Equazioni differenziali ordinarie - Analisi qualitativa

Sistemi non autonomi e sistemi autonomi

Come si è già visto in precedenza, quando si lavora con un sistema di equazioni differenziali ordinarie di ordine qualunque, è sempre possibile, attraverso successivi abbassamenti del grado delle equazioni, ricondursi ad un *sistema le cui equazioni differenziali* sono tutte del primo ordine.

Di conseguenza assumeremo sempre di partire da sistemi differenziali di equazioni del primo ordine; la struttura più generale per un sistema del genere è data da:

$$\underline{\dot{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}, t) \tag{1}$$

essendo:

$$\underline{\mathbf{f}} : A \times R \longrightarrow R^n, \qquad A \subseteq R^n$$

L'insieme delle variabili $\underline{\mathbf{u}}(t)$ corrispondenti a una soluzione particolare del sistema (1), valutato in un istante del tempo, si dice *stato* del sistema nell'istante t e il sistema stesso si dice *sistema dinamico* differenziale.

Se la funzione $\underline{\mathbf{f}}$ è lipschitziana rispetto a $\underline{\mathbf{u}}$, in un dominio $\mathcal{D}$, cioè se esiste una costante $C \in R^+$ tale che:

$$\|\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}, t) - \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}', t)\| \leq C \, \|\underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}'\|, \;\; \forall \underline{\mathbf{u}}, \, \underline{\mathbf{u}}' \in \mathcal{D} \subseteq A$$

assegante le *condizioni iniziali* $\underline{\mathbf{u}}(t_0) = \underline{\mathbf{u}}_0$, la soluzione del sistema è *unica*.

Un sistema del tipo (1) in cui la funzione $\underline{\mathbf{f}}$ CONTIENE la dipendenza esplicita dal tempo si dice *sistema non autonomo.*

Un sistema del tipo (1) in cui la funzione $\underline{\mathbf{f}}$ NON CONTIENE la dipendenza esplicita dal tempo si dice *sistema autonomo.*

Di conseguenza un *sistema autonomo* si presenta in generale nella forma:

$$\dot{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}) \tag{2}$$

Osserviamo che se il sistema non è autonomo e la funzione $\underline{\mathbf{f}}$ dipende esplicitamente dal tempo in maniera non lineare, non è possibile traslare l'asse dei tempi e quindi un istante iniziale generico $t_0 \neq 0$ non può essere fatto coincidere con $t = 0$; se invece il sistema è autonomo il problema non sussiste e si può sempre assumere $t_0 = 0$.

La distinzione fra sistema autonomo e non autonomo può sembrare, a prima vista, non rilevante, in quanto un sistema non autonomo si può sempre ricondurre ad un sistema autonomo mediante l'introduzione di una variabile ausiliaria, che rimpiazza il tempo. Per esempio in un sistema in cui è presente una dipendenza esplicita dal tempo periodica si può intordurre $\vartheta = \omega\, t$, con $\omega > 0$. In tal caso il sistema non autonomo (1) si riscrive:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega \\ \\ \underline{\dot{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{f}}\left(\underline{\mathbf{u}}, \frac{\theta}{\omega}\right) \end{cases}$$

$$\underline{\dot{\mathbf{U}}} = \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{U}}), \qquad \underline{\mathbf{U}} \equiv \begin{pmatrix} \theta \\ \\ \underline{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{F}}(\underline{\mathbf{U}}) \equiv \begin{pmatrix} \omega \\ \\ \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{u}}, \frac{\vartheta}{\omega}) \end{pmatrix}$$

Un sistema di questo tipo ha però ha, però, l'inconveniente di avere soluzioni divergenti nel tempo, in quanto:

$$\lim_{t \to \infty} \vartheta = \infty$$

anche quando $\underline{\mathbf{u}}(t)$ si mantiene limitata o addirittura tende asintoticamente a zero. La forma autonoma, quindi, *non consente in questo caso sviluppi asintotici per tempi molto grandi* e bisogna mantenere il sistema nella forma non autonoma.

Spazio delle fasi

Lo spazio in cui sono definiti gli stati $\underline{\mathbf{u}}$ di un sistema dinamico prende il nome di *spazio delle fasi.*

Esaminiamo qualche esempio di spazio delle fasi legato a sistemi differenziali che descrivono dei sistemi meccanici.

Esempi

i) *Equazioni del moto di un punto*

L'equazione fondamentale della dinamica inerziale del punto:

$$m\,\ddot{x}_i = F_i(x_k, \dot{x}_k, t), \qquad i, k = 1, 2, 3$$

si può riscrivere riducendo le equazioni al primo ordine, nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \\ \dot{v}_i = \frac{1}{m} F_i(x_k, v_k, t) \end{cases}$$

Questo sitema si riconduce alla forma compatta (1) introducendo i vettori a sei componenti:

$$\underline{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} x_i \\ \\ v_i \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_i \\ \\ \frac{1}{m} F_i(x_k, v_k, t) \end{pmatrix}$$

- Lo spazio delle fasi del punto è lo spazio delle *posizioni* e delle *velocità*.

- Si osserva, poi, che il sistema risulta *autonomo* qualora la forza non dipenda esplicitamente dal tempo e non autonomo in caso contrario.

ii) *Equazioni di Hamilton*

Un altro esempio semplice è offerto dalle equazioni di Hamilton, le quali sono già del primo ordine:

$$\dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}$$

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h}$$

In questo caso si ha:

$$\underline{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} q_h \\ \\ p_h \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \\ \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \end{pmatrix}$$

• Lo spazio delle fasi di un sistema canonico è lo spazio delle *variabili canoniche*, cioè lo spazio delle posizioni e dei momenti.

• Il sistema risulta autonomo se *l'hamiltoniana* non dipende esplicitamente dal tempo.

Sistemi a un grado di libertà: piano delle fasi

La descrizione del moto mediante lo spazio delle fasi diventa particolarmente comoda quando

$\longrightarrow$ il *sistema meccanico* ha un solo grado di libertà,

sperchè in questo caso lo spazio delle fasi si riduce a un piano, al quale si dà il nome di *piano delle fasi,* ed è possibile rappresentare su un foglio di carta o su un video gli stati del sistema e la loro evoluzione. Il vettore degli stati del sistema ha due sole componenti: $\underline{\mathbf{u}} \equiv (x, y)$.

i) *Punto materiale*

Nel caso di un punto abbiamo semplicemente:

$$\underline{\mathbf{u}} \equiv \begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{f}} \equiv \begin{pmatrix} y \\ \\ \frac{1}{m} F(x,y,t) \end{pmatrix}$$

ii) *Sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo*

Nel caso di un sistema olonomo a un grado di libertà, il cui moto viene descritto mediante una sola equazione di Lagrange, per l'unico parametro lagrangiano $q = x$, abbiamo:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q$$

Se i vicnoli sono indipendenti dal tempo, l'energia cinetica è espressa in questo caso da:

$$T = \frac{1}{2}\, a(x)\, \dot{x}^2 \tag{3}$$

Notiamo che la matrice dell'energia cinetica è ora semplicemente una *funzione scalare positiva.* Derivando otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a(x)\, \dot{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a(x)\, \ddot{x} + a'(x)\, \dot{x}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2}\, a'(x)\, \dot{x}^2$$

dove l'apice denota la derivata rispetto all'argomento x. E quindi l'equazione di lagrange si specializza nella forma seguente:

$$a(x)\,\ddot{x} + \frac{1}{2}\,a'(x)\,\dot{x}^2 = Q(x, \dot{x}, t) \tag{4}$$

Dal momento che $a(x)$ è strettamente positivo possiamo ridurre l'equazione in forma nromale:

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}, t), \qquad g(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{a(x)} \left[Q(x, \dot{x}, t) - \frac{1}{2}\,a'(x)\,\dot{x}^2 \right] \tag{5}$$

Essa si presenta allora sotto la stessa forma dell'equazione del moto di un punto nella quale g prende il posto di $\frac{F}{m}$.

- Gli stati del sistema sono dati dal vettore $\underline{\mathbf{u}} \equiv (x, y) \equiv (q, \dot{q})$.

- Se la forza generalizzata di Lagrange Q non diepende esplicitamente dal tempo, il sistema è autonomo.

Rappresentazione grafica

Uno stato del sistema differenziale $\underline{\mathbf{u}}$, valutato in un certo istante, viene rapprersentato da un punto sul piano delle fasi (*punto di fase*). Assegnando delle condizioni iniziali $\underline{\mathbf{u}}_0 \equiv (x_0, y_0) \equiv (x_0, \dot{x}_0)$ si individua il punto di partenza del moto. L'integrale particolare $\underline{\mathbf{u}}(t)$ corrispondente è unico se la funzione $\underline{\mathbf{f}}$ è lipschitziana, ed è caratterizzato da:

$$\begin{cases} x(t) = x(t, x_0, y_0) \\ \\ y(t) = y(t, x_0, y_0) \end{cases}$$

- *Geometricamente* sono le equazioni parametriche di una *curva* del piano delle fasi alla quale si dà il nome di *traiettoria di fase.*

- La traiettoria di fase ha un *verso di percorrenza* dato dall'evoluzione temporale del moto: se la derivata temporale di x, che è data da y, è positiva la funzione x cresce nel tempo; se y è negativa x decresce. Di conseguenza i rami delle traiettorie di fase che si trovano nel *sempiano delle* $y > 0$ sono percorsi nel senso delle x *cresecenti*, mentre quelli che si trovano nel semipiano delle $y < 0$ sono percorsi nel senso delle x decrescenti.

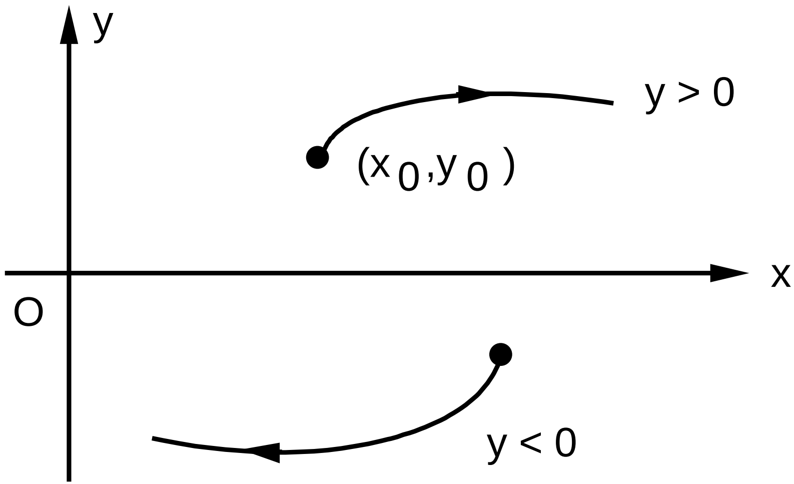

Fig. 1 - Traiettorie di fase e loro orientamento

L'insieme delle traiettorie di fase che descrivono un sistema si dice *diagramma di fase* del sistema.

Quando lo si ritenga conveniente è possibile dare anche una rappresentazione tridimensionale del moto introducendo l'asse dei tempi: si parla in questo caso di *spazio delle fasi ampliato.*

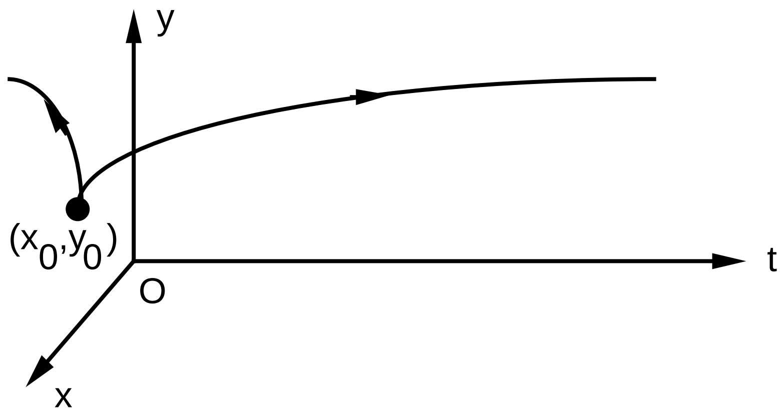

Fig. 2 - Spazio delle fasi ampliato

Velocità di fase

Si introduce poi la *velocità di fase* come derivata temporale del vettore $\underline{\mathbf{u}}$ che caratterizza lo stato del sistema:

$$\underline{\mathbf{v}}_f = \underline{\dot{\mathbf{u}}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}) \equiv (\dot{x}, \ddot{x}) \tag{6}$$

Questo vettore non va confuso con la velocità del moto nello spazio delle configurazioni che costituisce solo la prima componente della velocità di fase, mentre la seconda componente è data dall'accelerazione. La velocità di fase è un vettore che si mantiene tangente alle traiettorie di fase durante il moto.

- In un sistema differenziale di equazioni del primo ordine, la funzione $\underline{\mathbf{f}}$ descrive il *campo delle velocità* di fase che caratterizza il sistema.

Punti fissi e punti di equilibrio

Si dicono *punti fissi* quei punti del sistema che hanno velocità di fase nulla. In questi punti la velocità e l'accelerazione sono contemporaneamente nulle, per cui il sistema si trova in quiete; di qui la denominazione di punti fissi.

- Essendo nulla la velocità i punti fissi appartengono sempre all'*asse delle ascisse*, in quanto $y = \dot{x} = 0$. Tuttavia non tutti i punti dell'asse delle ascisse sono punti fissi in quanto la condizione di appartenenza a tale asse $y = 0$, da sola, non dice nulla sull'accelerazione.

- I punti fissi sono le traiettorie di fase corrispondenti a quel caso particolare di moto che è la *quiete*.

Se la $\underline{\mathbf{f}}$ è lipschitziana così vale il teorema di unicità della soluzione, e la quiete equivale all'equilibrio: allora i punti fissi sono i punti di equilibrio del sistema e viceversa.

Sistemi autonomi

Equazione delle curve integrali

Dal punto di vista dei problemi meccanici i sistemi di interesse sono quelli che derivano da un'*equazione differenziale del secondo ordine* del tipo:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{7}$$

nella cui struttura rientra l'equazione del moto di un punto o di un generico sistema olonomo a un grado di libertà, con vincoli e forze indipendenti dal tempo.

E quindi *sistemi di equazioni del primo ordine*, ad essa equivalenti, della forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases} \tag{8}$$

In corrispondenza delle condizioni iniziali (x_0, y_0), l'*integrale particolare*:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \\ y = y(t) \end{cases} \tag{9}$$

fornisce le *equazioni parametriche* della traiettoria di fase, la cui

$\longrightarrow$ equazione cartesiana:

$$y = y(x)$$

si ottiene eliminando il parametro t dalle (9).

Problema: è indispensabile integrare le equazioni del moto per determinare le traiettorie di fase di un sistema?

E' chiaro che l'interesse dell'ananlisi qualitativa del moto nel piano delle fasi è legato alla possibilità di *avere informazioni sul moto*, mediante le traiettorie di fase anche quando non si riesce ad integrare il sistema differenziale del moto.

• Per un *sistema* AUTONOMO è sempre possibile giungere ad un'equazione differenziale per la funzione incognita $y(x)$, senza coinvolgere il tempo, e quindi senza conoscere la legge di evoluzione temporale del moto. Ciò è possibile grazie al fatto che la funzione f nel sistema (8) non contiene esplicitamente il tempo.

Per giungere a questa equazione differenziale calcoliamo la derivata di $y(x(t))$
rispetto ad t, tenendo conto che y è funzione composta di t attraverso x. Abbiamo:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}\, y(x(t)) = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt} = y'\,\dot{x}$$

Se si escludono i punti del piano delle fasi nei quali si annulla $y = \dot{x}$ possiamo esprimere:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad y = \dot{x} \neq 0$$

Tenendo conto delle informazioni che vengono dal sistema (8) possiamo scrivere l'equazione:

$$\boxed{y' = \frac{1}{y} f(x, y)} \tag{10}$$

che prende il nome di *equazione delle curve integrali* e non contiene più il tempo.

• Le soluzioni di questa equazione, possono essere delle *curve a più rami* che rappresentano traiettorie di fase distinte, in quanto i punti di un ramo non sono raggiungibili assegnando delle condizioni iniziali, al sistema differenziale del moto, su un altro ramo. Per questo si preferisce allora chiamare *curve integrali,* anzichè traiettorie di fase, le curve rappresentative delle soluzioni di questa equazione.

• Osserviamo che y', dal punto di vista geometrico, rappresenta il *coefficiente angolare della tangente* alla curva integrale nel punto del piano delle fasi di coordinate x, y. Si possono determinare, allora, le curve nei punti delle quali la tangente alle curve integrali che passano per quei punti ha uno stesso valore C assegnato. Queste curve, la cui equazione è:

$$\frac{1}{y} f(x, y) = C \tag{11}$$

prendono il nome di *curve isocline* e sono utili per avere informazioni sull'andamento delle curve integrali anche senza integrare la (10).

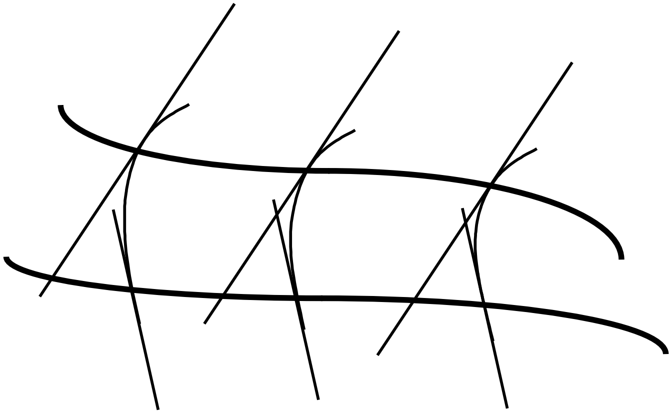

Fig. 3 - Curve isocline

Singolarità

Analizziamo ora il comportamento delle curve integrali nei punti singolari, in cui $y = \dot{x} = 0$, cioè nei punti dell'asse delle ascisse del piano delle fasi.

Notiamo che questi punti

$\longrightarrow$ che sono *singolari* dal punto di vista geometrico, per le curve integrali,

$\longrightarrow$ sono punti estremamente *significativi* dal punto di vista del problema meccanico.

Essi perciò devono essere analizzati e classificati.

i) *punti di equilibrio:* $\dot{x} = 0, \ \ddot{x} = 0$

Sono i *punti fissi* del sistema, nei quali oltre alla velocità $y = \dot{x}$ si annulla anche l'accelerazione $\dot{y} = \ddot{x}$, cioè si annulla la velocità di fase. Di conseguenza risulta nulla anche la funzione $f(x, 0)$

• Nella (10) la derivata y' presenta un'indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$. Geometricamente la tangente risulta indeterminata.

ii) *Punti di inversione del moto:* $\dot{x} = 0, \ \ddot{x} \neq 0$

Questi punti si trovano sull'asse delle ascisse del piano delle fasi, ma non sono punti fissi, in quanto la velocità di fase non è nulla, essendo non nulla l'accelerazione $\dot{y} = \ddot{x}$. Perciò dal sistema (8) abbiamo l'informazione $f(x, 0) \neq 0$. L'equazione delle curve integrali ci dà l'informazione conseguente relativa al limite della derivata:

$$\lim_{y \to 0} y' = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} f(x, 0) = \infty$$

• Geometricamente questo significa che la tangente alla curva integrale, nel punto singolare, è verticale.

La curva attraversa l'asse delle ascisse nel punto singolare e quindi la velocità cambia segno, invertendo il verso del moto.

• Attraversando l'asse delle ascisse, la $y = \dot{x}$ cambia segno e perciò la $x(t)$ passa da funzione crescente a decrescente rispetto a tempo o vivceversa. Perciò la $x(t)$ raggiunge per $y = 0$ il suo massimo o il suo minimo.

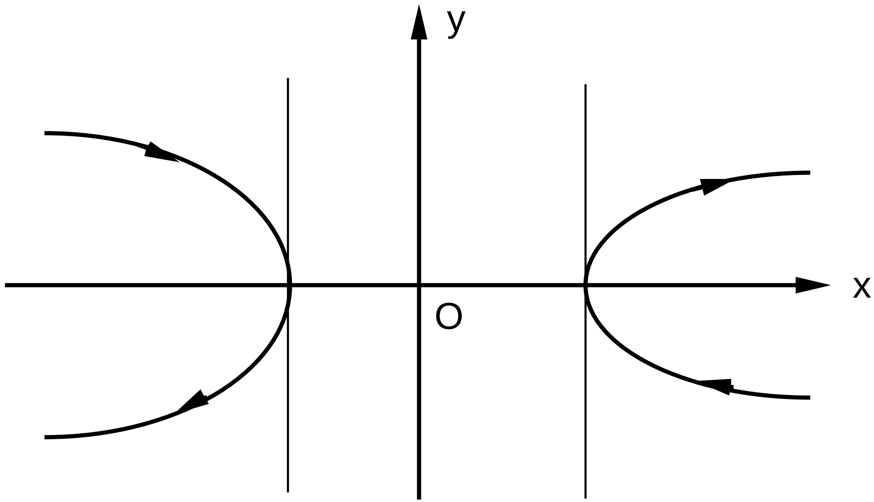

Fig. 4 - Punti di inversione del moto

Sistemi autonomi conservativi: curve di livello dell'energia

Se il sistema, oltre ad essere autonomo è anche *conservativo,* allora le forze si possono esprimere mediante un potenziale $U(x)$, e quindi, come in genere si preferisce fare trattando i sistemi dinamici, mediante l'energia potenziale $V(x) = -U(x)$, funzioni in questo caso del solo parametro x. Esaminiamo prima il caso di un punto e poi il caso di un sistema olonomo.

i) *Punto materiale*

Nel caso di un punto, soggetto a forza conservativa l'equazione delle curve integrali assume la forma seguente:

$$y' = -\frac{1}{m\,y}\,V'(x) \tag{12}$$

Avendo denotato con l'apice la derivata rispetto a x.

Possiamo rsicriverla nella forma:

$$m\,y\,y' = -V'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\,m\,y^2 + V(x)\right] = 0$$

Da cui, integrando:

$$\frac{1}{2}\,m\,y^2 + V(x) = costante$$

Ma $y = \dot{x}$ è la velocità del punto, e quindi l'equazione precedente esprime l'integrale primo dell'energia meccanica.

`Le` *curve integrali* `per un punto soggetto a` *forza conservativa* `sono le` *curve di livello dell'energia meccanica*`, cioè le curve lungo le quali l'energia mantiene valore costante`

Possiamo riscrivere l'equazione delle curve di lvello indicando la costante con il valore dell'energia:

$$\frac{1}{2} m\, y^2 + V(x) = E \tag{13}$$

Lo studio dell'andamento delle curve di livello si può condurre esplicitando rispetto ad y *(metodo di Weierstrass):*

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\,[E - V(x)]} \tag{14}$$

dalla quale l'andamento delle curve di livello può essere dedotto dall'andamento dell'energia potenziale.

La condizione di realtà della radice quadrata:

$$E - V(x) \geq 0$$

fornisce le informazioni relative agli *intervalli permessi* per le poszioni x del punto.

• Il dominio di realtà della radice può essere non connesso, con la conseguenza che possono esistere, in corrispondenza di un valore assegnato dell'energia, più rami (traiettorie di fase) separati delle curve integrali, i cui punti sono raggiungibili solo partendo da condizioni iniziali appartenenti allo stesso ramo.

• Al variare di E si ottiene l'intera famiglia delle curve integrali del moto del punto.

Esempio: Oscillatore armonico semplice

L'energia potenziale è:

$$V(x) = \frac{1}{2}\,k^2x^2 = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2x^2, \qquad \omega^2 = \frac{k^2}{m}$$

Quindi l'integrale primo dell'energia si esprime come:

$$\frac{1}{2}\,m\,y^2 + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2x^2 = E$$

Possiamo scrivere in una forma meglio leggibile dal punto di vista geometrico questo risultato:

$$\frac{x^2}{\frac{2\,E}{m\,\omega^2}} + \frac{y^2}{\frac{2\,E}{m}} = 1$$

• Le curve di livello dell'energia sono delle *ellissi* il cui centro è l'origine del piano delle fasi e i cui assi di simmetria sono gli assi cartesiani del piano delle fasi. L'origine rappresenta un *punto fisso* del sistema meccanico (punto di equilibrio).

• Le curve di livello non si intersecano e sono curve *chiuse* includenti il punto di equilibrio stabile del sistema.

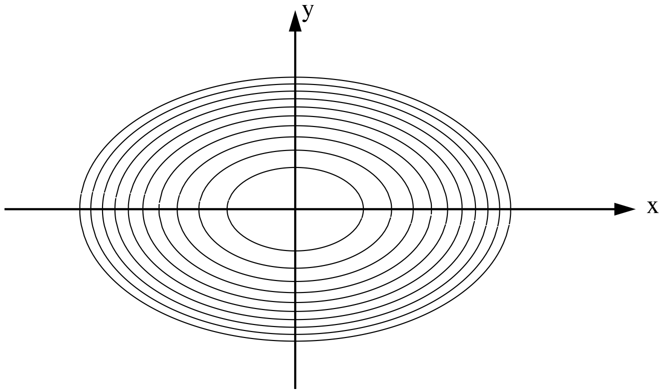

Fig. 5 - Curve di livello ell'energia dell'oscillatore armonico semplice

ii) *Sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo*

Affinchè il sistema delle equazioni differenziali sia *autonomo*, occorre che i *vincoli* siano *indipendenti dal tempo* e quindi anche l'energia potenziale deve essere indipendente dal tempo.

In questo caso, tenendo conto del risultato generale (5) e del fatto che:

$$Q(x) = U'(x) = -V'(x)$$

l'equazione delle curve integrali si scrive:

$$y' = -\frac{1}{a(x)\,y}\left[V'(x) + \frac{1}{2}\,a'(x)\,y^2\right] \tag{15}$$

abbiamo:

$$a(x)\,y\,y' + \frac{1}{2}\,a'(x)\,y^2 + V'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\,\left[\frac{1}{2}\,a(x)\,y^2 + V(x)\right] = 0$$

Essendo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\,a(x)\,y^2\right] = a(x)\,y\,y' + \frac{1}{2}\,a'(x)\,y^2$$

Dunque le curve integrali sono caratterizzate dall'equazione:

$$\frac{1}{2}\,a(x)\,y^2 + V(x) = costante$$

che rappresenta l'integrale primo dell'energia del sistema olonomo, essendo:

$$T = \frac{1}{2}\,a(x)\,\dot{x}^2$$

Otteniamo allora la generalizzazione al sistema olonomo del risultato ottenuto per il punto.

> `Le` *curve integrali* `per un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, soggetto a ad un sistema di forze` *conservativo*`, sono le` *curve di livello dell'energia*

$$\frac{1}{2}\,a(x)\,y^2 + V(x) = E \tag{16}$$

In forma esplicita si ha in questo caso:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{a(x)}\,\left[E - V(x)\right]} \tag{17}$$

Essendo $a(x) > 0$.

Ogni curva di livello è identificata dal valore dell'energia che corrisponde al moto ad essa associato. Ne viene di conseguenza che: *due curve di livello relative a differenti valori dell'energia non hanno punti in comune.*

Infatti, i punti d'intersezione di due curve di livello relative ad energie distinte E_1, E_2 sono dati dalle soluzioni, se esistono, del sistema algebrico:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\, a(x)\, y^2 + V(x) = E_1 \\ \\ \frac{1}{2}\, a(x)\, y^2 + V(x) = E_2 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima otteniamo $E_1 - E_2 = 0$ contrariamente all'ipotesi che le energie siano distinte.

Dunque le due curve non si intersecano in alcun punto.

Andamento di V(x) e curve di livello dell'energia

Studiamo ora il comportamento delle curve di livello dell'energia in dipendenza del comportamento dell'energia potenziale $V(x)$ del sistema conservativo.

i) $V(x)$ monotona crescente (decrescente)

$\longrightarrow$ *analisi degli zeri della funzione* $E - V(x)$

Se $V(x)$ è una funzione crescente $\nearrow$ è possibile determinare, per ogni valore assegnato dell'energia meccanica E, *una sola soluzione* x_E dell'equazione:

$$V(x) = E \qquad \Longrightarrow \qquad x_E = V^{-1}(E)$$

grazie alla *biunivocità* della funzione che può essere invertita in tutto il dominio di monotonia.

• La soluzione ha molteplicità $M = 1$ in quanto $V'(x_E) \neq 0$ grazie alla monotonia della $V(x)$.

• L'accelerazione del moto non è nulla e il punto x_E rappresenta un

$\diamond\diamond\diamond$ `punto di inversione del moto` $\diamond\diamond\diamond$

$\longrightarrow$ *La condizione di realtà*

della radice quadrata nella (17) è soddisfatta a condizione che:

$$x \leq x_E \tag{18}$$

condizione che identifica l'intervallo delle x permesso durante il moto.

$\longrightarrow$ *tangente*

Nel punto di inversione la *tangente* alla curva di livello è *verticale*.

Assegnando valori diversi all'energia si ottengono altrettante curve di livello con altrettanti punti di inversione.

Qualora la $V(x)$ fosse decrescente nella (18) si scambia il segno di $\leq$ con quello di $\geq$ e il grafico diviene simmetrico rispetto ad un esse verticale.

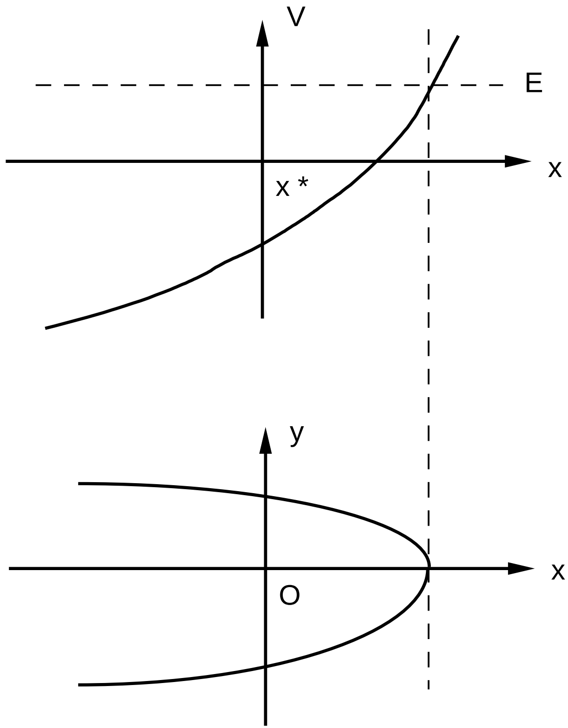

Fig. 6 - Curve di livello ell'energia corrispondenti a $V(x)$ crescente

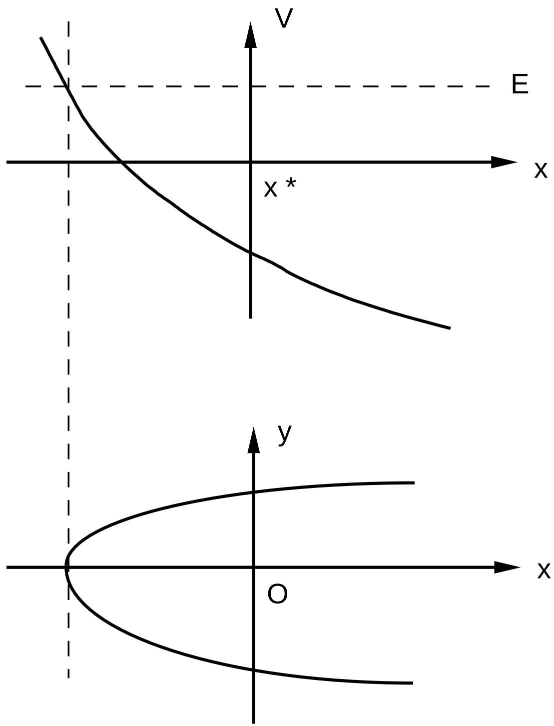

Fig. 7 - Curve di livello ell'energia corrispondenti a $V(x)$ decrescente

ii) $V(x)$ dotata di un massimo relativo stretto

Quando $V(x)$ è massima in un punto x^* si ha un punto di equilibrio (punto fisso) instabile (potenziale minimo).

Indicando con $V^* = V(x^*)$ il valore massimo dell'energia potenziale, distinguiamo tre casi.

a) $E < V^*$

$\longrightarrow$ *la condizione di realtà*

della radice in (17) è soddisfatta in *due intervalli disgiunti*:

$$x \leq x_E^{(1)}, \qquad x \geq x_E^{(2)}$$

In quanto la disequazione:

$$E - V(x) \geq 0$$

ammette due sole soluzioni del tipo esaminato nel caso dell'energia potenziale monotona, perchè l'energia potenziale è monotona crescente per $x < x^*$ e monotona decrescente per $x > x^*$ equindi la retta di equazione $V = E$ ha due intersezioni distinte con la curva dell'energia potenziale. I due punti $x_E^{(1)}, x_E^{(2)}$ sono due punti di inversione del moto e il moto non è permesso nell'intervallo compreso tra essi.

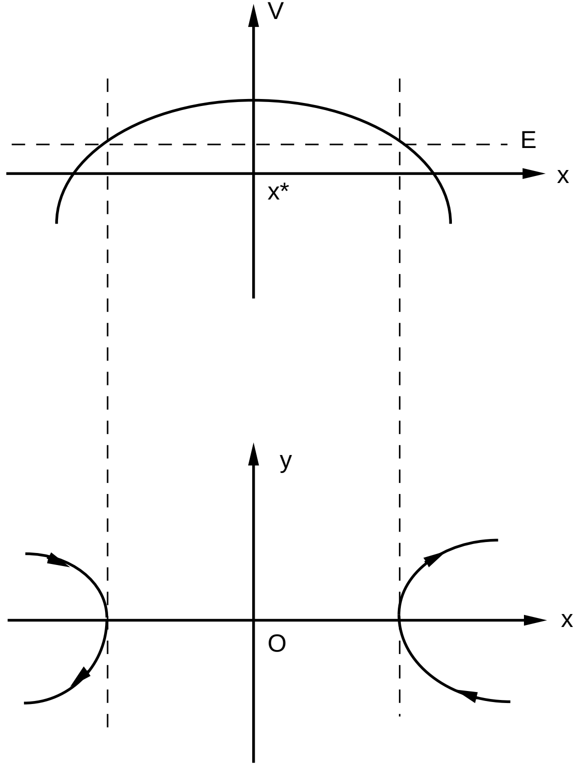

Fig. 8 - Curve di livello ell'energia in corrispondenza a un massimo di $V(x)$ - Caso $E < V^*$

b) $E > V^*$

In questo caso la

$\longrightarrow$ *condizione di realtà*

della radice in (17) *è sempre soddisfatta* e tutto l'asse delle x può essere percorso dal moto, in quanto si ha:

$$V(x) \leq V^* \qquad \Longrightarrow \qquad E - V(x) \geq E - V^* > 0$$

La curva di livello relativa all'energia E possiede *due rami, corrispondenti* al segno positivo e negativo nella (17), che non possono connettersi tra loro, perchè non hanno intersezioni con l'asse delle ascisse in quanto non può mai verificarsi la condizione di intersezione $E - V(x) = 0$.

Mentre si ha un'intersezione, con la retta di equazione $x = x^*$ che per comodità possiamo identificare come asse y, per ogni ramo, corrispondente alle ordinate:

$$y_\pm = \pm\sqrt{\frac{2}{a(x^*)}\,(E - V^*)}$$

$\longrightarrow$ *La tangente*

nei punti di intersezione ha coefficiente angolare, dato dall'equazione delle curve integrali, che, vale:

$$y'_\pm = -\,\frac{a'(x^*)\,y_\pm}{2\,a(x^*)}$$

in quanto, in un punto di massimo dell'energia potenziale $V'(x^*) = 0$.

Nel caso in cui $a(x) = costante$, come avviene per esempio per un punto, la y assume minimo modulo nel punto di intersezione, in quanto, altrove $E - V(x) > E - V(x^*)$ e la $y'_\pm$ si annulla; quindi la tangente risulta orizzontale.

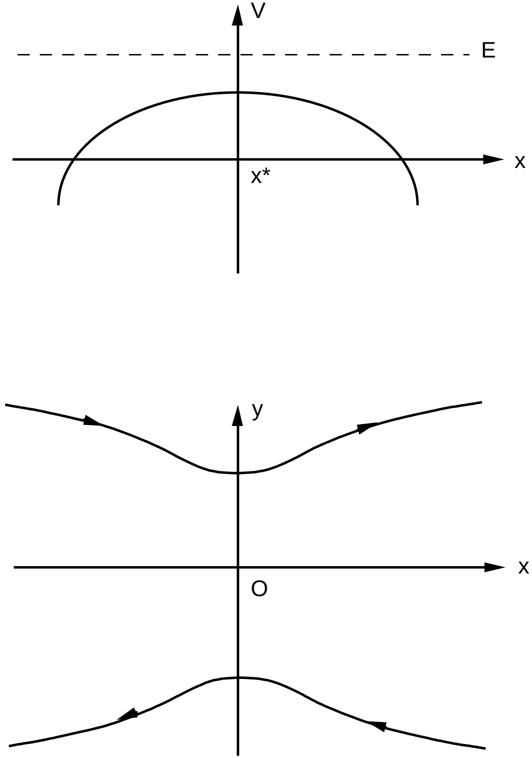

Fig. 9 - Curve di livello ell'energia in corrispondenza a un massimo di $V(x)$ - Caso $E > V^*$

c) $E = V^*$ – curve separatrici

Siamo nel caso limite tra i due precedenti. In questo caso, come nel precedente

$\longrightarrow$ *la condizione di realtà*

della radice in (17) *è sempre soddisfatta* e tutto l'asse delle x può essere percorso dal moto, in quanto si ha:

$$V(x) \leq V^* \qquad \Longrightarrow \qquad E - V(x) = V^* - V(x) \geq 0$$

La radice x^* dell'equazione:

$$V(x) = E$$

ha *molteplicità* $M = 2$, come si verfica tenendo conto che la funzione da annullare è:

$$f(x) = V(x) - E \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x^*) = V'(x^*) = 0$$

La retta di equazione $y = E$ e la curva dell'energia potenziale hanno un contatto del primo ordine in x^*, e sono quindi tangenti.

La curva di livello corrispondente ha equazione:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{a(x)}\,[V^* - V(x)]} \tag{19}$$

• I due rami corrispondenti ai due segni, hanno in comune solo un punto di fase, di coordinate $(x^*, 0)$. Si noti che questo è un *punto fisso*, essendo un punto di equilibrio, e quando viene assegnato come condizione iniziale esso coincide con la traiettoria di fase (quiete).

I due rami della curva di livello così caratterizzata prendono il nome di *curve separatrici.*

$\longrightarrow$ *Le tangenti*

alla curva di livello nel punto fisso sono *indeterminate*, come si vede esaminando la (15), a causa del fatto che i due rami delle separatrici, incontrandosi nel punto fisso, danno luogo a due tangenti nello stesso punto.

L'indeterminazione $\frac{0}{0}$ si elimina con il metodo di De L'Hospital, considerando il rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore delle (15):

$$y'_{\pm} = \lim_{x \to x^*} \left\{ - \frac{V'(x) + \frac{1}{2}\, a'(x)\, y^2}{a(x)\, y} \right\} =$$

$$= \lim_{x \to x^*} \left\{ - \frac{V''(x) + \frac{1}{2}\, a''(x)\, y^2 + a'(x)\, y\, y'}{a'(x)\, y + a(x)\, y'} \right\} = - \frac{V''(x^*)}{a(x^*)\, y'_{\pm}}$$

da cui si ricava:

$$y'_{\pm} = \pm \sqrt{- \frac{V''(x^*)}{a(x^*)}} \tag{20}$$

Come si vede esistono *due tangenti* alle separatrici nel punto di fase $(x^*, 0)$.

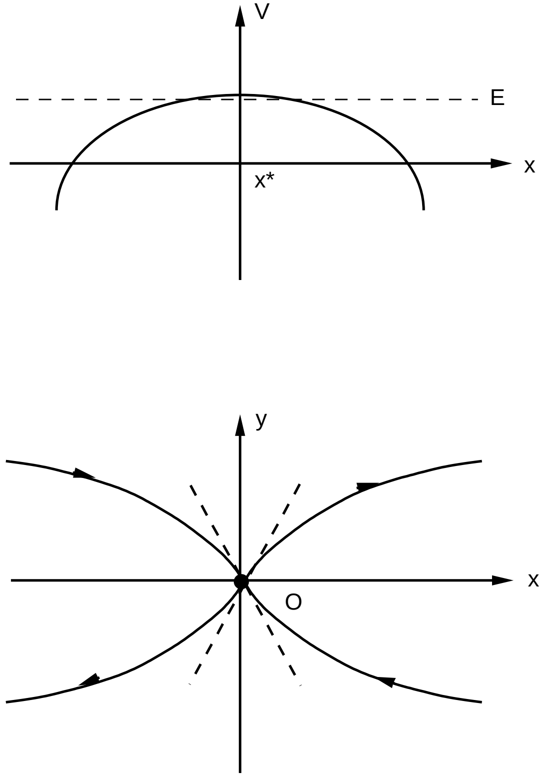

Fig. 10 - Curve di livello ell'energia in corrispondenza a un massimo di $V(x)$ - Caso $E = V^*$

Conglobando i risultati relativi a tutti gli intervalli dell'energia meccanica otteniamo il diagramma di fase nell'intorno di un punto di massimo dell'energia potenziale (punto di equilibrio instabile).

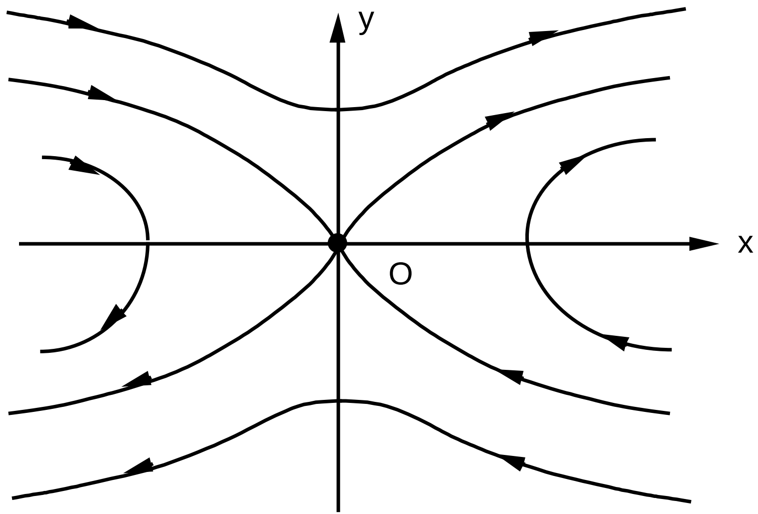

Fig. 11 - Curve di livello ell'energia in punto di sella

• I punti di *equilibrio instabile* rappresentano dei *punti di sella* per l'energia meccanica del sistema.

Infatti, considerata la funzione:

$$E(x,y) = \frac{1}{2}\,a(x)\,y^2 + V(x)$$

in corrispondenza di un massimo dell'energia potenziale in x^*, e imponendo $y = 0$ abbiamo:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\,a'(x)\,y^2 + V'(x), \qquad \frac{\partial E}{\partial y}(x,y) = a(x)\,y$$

E questo comporta:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(x^*, 0) = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial y}(x^*, 0) = 0$$

Esaminando le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{2}\, a''(x)\, y^2 + V''(x), \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(x, y) = a'(x)\, y$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x, y) = a(x)$$

Da cui:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x^*, 0) = V''(x^*) < 0, \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}(x^*, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}(x^*, 0) = a(x^*) > 0$$

essendo in un punto di massimo per l'energia potenziale, ed essendo sempre positiva la $a(x)$. Allora la matrice hessiana di E non è definita di segno e siamo in un punto di sella:

$$\begin{pmatrix} V''(x^*) & 0 \\ \\ 0 & a(x^*) \end{pmatrix}$$

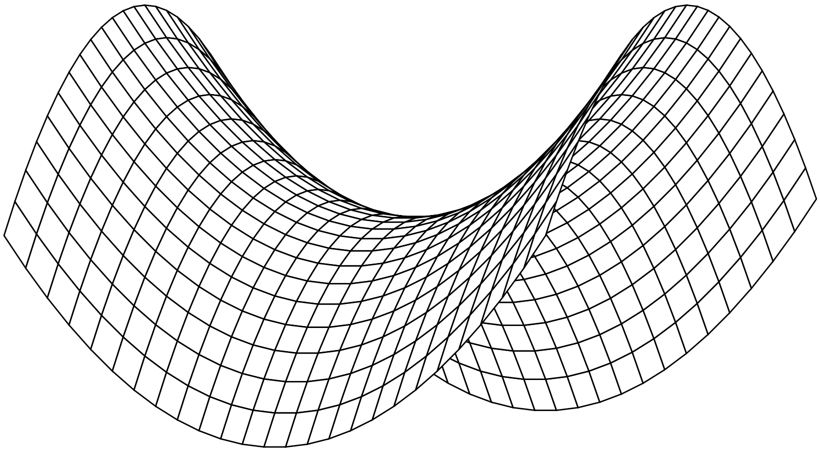

Fig. 12 - Punto di sella della funzione $E(x, y)$

iii) $V(x)$ dotata di un minimo relativo stretto

Quando $V(x)$ è minima in un punto x^* si ha un punto di equilibrio (punto fisso) stabile (potenziale massimo). Indicando con $V^* = V(x^*)$ il valore minimo dell'energia potenziale, distinguiamo anche qui tre casi.

a) $E < V^*$

In questo caso

→ *la condizione di realtà*

della radice non è *mai soddisfatta*, in quanto:

$$V(x) \geq V^* \implies -V(x) \leq -V^* \implies E - V(x) \leq E - V^* < 0$$

E quindi la disequazione:

$$E - V(x) \geq 0$$

non ammette soluzioni e non vi sono intersezioni tra la retta di equazione $y = E$ e la curva dell'energia potenziale.

In questo intervallo di energia il moto non è permesso.

---

b) $E > V^*$

In questo caso

$\longrightarrow$ *la condizione di realtà*

della radice ammette sempre due radici distinte $x_E^{(1)}, x_E^{(2)}$, corrispondenti alle due intersezioni della retta di equazione $y = E$ con la curva dell'energia potenziale; e dal momento che $V(x)$ è monotona crescente per $x > x^*$ e monotona decrescente per $x < x^*$ il moto può avvenire solo nell'intervallo:

$$x_E^{(1)} \leq x \leq x_E^{(2)}$$

La curva di livello relativa all'energia E possiede anche due intersezioni con la retta $x = x^*$ che per comodità possiamo identificare come asse y, corrispondenti alle ordinate:

$$y_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{2}{a(x^*)}\,(E - V^*)}$$

e quindi i due rami si raccordano in un'unica curva chiusa.

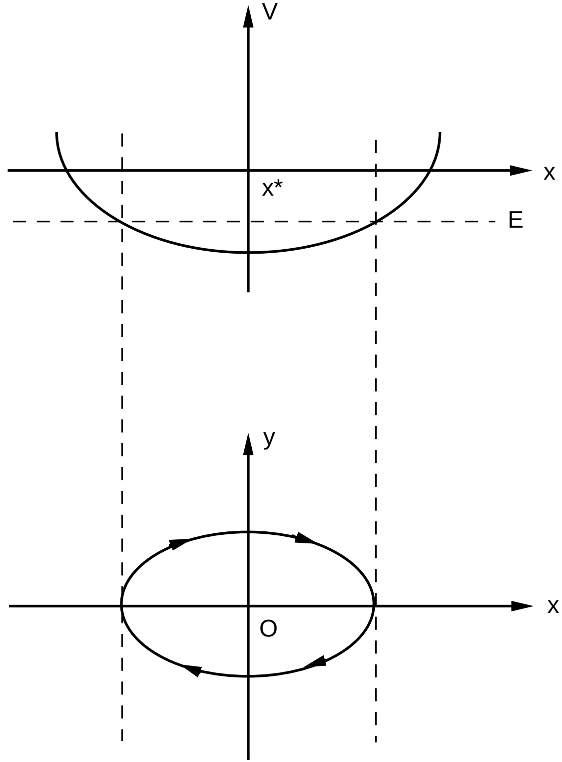

Fig. 13 - Curve di livello ell'energia in corrispondenza a un minimo di $V(x)$ - Caso $E > V^*$

$\longrightarrow$ *La tangente*

nei punti di intersezione ha coefficiente angolare, dato dall'equazione delle curve integrali, che vale:

$$y'_{\pm} = -\,\frac{a'(x^*)\,y_{\pm}}{2\,a(x^*)}$$

in quanto, in un punto di minimo dell'energia potenziale $V'(x^*) = 0$.

• Nel caso in cui $a(x) = costante$, come avviene per esempio per un punto, la y assume massimo modulo nel punto di intersezione, in quanto, altrove $E - V(x) < E - V(x^*)$ e la $y'_{\pm}$ si annulla; quindi la tangente risulta orizzontale.

◊ Una curva integrale *chiusa* comporta che il moto sia periodico,

perchè ripassa per gli stessi punti di fase, cioè nelle stesse posizioni e con la stessa velocità dopo uno stesso tempo, che si dice periodo del moto.

Data la simmetria delle velocità rispetto ai punti della traiettoria, il *periodo* si può calcolare come:

$$T = 2 \int_{x_E^{(1)}}^{x_E^{(2)}} \frac{dx}{y(x)} = 2 \int_{x_E^{(1)}}^{x_E^{(2)}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{a(x)} \, [E - V(x)]}}$$

c) $E = V^*$

$\longrightarrow$ *la condizione di realtà*

della radice, unitamente alla condizone di minimo relativo, comporta:

$$\begin{cases} E - V(x) = V^* - V(x) \geq 0 \\ \\ V^* - V(x) \leq 0 \end{cases}$$

E quindi esiste l'unica *radice* x^* dell'equazione:

$$V(x) = E$$

che ha *molteplicità* $M = 2$, in quanto la retta di equazione $y = E$ e la curva dell'energia potenziale hanno un contatto del primo ordine in x^*, e sono tangenti.

L'unico punto di fase permesso per il moto è il *punto fisso* $(x^*, 0)$ che rappresenta *l'unica traiettoria di fase* possibile (quiete).

Conglobando i risultati relativi a tutti gli intervalli dell'energia meccanica otteniamo il diagramma di fase nell'intorno di un punto di massimo dell'energia potenziale (punto di equilibrio stabile).

- *Un punto di equilibrio stabile prende il nome di centro.*

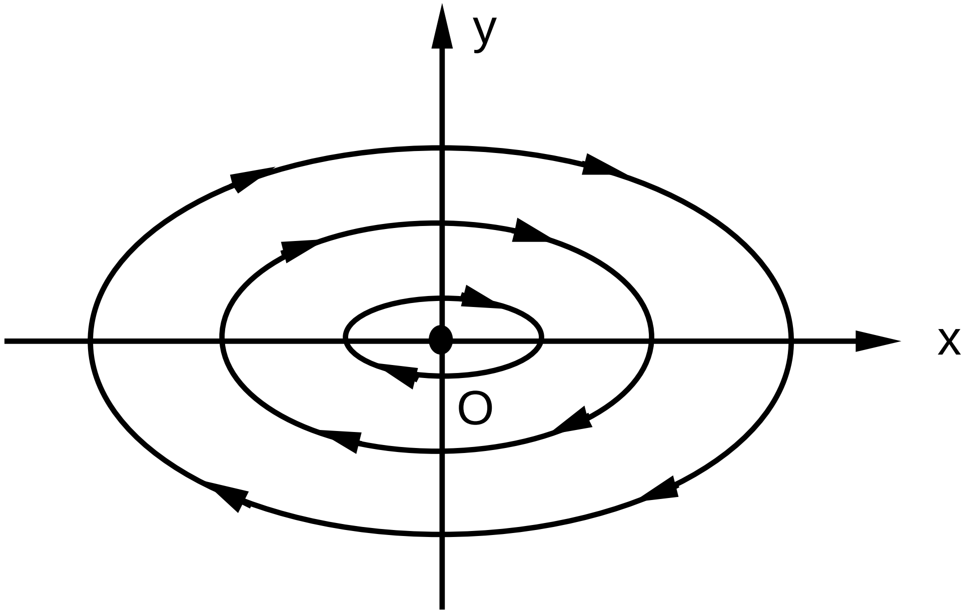

Fig. 14 - Centro stabile

• I punti di *equilibrio stabile* rappresentano dei *punti di minimo* per l'energia meccanica del sistema.

I calcoli sono identici al caso del punto di sella, con la differenza che ora $V''(x^*) > 0$ trattandosi di un punto di minimo dell'energia potenziale. Ne viene di conseguenza che la matrice hessiana dell'energia meccanica è definita positiva:

$$\begin{pmatrix} V''(x^*) & 0 \\ \\ 0 & a(x^*) \end{pmatrix}$$

e quindi siamo in un punto di minimo dell'energia.

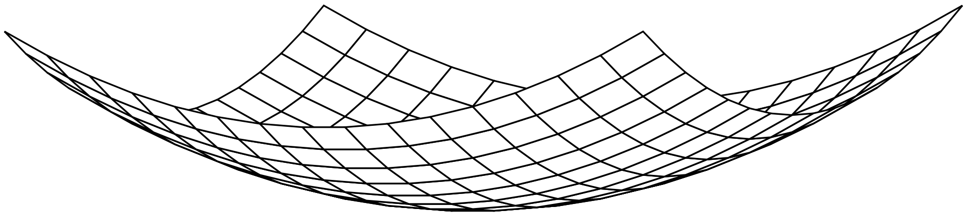

Fig. 15 - Punti di minimo della funzione $E(x, y)$

iv) $V(x)$ dotata di un flesso ascendente (discendente) con tangente orizzontale

Quando $V(x)$ presenta un f*lesso ascendente*, con *tangente orizzontale*, in un punto x^* si ha un punto di equilibrio (*punto fisso*) che si comporta come fosse stabile rispetto a spostamenti positivi e instabile rispetto a spostamenti negaitvi, in un intorno del punto; e quindi, complessivamente risulta essere instabile.

Indicando con $V^* = V(x^*)$ il valore dell'energia potenziale nel punto di flesso, distinguiamo, come al solito, tre casi.

a) $E < V^*$

Questo caso si presenta identico al caso in cui $V(x)$ è *monotona crescente* e valgono tutte le considerazioni svolte al punto i).

Esiste un *punto di inversione del moto* $x_E < x^*$

e il moto si può realizzare solo nella regione $x \leq x_E$.

Non esistono intersezioni della curva di livello con la retta di equazione $x = x^*$.

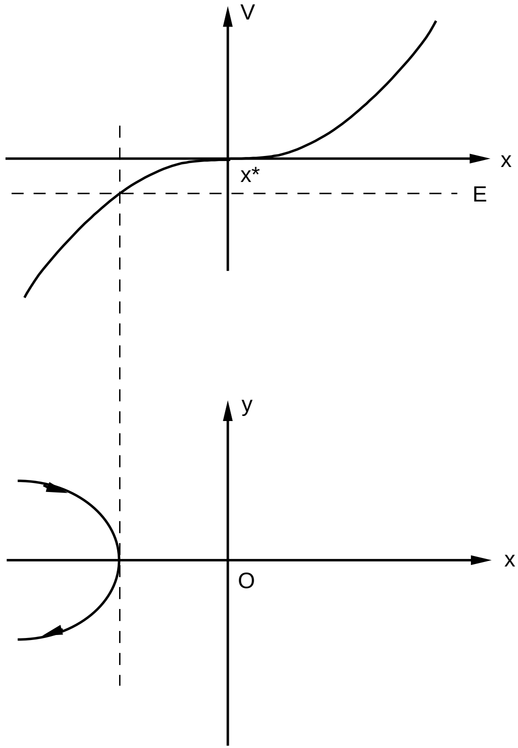

Fig. 16 - Curve di livello ell'energia in corrispondenza a un flesso ascendente di $V(x)$ - Caso $E < V^*$

b) $E > V^*$

Anche in questo caso il comportamento è *simile* a quello che si ha con $V(x)$ *monotona*, e quindi esiste un solo *punto di inversione* $x_E > x^*$ in corrispondenza di ogni valore dell'energia meccanica.

• La funzione $V(x)$ *non è strettamente crescente dappertutto*, in quanto nel *punto di flesso* la sua derivata si annulla.

Esistono due punti di intersezione della curva di livello con la retta $x = x^*$, che possiamo scegliere coincidente con l'asse y, le cui ordinate valgono:

$$y_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{2}{a(x^*)}\,[E - V^*]}$$

La derivata di y nei punti di intersezione vale:

$$y'_{\pm} = -\,\frac{a'(x^*)\,y_{\pm}}{2\,a(x^*)}$$

• Quando $a(x) = costante$, come nel caso di un punto materiale, la tangente nei punti di intersezione è orizzontale,

in quanto $y' = 0$ e i rami della curva di livello

— che sono rispettivamente decresente nel semipiano $y > 0$ e crescente nel semipano $y < 0$, come nel caso di $V(x)$ strettamente crescente —

presentano, di conseguenza, dei flessi nei punti di intersezione con l'asse y.

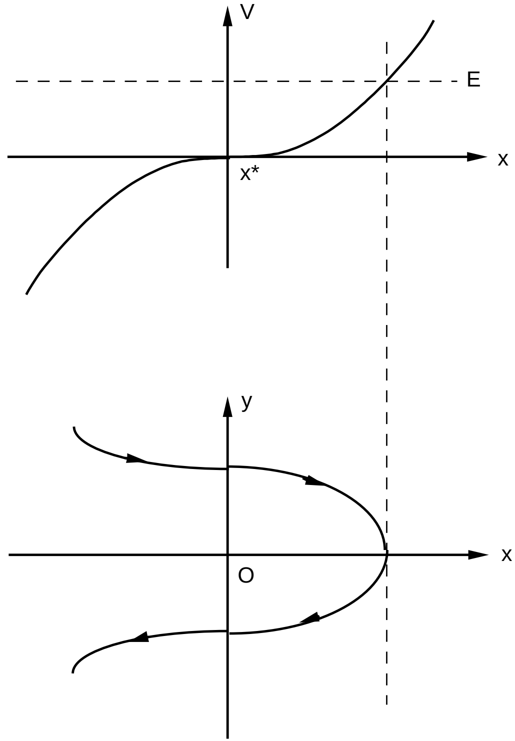

Fig. 17 - Curve di livello ell'energia in corrispondenza a un flesso ascendente di $V(x)$ - Caso $E > V^*$

c) $E = V^*$

Data la condizione di non decrescenza della funzione $V(x)$, dalla

$\longrightarrow$ *condizione di realtà*

della radice:

$$E - V(x) = V^* - V(x) \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^* \geq x$$

segue che il moto può avvenire solo nella regione $x \leq x^*$.

La radice dell'equazione:

$$V(x) = E$$

è allora x^* e ha *molteplicità* $M = 3$, dal momento che la funzione da annullare è:

$$f(x) = V(x) - E \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x^*) = V'(x^*) = 0, \quad f''(x^*) = V''(x^*) = 0$$

La retta di equazione $y = E$ e la curva dell'energia potenziale hanno un contatto del secondo ordine in x^*, e sono quindi tangenti.

- Il punto $(x^*, 0)$ è una *cuspide* ed è un punto di equilibrio instabile.

La curva di livello corrispondente ha equazione:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{a(x)}\,[V^* - V(x)]} \tag{21}$$

Come si vede facilmente i due rami corrispondenti ai due segni, hanno in comune solo il punto di fase di coordinate $(x^*, 0)$.

• Si noti che questo è un *punto fisso*, essendo un punto di equilibrio, e quando viene assegnato come condizione iniziale esso coincide con la traiettoria di fase (quiete).

$\longrightarrow$ *La tangente*

alla curva di livello nella cuspide è *indeterminata*, come si vede esaminando la (15)

e l'indeterminazione $\frac{0}{0}$ si elimina con le stesso metodo utilizzatato per le curve separatrici.

I calcoli sono gli stessi, ma ora $V''(x^*) = 0$ e quindi le due tangenti sono coincidenti tra loro e con l'asse delle ascisse:

$$y'_{\pm} = \pm\sqrt{-\frac{V''(x^*)}{a(x^*)}} = 0$$

• Nella cuspide la *tangente* è doppia e orizzontale •

Conglobando i risultati relativi a tutti gli intervalli dell'energia meccanica otteniamo il diagramma di fase nell'intorno di un punto di flesso dell'energia potenziale (punto di equilibrio instabile).

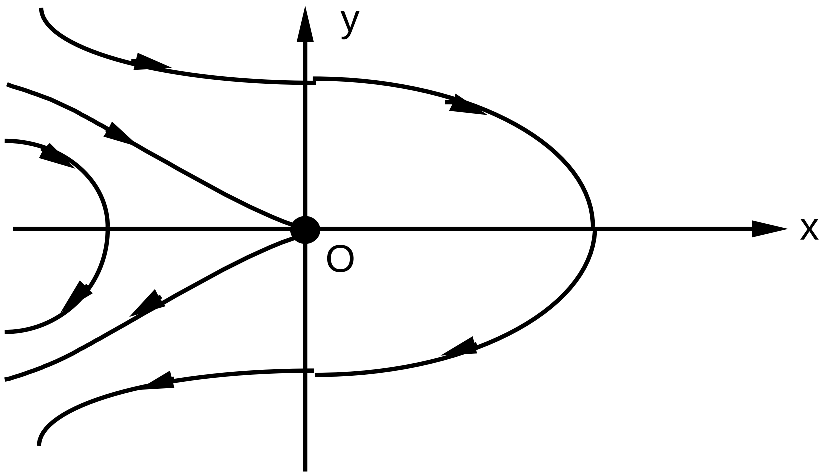

Fig. 18 - Cuspide instabile corrispondente ad un flesso ascendente di $V(x)$

Qualora si consideri un flesso discendente il diagramma diviene simmetrico rispetto all'asse delle y.

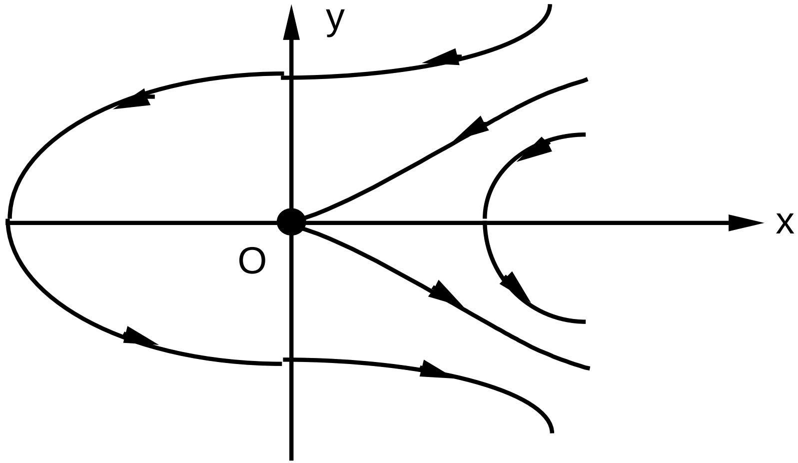

Fig. 19 - Cuspide instabile corrispondente ad un flesso discendente di $V(x)$

v) $V(x)$ dotata di massimi e minimi alternati

Basandosi sui risultati prececenti è possibile

$\longrightarrow$ trattare casi più complicati in cui *massimi* e *minimi* e *flessi* di $V(x)$ si combinano fra loro.

Bisogna, in ogni caso, considerare separatamente gli *intervalli dell'energia* meccanica totale determinati dai valori che l'energia potenziale assume in corrispondenza dei massimi, dei minimi e dei flessi.

I grafici illustrano i casi di un massimo compreso fra due minimi e di un minimo compreso fra due massimi.

- Si noti che quando sono presenti più *punti di sella* si hanno

tante *curve separatrici distinte* quanti sono i *massimi* di $V(x)$ *distinti*.

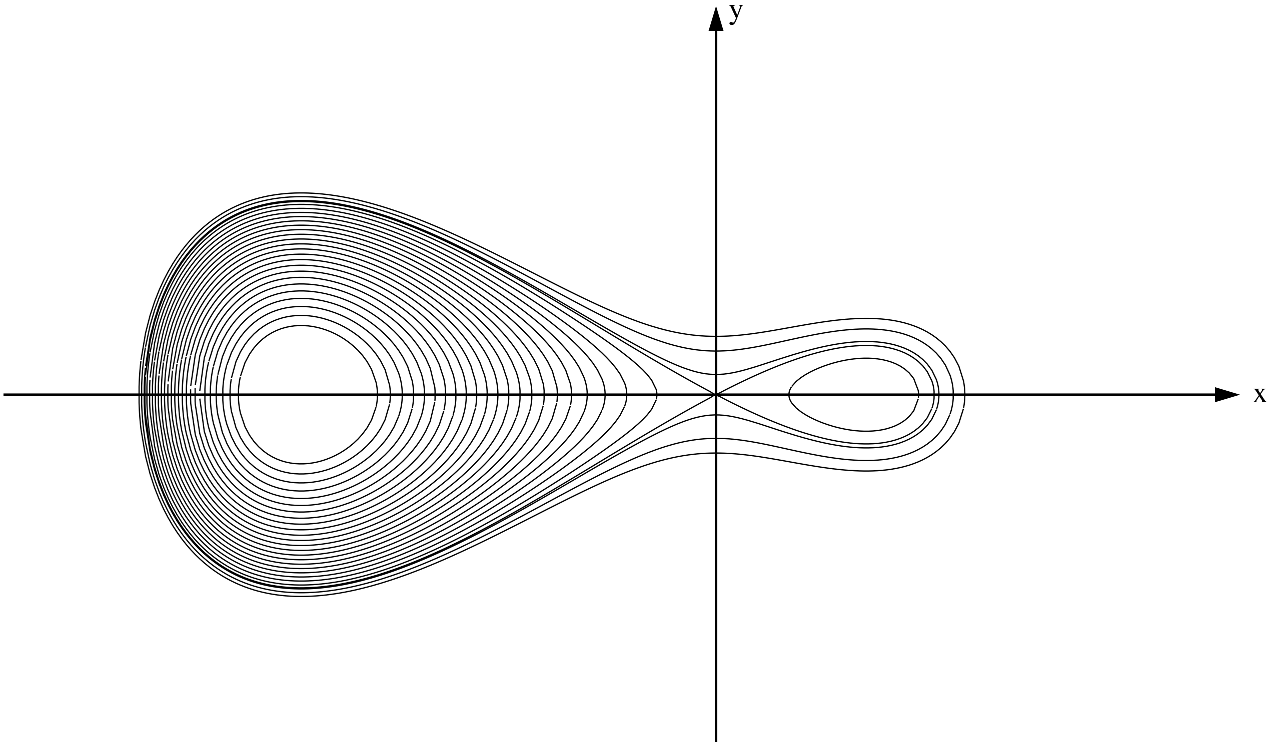

Fig. 20 - Diagramma di fase con due centri stabili e un punto di sella instabile alternati

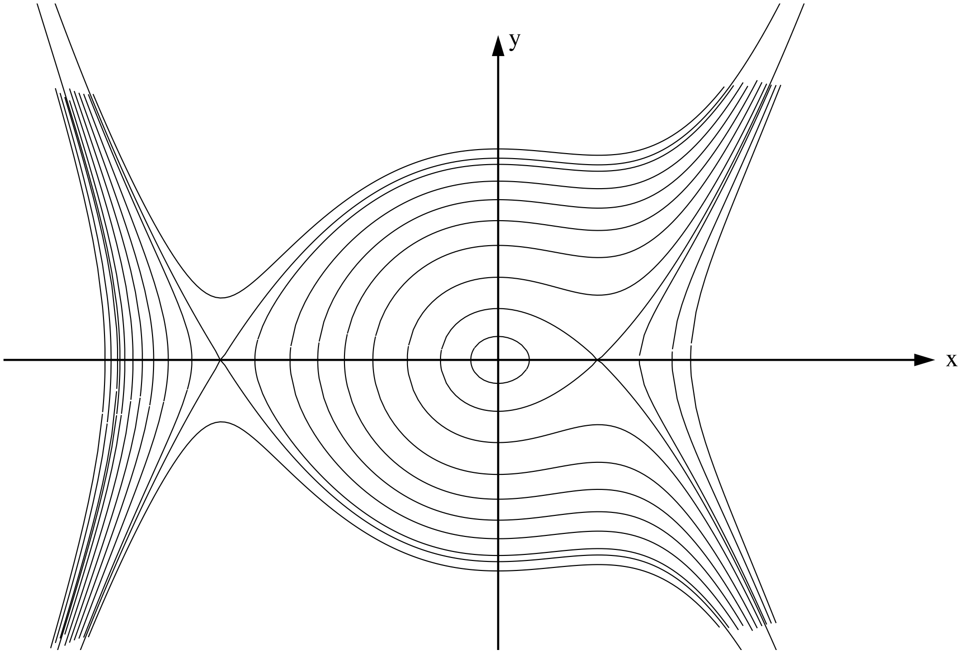

Fig. 21 - Diagramma di fase con due punti di sella instabili e un centro stabile alternati

Diagramma di fase del pendolo semplice

Il pendolo semplice è caratterizzato dall'energia potenziale:

$$V(\vartheta) = -m\,g\,\ell cos\,\vartheta$$

E l'integrale primo dell'energia è dato da:

$$\frac{1}{2}m\,\ell^2\,\dot{\vartheta}^2 -\ m\,g\,\ell cos\,\vartheta = E$$

Le variabili che caratterizzano lo stato del pendolo sono allora $x = \vartheta,\ y = \dot{\vartheta}$. Di conseguenza l'equazione delle curve di livello dell'energia si ottengono trascrivendo l'integrale primo dell'energia in termini di queste variabili:

$$\frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, y^2 - \; m\, g\, \ell cos\, x = E$$

Esplicitando y si ha:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{m\, \ell^2}\, (E + m\, g\, \ell\, cos\, x)}$$

essendo $a(x) = m\, \ell^2$.

$\longrightarrow$ *I punti fissi*

sono dati dall'annullarsi della derivata prima dell'energia potenziale e sono alternativamente punti di massimo (punti di sella instabili) e punti di minimo (centri stabili). Infatti abbiamo:

$$V'(x) = m\,g\ell\,sen\,x, \qquad V''(x) = m\,g\ell\,cos\,x$$

$V'(x)$ si annulla per $x = k\,\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$.

$$V''(k\,\pi) = (-1)^k\,m\,g\ell$$

Seguono i seguenti risultati:

$$\begin{cases} x = 2\,k\,\pi, \qquad V^*_{2k} = -\,m\,g\,\ell \qquad minimi\ (centri\ stabili) \\ \\ x = (2\,k+1)\,\pi, \qquad V^*_{2k+1} = m\,g\,\ell \qquad massimi\ (selle\ instabili) \end{cases}$$

• I valori dei massimi di $V(x)$ sono tutti uguali, per cui le due curve separatrici sono comuni a tutti punti di sella.

$\longrightarrow$ *L'equazione delle curve separatrici*

si otteniene imponendo all'energia meccanica totale il valore del massimo dell'energia potenziale $m\,g\,\ell$. Abbiamo perciò:

$$y = \pm\sqrt{\frac{2\,g}{\ell}\,(1 + cos\,x)} = \pm\,2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,cos\,\frac{x}{2}$$

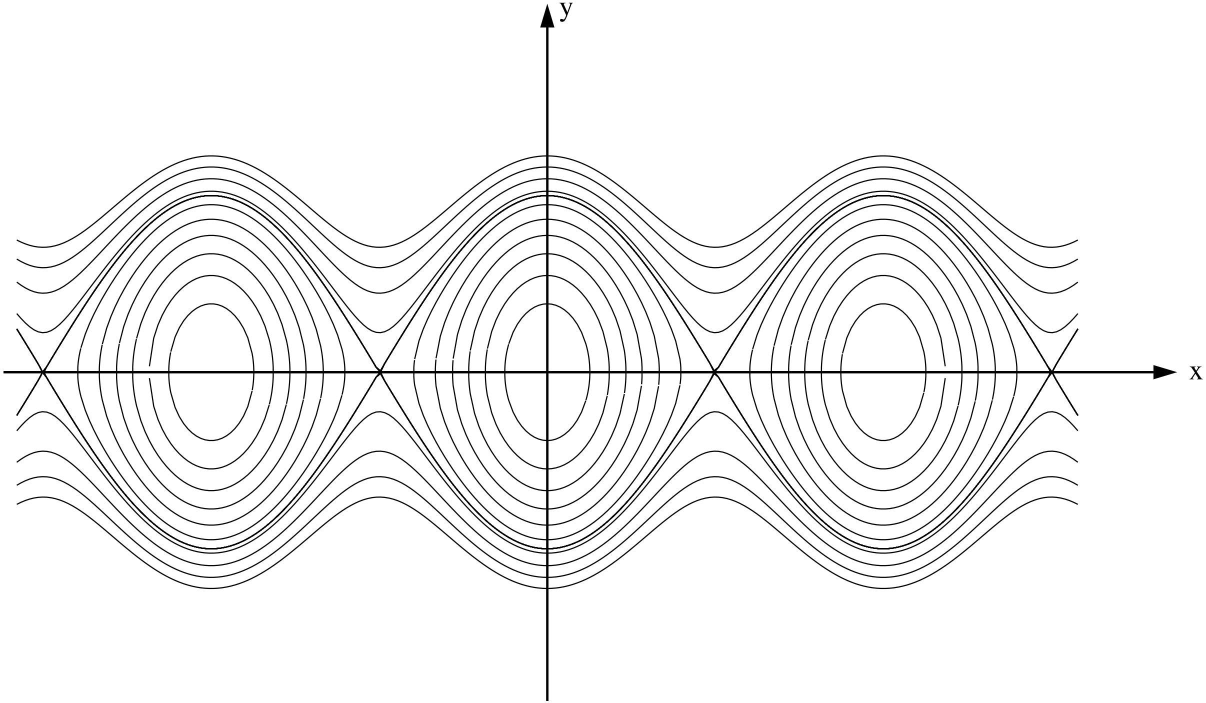

Fig. 22 - Diagramma di fase del pendolo semplice

Si osserva come, nell'introno di un centro stabile, per esempio l'origine del piano delle fasi, le curve di livello si approssimano a delle ellissi, cioè alle curve di livello di un oscillatore armonico semplice. Infatti, nel caso di piccole oscilazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile, le equazioni del moto del pendolo si approssimano come è noto, alle equazioni di un oscillatore armonico semplice di frequenza:e

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

e le relative curve di livello, in questa approssimazione, hanno equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a^2 = \frac{2\,(E + m\,g\,\ell)}{m\,g\,\ell}, \qquad b^2 = \frac{2\,(E + m\,g\,\ell)}{m\,\ell^2}$$

* * *