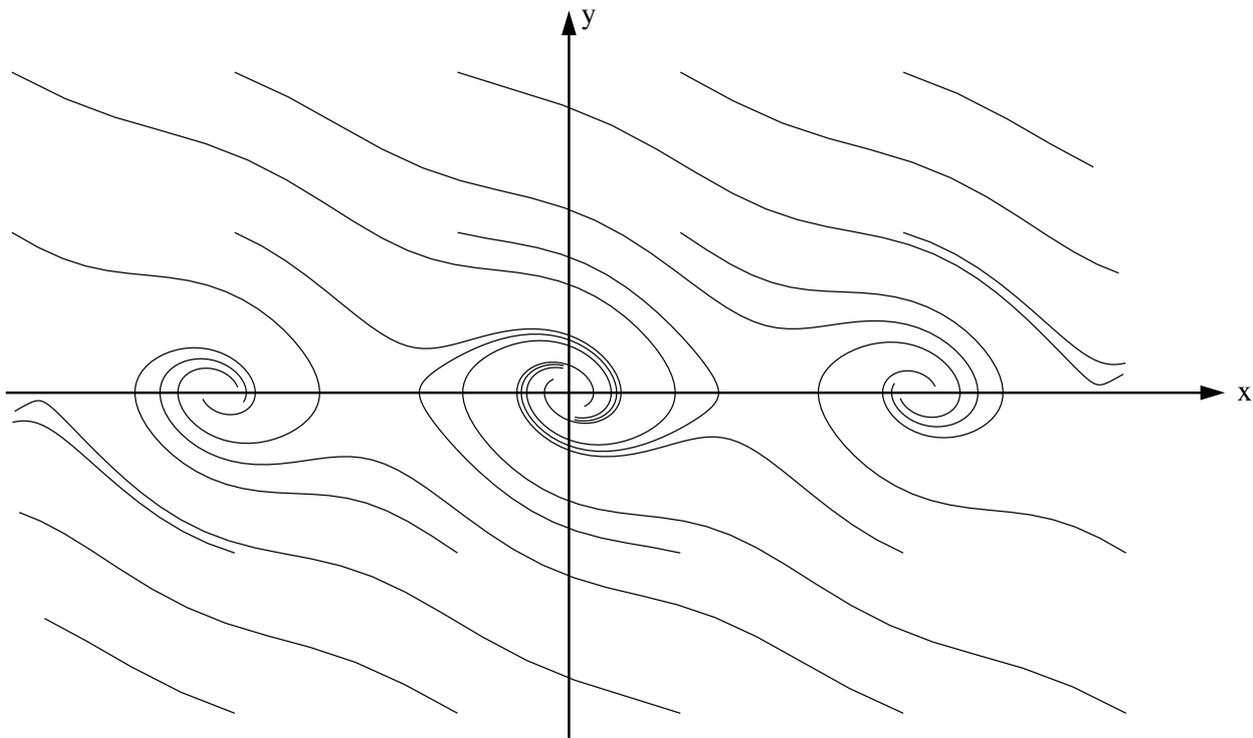


Fig. 19 - Diagramma di fase del pendolo in presenza di una debole resistenza viscosa

## Soluzioni periodiche e cicli limite

Si dice *soluzione periodica* di un sistema differenziale, una soluzione  $\underline{\mathbf{u}}(t)$  tale che è possibile trovare un intervallo di tempo  $\tau$  dopo il quale la soluzione si ripete in ogni istante, cioè:

$$\underline{\mathbf{u}}(t + \tau) = \underline{\mathbf{u}}(t), \quad \forall t > 0$$

Si chiama allora *periodo* il minimo dei valori positivi che  $\tau$  può assumere:

$$T = \min_{\tau \in \mathcal{A}} \tau, \quad \mathcal{A} = \{ \tau \in R^+ ; \underline{\mathbf{u}}(t + \tau) = \underline{\mathbf{u}}(t), \forall t > 0 \}$$

Si dice *ciclo limite* una soluzione periodica  $\mathbf{u}_L(t)$  che gode delle seguenti proprietà:

i) esiste un  $\varepsilon \in R^+$  tale che qualunque altra traiettoria di fase, distinta dal ciclo limite, per cui, almeno in un punto  $\mathbf{u}$  si ha:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_L\| < \varepsilon$$

non è una soluzione periodica del sistema. Per questo si dice che il ciclo limite rappresenta una soluzione periodica *isolata*.

ii) Ogni altra soluzione nell'intorno del ciclo tende asintoticamente al ciclo o proviene asintoticamente dal ciclo, cioè si verifica una delle due condizioni:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_L\| = 0$$

oppure:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\underline{\mathbf{u}}(t) - \underline{\mathbf{u}}_L\| = 0$$

Se si verifica, per ogni soluzione nell'intorno del ciclo, la prima situazione, si dice che il ciclo è stabile; se si verifica sempre la seconda situazione si dice che il ciclo è instabile. Se si verifica una delle due situazioni per le soluzioni le cui condizioni iniziali sono esterne alla curva di fase che identifica il ciclo e l'altra per le soluzioni le cui condizioni iniziali sono interne, si parla di ciclo semistabile.

- Perchè si abbia un ciclo limite il sistema differenziale deve essere non lineare. Infatti un sistema lineare che ammette una soluzione periodica ne ammette infinite altre vicina ad essa, poichè l'equazione caratteristica del sistema non dipende dalle condizioni iniziali.

Un *esempio* si ha considerando il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (10)$$

La soluzione:

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t$$

identifica la traiettoria di fase:

$$x^2 + y^2 = 1$$

che rappresenta un ciclo limite.

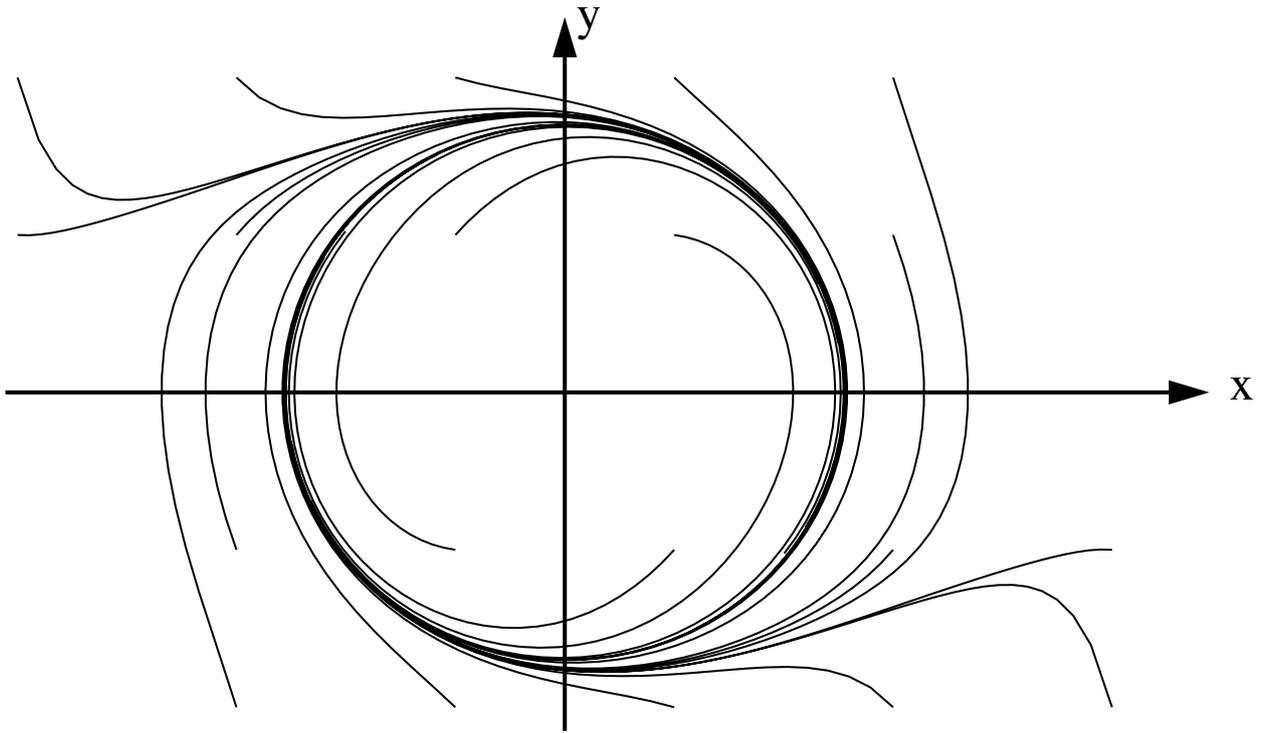


Fig. 20 - Ciclo limite

Si può evidenziare il fatto che le altre soluzioni, in prossimità del ciclo, non sono periodiche e tendono asintoticamente al ciclo, passando in coordinate polari e scrivendo l'equazione differenziale per  $r$ . Possiamo moltiplicare la prima equazione del sistema (10) per  $x$  e la seconda per  $y$  e sommare; otteniamo:

$$x \dot{x} + y \dot{y} = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$$

In termini di:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

abbiamo:

$$r \dot{r} = r^2(1 - r^2)$$

Ovvero, semplificando:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

nella quale il ciclo è rappresentato dall'equazione  $r = 1$ .

Possiamo allora linearizzare l'equazione per  $r$  nell'intorno del ciclo, sviluppando la funzione:

$$\phi(r) = r(1 - r^2)$$

nell'intorno di  $r = 1$ .

Si ha allora:

$$\phi(r) = -2r + 2 + \mathcal{O}[(r - 1)^2]$$

E quindi l'equazione linearizzata per  $r$ :

$$\dot{r} + 2r = 2$$

L'integrale generale della quale è:

$$r(t) = r_0 e^{-2t} + 1$$

che rappresenta una soluzione non periodica. Poichè si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 1$$

il ciclo è stabile.

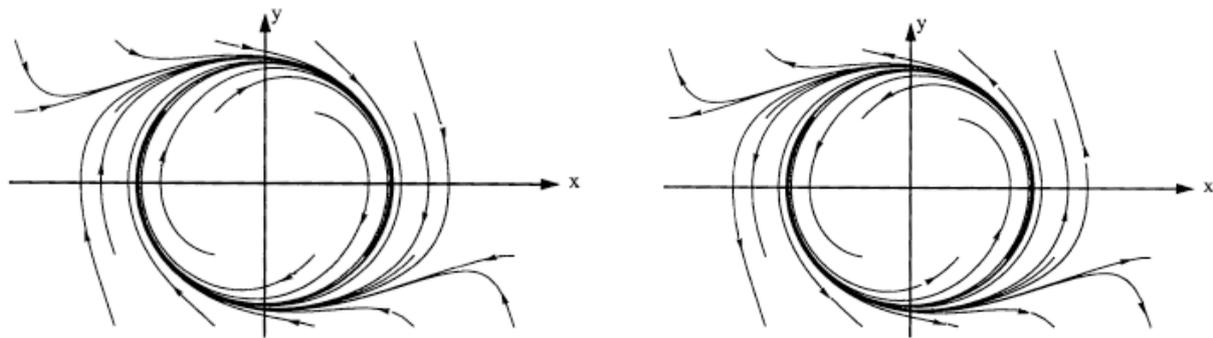


Fig. 21 - Ciclo limite stabile e ciclo limite instabile

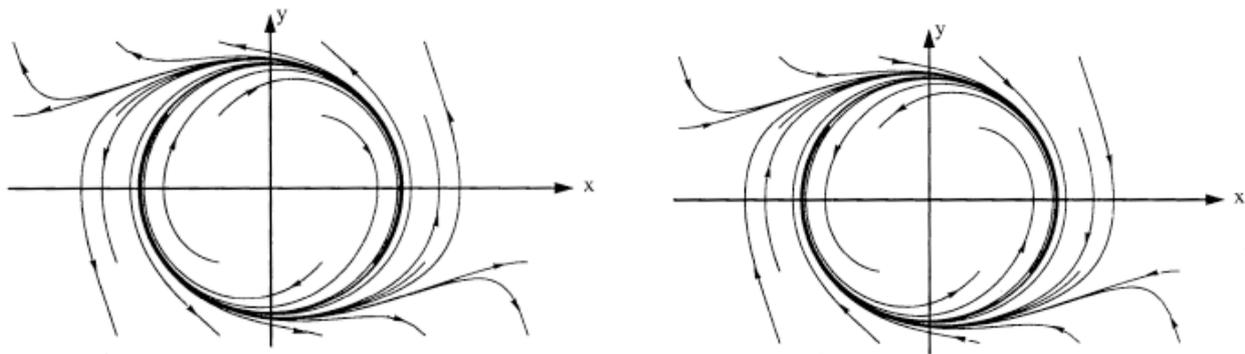


Fig. 22 - Cicli limite metastabili

## Ciclo limite di Van Der Pol

In elettronica si presenta il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (1 - x^2)y - x \end{cases}$$

Una soluzione di questa equazione è rappresentata da un ciclo limite noto come ciclo di Van der Pol.

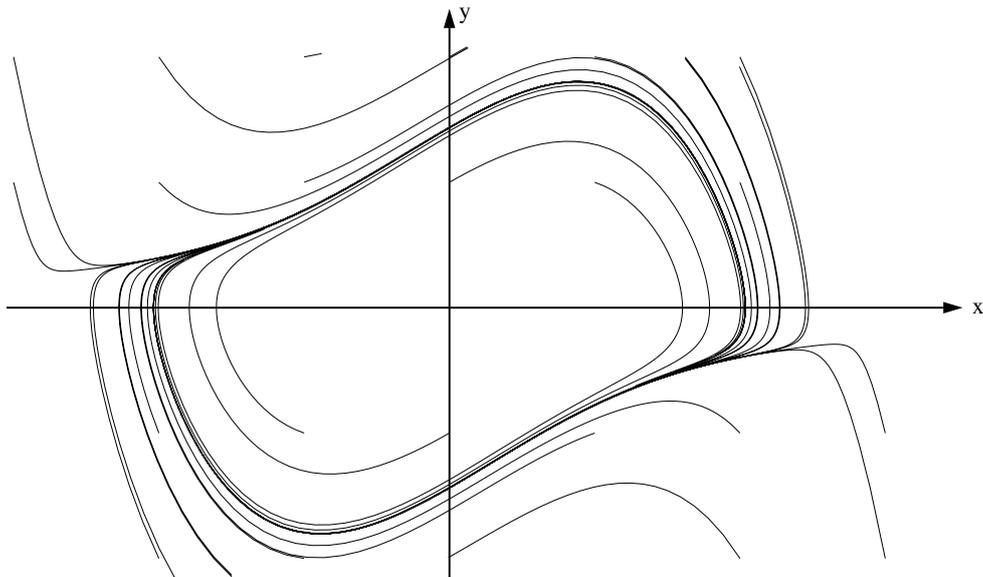


Fig. 23 - Ciclo limite di Van der Pol

\* \* \*

Il ciclo limite di Van der Pol descrive il moto di un *oscillatore anarmonico*.

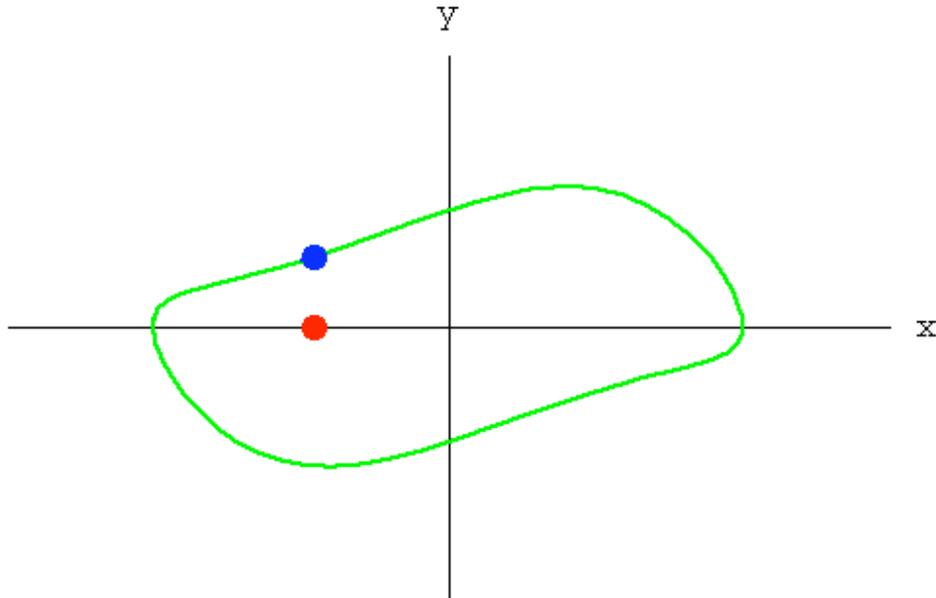


Fig. 24 - Oscillatore anarmonico di Van der Pol

## Attrattori strani o caotici

Molti sistemi differenziali non lineari, ad uno o più gradi di libertà, presentano delle soluzioni particolari che vengono dette

*attrattori strani* o anche *caotici*

- per il loro comportamento e/o
- per il comportamento delle soluzioni “vicine” alle loro traiettorie di fase.

Esempi tipici sono:

- L'attrattore di Duffing (oscillatore anarmonico unidimensionale)
- L'attrattore di Lorenz (particella di fluido in moto caotico)

## L'attrattore di Duffing (oscillatore anarmonico unidimensionale)

Le equazioni sono quelle di un *oscillatore anarmonico unidimensionale*:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \alpha x^3 - 2p y. \end{cases}$$

Le *soluzioni "vicine"* sono fortemente sensibili alle condizioni iniziali.

Variando di poco la condizione iniziale si ottengono traiettorie di fase che tendono asintoticamente a *due fuochi* distinti.

## Attrattore di Duffing - Forte sensibilità alle condizioni iniziali

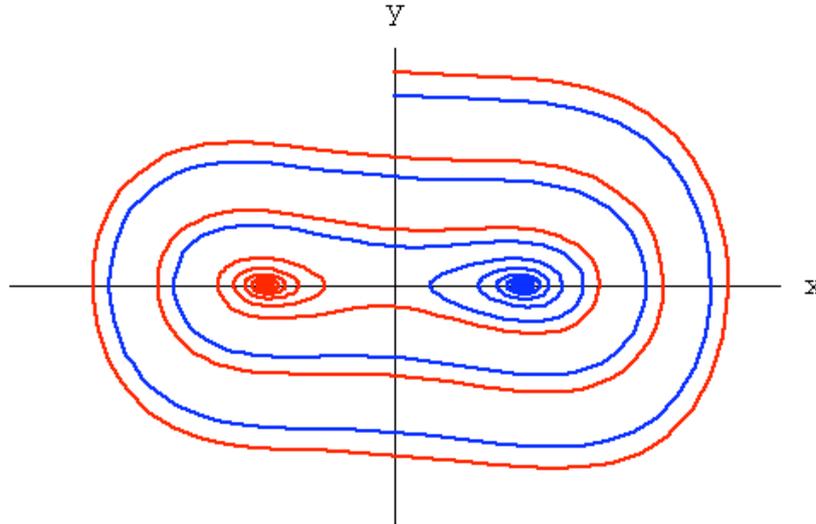


Fig. 25 - Attrattore caotico di Duffing

**Bacino di attrazione** - L'insieme di punti del piano delle fasi che scelti come condizioni iniziali danno origine ad una traiettoria di fase che tende asintoticamente ad un attrattore.

- L'attrattore di Lorenz (termo-fluidodinamica)

È governato da 3 variabili di stato (spazio delle fasi tridimensionale) che obbediscono al sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma (y - x), \\ \dot{y} = \rho x - x z - y, \\ \dot{z} = x y - \beta z, \end{cases}$$

che provengono da un'approssimazione delle equazioni della termodinamica di un fluido unidimensionale.

La traiettoria di fase “salta” caoticamente da un ramo all'altro dell'attrattore durante al sua evoluzione temporale.

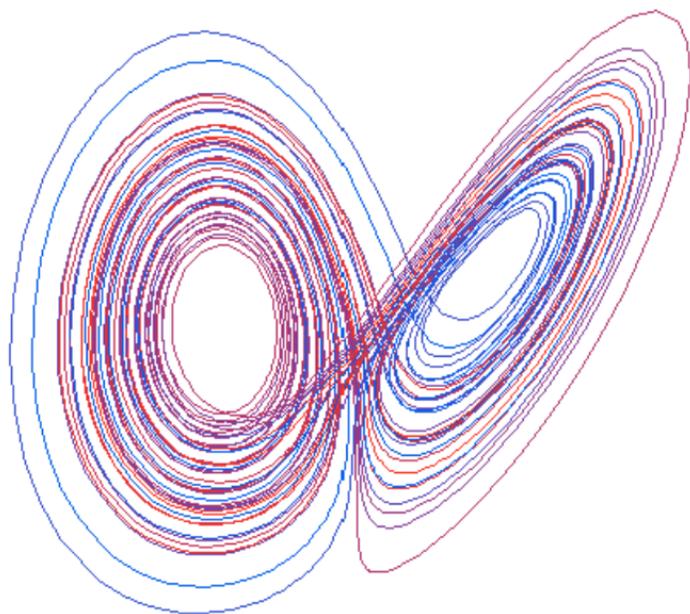


Fig. 26 - Attrattore caotico di Lorenz

## Mappe di Poincaré

Una sezione di un attrattore in  $R^3$  effettuata mediante un piano incidente rispetto ad esso prende il nome di *mappa di Poincaré*

Gli attrattori possono essere classificati come:

- **Periodici (cicli limite)** quando la mappa di Poincaré in ogni istante coincide con un solo *punto*
- **Quasi-periodici** quando la mappa di Poincaré per  $t \rightarrow +\infty$  tende a una *curva chiusa*
- **Caotici** quando la mappa di Poincaré per  $t \rightarrow +\infty$  è costituita da infiniti punti sparsi nel piano

## Mappa di Poincaré di un attrattore periodico (ciclo limite)

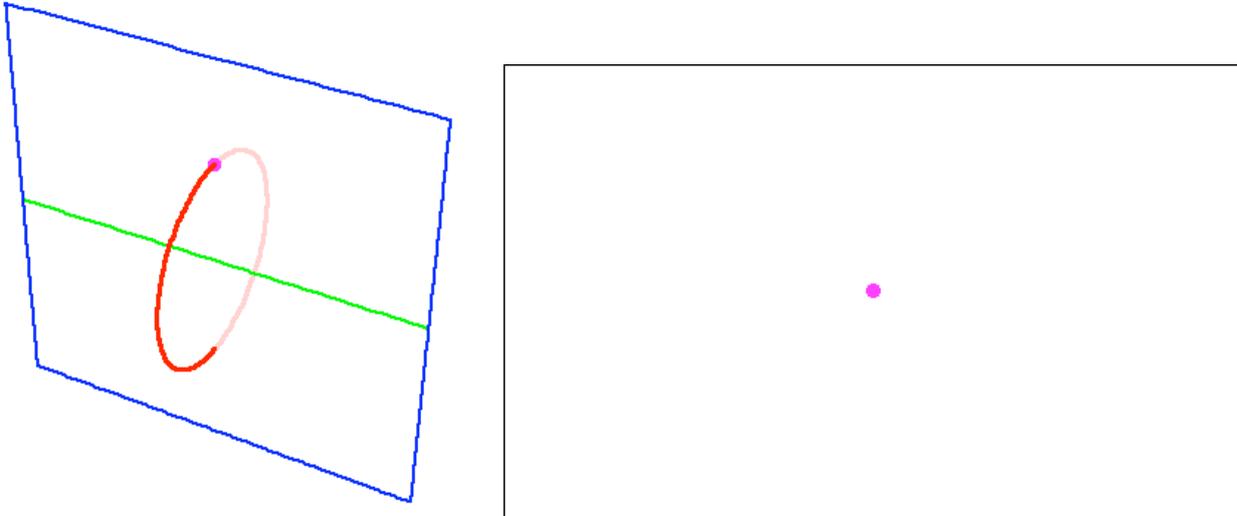


Fig. 27 - Mappa di Poincaré di un attrattore periodico

## Mappa di Poincaré di un attrattore quasi-periodico

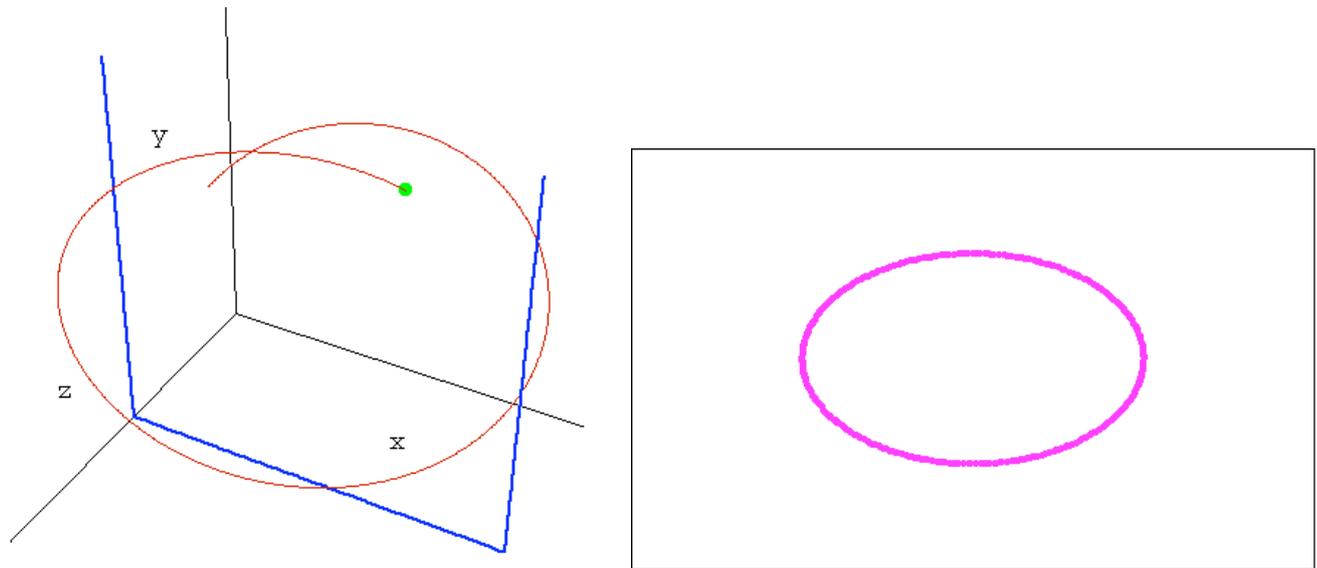


Fig. 28 - Mappa di Poincaré di un attrattore quasi-periodico

## Mappa di Poincaré di un attrattore caotico

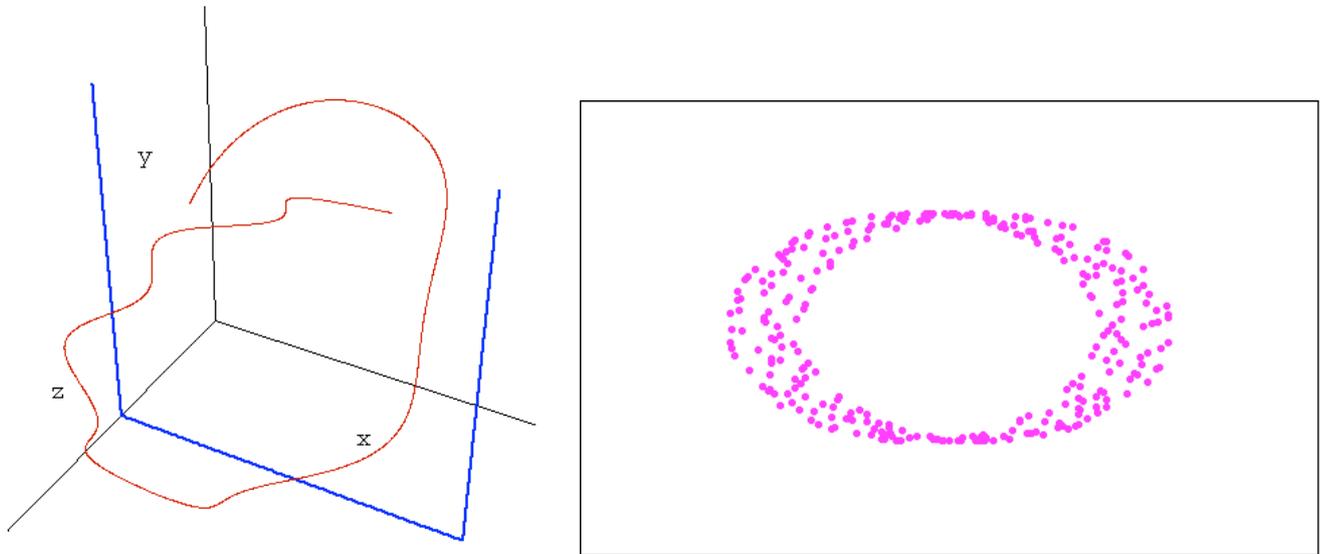


Fig. 29 - Mappa di Poincaré di un attrattore caotico

\* \* \*