

Equazioni di Hamilton

Osservazione di carattere preliminare

Consideriamo un sistema differenziale costituito da N equazioni ciascuna del secondo ordine, in forma normale:

$$y''_h = f_h(x, y_\ell, y'_\ell), \quad h, \ell = 1, 2, \dots, N$$

E' sempre possibile **abbassare l'ordine di ciascuna delle equazioni** dal secondo **al primo**, introducendo delle **nuove variabili** z_h uguali alle **derivate prime** di y_h .

Si ottiene allora

un *sistema di $2N$ equazioni differenziali*,

ciascuna del *primo ordine*,

equivalente al sistema da cui siamo partiti:

$$\begin{cases} y'_h = z_h \\ z'_h = f_h(x, y_l, z_l) \end{cases}$$

Si dice allora, che si è passati da una *formulazione del secondo ordine* ad una *formulazione del primo ordine*.

Questo metodo, qui illustrato mediante un esempio, è del tutto generale e può essere utilizzato per abbassare di un'unità l'ordine di qualsiasi equazione differenziale dal quale si voglia partire.

- Osserviamo che l'abbassamento dell'ordine delle equazioni che compongono un sistema differenziale richiede

- l'introduzione di tante **nuove variabili** quante sono le variabili incognite del sistema di partenza

- e **il raddoppio del numero di equazioni** del sistema,

- per cui nel suo complesso *l'ordine del sistema differenziale rimane immutato.*

- *Non esiste un unico modo di scegliere le nuove variabili* per effettuare la riduzione dell'ordine delle equazioni di un sistema.

Questo risulta chiaro, in quanto, dopo aver effettuato l'abbassamento dell'ordine delle equazioni del sistema nel modo indicato, è sempre lecita un'ulteriore *trasformazione regolare di variabili*, che lascia immutato l'ordine delle equazioni.

Formulazione del primo ordine delle equazioni del moto

Consideriamo le *equazioni del moto di Lagrange*,

nella forma in cui esiste la *lagrangiana*.

Sappiamo che costituiscono un sistema di equazioni differenziali, ciascuna del *secondo ordine*,

riducibile in forma normale, se si fa eccezione di quei casi degeneri in cui la matrice dell'energia cinetica è *semidefinita* positiva.

Si dice, allora che la formulazione lagrangiana del problema del moto di una sistema olonomo è una *formulazione del secondo ordine*.

E' possibile passare dalla formulazione del *secondo ordine* del problema del moto ad una formulazione del *primo ordine*, introducendo tante nuove variabili quante sono le derivate prime rispetto al tempo dei parametri lagrangiani. Otteniamo così il sistema:

$$\dot{q}_h = v_h$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$$

(1)

- Le variabili $(q_h, v_h) \equiv (q_h, \dot{q}_h)$ si dicono *variabili lagrangiane*.

Come si è osservato prima, però, la scelta delle variabili non è univoca e si può ottenere un sistema di equazioni differenziali equivalente a quello di partenza, a condizione che l'ulteriore trasformazione di variabili che si effettua, sia regolare.

- Una scelta di variabili significativa è quella che utilizza, anziché le variabili lagrangiane, le variabili (q_h, p_h) che vengono dette *variabili hamiltoniane* o *variabili canoniche*.

Le nuove variabili:

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \quad (2)$$

sono dette *momenti coniugati* o *momenti canonici*.

La regolarità della trasformazione:

$$(q_h, v_h) \longrightarrow (q_h, p_h)$$

è garantita dalla non singolarità della matrice jacobiana della trasformazione:

$$\mathbf{J} \equiv \begin{pmatrix} \delta_{hk} & 0 \\ \frac{\partial p_h}{\partial q_k} & \frac{\partial p_h}{\partial v_k} \end{pmatrix}$$

in tutti i punti dello spazio delle variabili (q_h, v_h) . Condizione che è garantita dalla regolarità della trasformazione che coinvolge le sole variabili che vengono modificate:

$$\underline{\mathbf{v}} \longrightarrow \underline{\mathbf{p}}$$

che equivale a richiedere che il sistema lagrangiano sia riducibile in forma normale:

$$\det(\mathbf{J}) = \det \left\| \frac{\partial p_h}{\partial v_k} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial v_h \partial v_k} \right\| \neq 0, \quad (3)$$

Notiamo che supposto che il potenziale sia ordinario, oppure che l'eventuale potenziale generalizzato sia lineare in \dot{q} , tale condizione equivale alla non singolarità della matrice dell'energia cinetica in tutti i punti dello spazio degli eventi nei quali la matrice è definita.

Trasformate di Legendre

Il tipo di trasformazione che ci interessa esaminare è ben nota e prende il nome di *trasformazione di Legendre*.

Essa si può caratterizzare nel modo seguente. Consideriamo una funzione differenziabile:

$$f : A \longrightarrow R, \quad A \subseteq R^N$$

di classe $\mathcal{C}^{(2)}$ almeno. Denotiamo con $\underline{x} \equiv (x_h)$ gli elementi di A e definiamo una seconda funzione:

$$g : A \times A \longrightarrow R$$

In maniera tale che:

$$g(x_h, y_h) = x_h y_h - f(x_h) \quad (4)$$

Notiamo che \mathbf{x} e \mathbf{y} sono variabili indipendenti. Per come è stata definita, la g è essa pure differenziabile e della stessa classe della f . Tra tutte le possibili funzioni del tipo g vogliamo indagare se esiste, e a quali condizioni, una funzione g che sia indipendente da \mathbf{x} . Imporre l'indipendenza della g da \mathbf{x} equivale a richiedere che in ogni punto del dominio sia soddisfatta la condizione:

$$\varphi_k(x_h, y_h) = y_k - \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0 \quad (5)$$

che rappresenta un vincolo per le variabili \mathbf{x} , \mathbf{y} .

La funzione

$$g(y_h) = x_h y_h - f(x_h) \quad (6)$$

così caratterizzata prende il nome di *trasformata di Legendre* della f .

- Per calcolare le derivate parziali della f rispetto a x_h , e rispettivamente della g rispetto a y_h , le variabili x_h e y_h vanno trattate come variabili condizionate.

Questo significa che differenziando entrambi i membri della (6), in forza del vincolo (5) tra le variabili, si ha:

$$dg = d(x_h y_h) - df + \lambda_k d\varphi_k$$

dove sono stati introdotti i moltiplicatori di Lagrange λ_k .

Sviluppando si ha:

$$\frac{\partial g}{\partial y_h} dy_h = x_h dy_h + y_h dx_h - \frac{\partial f}{\partial x_h} dx_h + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} dx_h + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h} dy_h$$

dal momento che la condizione (5) comporta:

$$d\varphi_k = 0$$

Data l'arbitrarietà di dx_h e dy_h seguono le condizioni:

$$\frac{\partial g}{\partial y_h} = x_h + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_h}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_h} = y_h + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h}$$

Tenendo conto del vincolo (5) otteniamo:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} \lambda_k = 0$$

da cui, per la non singolarità della matrice:

$$\lambda_k = 0$$

e quindi i seguenti risultati:

$$\frac{\partial g}{\partial y_h} = x_h, \quad \frac{\partial f}{\partial x_h} = y_h$$

a condizione che:

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} \right\| = - \det \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} \right\| \neq 0, \quad \forall \underline{x} \in A \quad (7)$$

Osserviamo che la richiesta che la matrice hessiana della f sia non singolare su tutto il dominio A equivale a richiedere che la forma quadratica:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} v_h v_k \neq 0$$

sia non nulla per ogni \mathbf{v} , in ogni punto di A . Ma se tale forma quadratica non si annulla essa ha lo stesso segno in tutto il dominio, ad esempio, è sempre positiva; allora la condizione equivale a richiedere che la funzione f sia *convessa* su tutto A . Osserviamo che questa condizione di convessità è anche la condizione che rende legittimo il cambiamento di variabili $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$ in tutto il dominio A . Possiamo allora passare dalla formulazione di un problema nelle variabili \mathbf{x} alla formulazione dello stesso problema nelle variabili \mathbf{y} facendo entrare in gioco la trasformata di Legendre g che dipende solo da \mathbf{y} in luogo della f che dipende da \mathbf{x} .

Equazioni di Hamilton

L'applicazione della trasformazione di Legendre:

$$\underline{\mathbf{v}} \longrightarrow \underline{\mathbf{p}}$$

al sistema delle equazioni del moto (1) comporta l'introduzione della trasformata di Legendre della lagrangiana:

$$\mathcal{H} = v_h p_h - \mathcal{L} \quad (8)$$

che prende il nome di *funzione di Hamilton* o *hamiltoniana*, la quale dipende da $\underline{\mathbf{p}}$ invece che da $\underline{\mathbf{v}}$, oltre che, naturalmente dalle variabili $\underline{\mathbf{q}}$ che non vengono coinvolte nella trasformazione, ed eventualmente dal tempo:

$$\mathcal{H}(q_h, p_h, t) = v_h p_h - \mathcal{L}(q_h, v_h, t)$$

Si ha allora, in base ai risultati precedenti:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} = v_h, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_h} = p_h \quad (9)$$

Dobbiamo poi tenere conto che le funzioni \mathcal{H} e \mathcal{L} dipendono anche da \underline{q} e quindi, grazie alla (8) si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \quad (10)$$

Infatti, differenziando la relazione:

$$\mathcal{H}(q_h, p_h, t) = v_h p_h - \mathcal{L}(q_h, v_h, t),$$

abbiamo:

$$d\mathcal{H}(q_h, p_h, t) = p_h dv_h + v_h dp_h - d\mathcal{L}(q_h, v_h, t) \quad \iff$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} dp_h + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt = p_h dv_h + v_h dp_h - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} dq_h - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_h} dv_h - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \right) dq_h + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} - v_h \right) dp_h + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) dt = \left(p_h - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_h} \right) dv_h.$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (11)$$

Introducendo i risultati (9) e (10) nel sistema di equazioni del primo ordine (1) otteniamo le

equazioni di Hamilton o *equazioni canoniche*

$$\dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}, \quad \dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \quad (12)$$

L'*equivalenza* tra la formulazione *lagrangiana* e la formulazione *hamiltoniana* delle equazioni del moto, è garantita a condizione che il sistema delle equazioni del moto dal quale si parte sia *riducibile in forma normale*

Per sistemi *non riducibili in forma normale* le due formulazioni *non si equivalgono*, per cui possono esistere sistemi meccanici che ammettono la trattazione lagrangiana e non quella hamiltoniana o viceversa.

Integrale generale del moto per un sistema canonico

Si estendono, come al solito, anche per le equazioni di Hamilton i concetti di *integrale generale del moto* e di *integrale particolare del moto*.

Si dice *integrale generale del moto* l'integrale generale del sistema delle equazioni canoniche, cioè la *famiglia delle* ∞^{2N} *soluzioni del sistema* (12), caratterizzata da $2N$ costanti, tante quanto è l'ordine del sistema differenziale

L'integrale generale si può rappresentare come:

$$\begin{cases} q_h = q_h(t, c_1, c_2, \dots, c_{2N}) \\ p_h = p_h(t, c_1, c_2, \dots, c_{2N}) \end{cases} \quad (13)$$

Integrale particolare del moto per un sistema canonico

Si dice *integrale particolare del moto* un integrale particolare del sistema differenziale delle equazioni canoniche, cioè una delle soluzioni che si ottiene assegnando un valore particolare a ciascuna delle $2N$ costanti c_1, c_2, \dots, c_{2N} , ovvero assegnando le condizioni iniziali per le variabili canoniche q_h, p_h

Integrale primo del moto per un sistema canonico

Una funzione:

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N, t)$$

si dice *integrale primo del moto* quando, sostituendo in essa alle variabili q_h, p_h le funzioni $q_h(t), p_h(t)$ che rappresentano un integrale particolare del moto, la funzione ψ assume un valore costante nel tempo

$$\psi(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t), t) = C, \quad \forall t$$

Il valore della costante può essere calcolato facilmente utilizzando le condizioni iniziali, grazie al fatto che ψ mantiene in ogni istante il valore iniziale.

Coordinate cicliche o ignorabili

Una coordinata canonica $q_{\bar{h}}$ si dice *coordinata ciclica* o *ignorabile*, per un sistema governato dall'hamiltoniana \mathcal{H} , se non compare nell'hamiltoniana, ma compare solamente il suo momento coniugato $p_{\bar{h}}$

Di conseguenza dalle equazioni di Hamilton si ottiene:

$$\dot{p}_{\bar{h}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_{\bar{h}} = \text{costante}$$

- Ad ogni *coordinata ciclica* viene a corrispondere un *integrale primo del moto*
- Notiamo che se una coordinata $q_{\bar{h}}$ è *ciclica* per la *lagrangiana*, essa risulta ciclica anche per l'*hamiltoniana* e viceversa.

Infatti si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{\bar{h}}} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{h}}} = 0$$

Parentesi di Poisson e integrali primi del moto

Consideriamo una **funzione differenziabile delle variabili canoniche** ed eventualmente del **tempo**:

$$\psi = \psi(q_e, p_e, t)$$

E ci domandiamo *a quali condizioni questa funzione può essere un integrale primo del moto.*

A questo scopo dobbiamo richiedere che:

$$\frac{d\psi}{dt}(q_\ell, p_\ell, t) = \frac{\partial\psi}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial\psi}{\partial p_h} \dot{p}_h + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

Eliminando \dot{q}_h, \dot{p}_h mediante le equazioni di Hamilton ricaviamo:

$$\frac{d\psi}{dt}(q_\ell, p_\ell, t) = \frac{\partial\psi}{\partial q_h} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_h} - \frac{\partial\psi}{\partial p_h} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_h} + \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$$

Introducendo le *parentesi di Poisson* definite, per ogni coppia di funzioni differenziabili delle variabili hamiltoniane f, g ed eventualmente del tempo, come:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial g}{\partial q_h} \quad (14)$$

si può riscrivere:

$$\frac{d\psi}{dt}(q_\ell, p_\ell, t) = [\psi, \mathcal{H}] + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

- Quando la funzione ψ **non dipende esplicitamente dal tempo**, cioè si ha:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

la condizione affinché una **funzione delle sole variabili canoniche** sia un **integrale primo** del moto è che **si annulli la sua parentesi di Poisson con l'hamiltoniana**

$$\frac{d\psi}{dt}(q_\ell, p_\ell) = [\psi, \mathcal{H}] = 0$$

- Se l'**hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo** si ha:

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = [\mathcal{H}, \mathcal{H}] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0$$

L'hamiltoniana, dunque, risulta essere un integrale primo del moto se e solo se non dipende esplicitamente dal tempo

Grazie alla (11) sappiamo che questo equivale a richiedere che la lagrangiana non dipenda esplicitamente del tempo.

Facendo uso delle parentesi di Poisson è possibile riscrivere in una nuova forma le equazioni canoniche. Si ha infatti:

$$\begin{cases} \dot{q}_h = [q_h, \mathcal{H}] \\ \dot{p}_h = [p_h, \mathcal{H}] \end{cases} \quad (15)$$

Questa forma ha il vantaggio di eliminare il segno negativo, dando un aspetto simmetrico alle equazioni.

Hamiltoniana

L'hamiltoniana è stata definita come *trasformata di Legendre della lagrangiana* mediante la (8) che possiamo riscrivere in termini delle usuali notazioni:

$$\mathcal{H} = \dot{q}_h p_h - \mathcal{L}$$

essendo:

$$\mathcal{L} = T + U$$

Per calcolare esplicitamente l'espressione di \mathcal{H} ricordiamo che l'*energia cinetica di un sistema olonomo* si può scrivere nella forma:

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

dove:

$$T_0 = d, \quad T_1 = b_h \dot{q}_h, \quad T_2 = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k$$

E il *potenziale (generalizzato)* si può scrivere:

$$U = U_0 + U_1, \quad U_0 = g, \quad U_1 = f_h \dot{q}_h$$

Allora abbiamo:

$$p_h = a_{hk} \dot{q}_k + b_h + f_h$$

Quindi:

$$\dot{q}_h p_h = a_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + b_h \dot{q}_h + f_h \dot{q}_h = 2T_2 + T_1 + U_1$$

Segue:

$$\mathcal{H} = T_2 - T_0 - U_0 \quad (16)$$

INTERPRETAZIONE FISICA

Quando i vincoli sono *indipendenti dal tempo* abbiamo che:

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = T_2$$

Di conseguenza l'espressione dell'hamiltoniana si specializza come:

$$\mathcal{H} = T - U_0 \quad (17)$$

Come conseguenza abbiamo il seguente risultato:

◇ Quando i vincoli sono indipendenti dal tempo e il potenziale è ordinario, cioè le forze sono conservative, l'*hamiltoniana* coincide con l'*energia meccanica* del sistema ed è un integrale primo del moto ◇

Infatti se il potenziale è ordinario si ha $U = U_0$ e la (17) diviene:

$$\mathcal{H} = T - U = T + V = E \quad (18)$$

Inoltre, essendo i vincoli indipendenti dal tempo, sia T che U non

dipendono dal tempo, perciò \mathcal{H} non dipende esplicitamente dal tempo ed è quindi un integrale primo del moto, che coincide con l'integrale primo dell'energia.

L'hamiltoniana viene perciò considerata come una funzione che generalizza il concetto di energia meccanica.

Formulazione mista: funzione di Routh

Si chiama funzione di Routh la trasformata di Legendre ridotta alle prime M , con $M < N$ variabili:

$$\mathcal{R} = \sum_{h=1}^M \dot{q}_h p_h - \mathcal{L} \quad (19)$$

Una simile funzione si comporta come un'hamiltoniana rispetto alle prime

M coordinate generalizzate q_h e come una lagrangiana rispetto alle restanti $N - M$ coordinate. Essa viene a dipendere, infatti dalle variabili nel modo seguente:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_M, \dot{q}_{M+1}, \dot{q}_{M+2}, \dots, \dot{q}_N, t)$$

Le equazioni del moto del sistema sono allora date da un sistema misto di equazioni di Hamilton e di equazioni di Lagrange:

$$\dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_h}$$

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_h}, \quad h = 1, 2, \dots, M$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_h} = 0, \quad h = M + 1, M + 2, \dots, N$$

La formulazione mista può essere particolarmente conveniente quando le prime M variabili sono cicliche, perchè, in questo caso i primi M momenti coniugati sono già determinati, in quanto sono integrali primi del moto e la funzione di Routh viene a dipendere, durante il moto, da M costanti e solo dalle ultime $N - M$ coordinate lagrangiane, dalle loro derivate prime e dal tempo, come se il problema avesse $N - M$ gradi di libertà:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(q_{M+1}, \dots, q_N, p_1(0), \dots, p_M(0), \dot{q}_{M+1}, \dots, \dot{q}_N, t)$$

Quindi il sistema delle $N - M$ equazioni di tipo lagrangiano risulta disaccoppiato.

* * *