

Equazioni di Lagrange

Parallelismo tra statica e dinamica in un sistema di punti

$$\mathcal{S} = \{(P_s, m_s); s = 1, 2, \dots, n\}$$

a vincoli lisci

STATICA

condizioni di equilibrio

$$\underline{\mathbf{F}}_s + \underline{\Phi}_s = \underline{\mathbf{0}}$$

vincoli lisci

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \quad \forall \delta P_s$$

principio dei lavori virtuali

$$\delta L^{(a)} \leq 0, \quad \forall \delta P_s$$

DINAMICA

equazioni del moto

$$m_s \underline{\mathbf{a}}_s = \underline{\mathbf{F}}_s + \underline{\Phi}_s$$

vincoli lisci

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \quad \forall \delta P_s$$

???

- **Problema.** E' possibile proseguire il parallelismo tra statica e dinamica dando una **versione del principio dei lavori virtuali per la dinamica** dei sistemi a vincoli lisci, e in particolare, specializzarlo per i sistemi olonomi?

- **Osservazione.** Il *principio dei lavori virtuali* può essere stabilito in forza del *principio delle reazioni vincolari* che permette di definire in maniera generale i vincoli lisci.

- **Ipotesi.** Storicamente il *principio delle reazioni vincolari* è nato nell'ambito della statica, tuttavia viene comunemente **ammesso come valido anche in dinamica**, in quanto l'esperienza mostra che esso viene rispettato anche in regime dinamico da quei vincoli che lo soddisfano in regime di equilibrio.

Con questa assunzione si può stabilire l'estensione del principio dei lavori virtuali, in modo del tutto analogo a quanto si è visto in statica, anche nella dinamica.

Disuguaglianza variazionale della dinamica

Per ogni punto materiale del sistema vale, in dinamica, supposto che l'osservatore del moto sia inerziale, l'equazione fondamentale:

$$m_s \underline{\mathbf{a}}_s = \underline{\mathbf{F}}_s + \underline{\Phi}_s, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

che possiamo riscrivere esplicitando la reazione vincolare:

$$\underline{\Phi}_s = -(\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s)$$

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri per δP_s e sommando sull'indice s otteniamo:

$$\sum_{s=1}^n \underline{\Phi}_s \times \delta P_s = - \sum_{s=1}^n (\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s) \times \delta P_s$$

A primo membro riconosciamo il lavoro virtuale delle reazioni vincolari; assumendo che i vincoli siano lisci e che il principio delle reazioni vincolari sia valido anche in dinamica abbiamo:

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \quad \forall \delta P_s$$

Di conseguenza risulta:

$$\sum_{s=1}^n (\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s) \times \delta P_s \leq 0, \quad \forall \delta P_s \quad (1)$$

Questa condizione rappresenta l'estensione cercata e prende il nome di *disuguaglianza variazionale della dinamica*.

Principio di D'Alembert

Il passaggio dal principio dei lavori virtuali alla disuguaglianza variazionale della dinamica si ottiene con una regola molto semplice: dove nella statica sono presenti le forze attive $\underline{\mathbf{F}}_s$ in dinamica troviamo le quantità $\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s$:

STATICA

DINAMICA

$\underline{\mathbf{F}}_s$



$\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s$

In particolare, applicando questa regola, l'equazione fondamentale del moto del singolo punto del sistema P_s si può ottenere partendo dalla corrispondente condizione di equilibrio:

STATICA

DINAMICA

$$\underline{\mathbf{F}}_s + \underline{\Phi}_s = \underline{\mathbf{0}} \quad \longrightarrow \quad (\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s) + \underline{\Phi}_s = \underline{\mathbf{0}}$$

D'Alembert osservò che

→ l'equazione del moto così scritta si può interpretare come una

→ condizione di equilibrio fra le forze $\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s$ e le reazioni vincolari

e diede il nome di *forze perdute* alle quantità che rimpiazzano le forze attive:

$$\underline{\mathbf{F}}_s^{(p)} = \underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s$$

Forze *perdute* in quanto vengono spese contro il vincolo e non sviluppano accelerazione; sono quindi perdute ai fini del moto.

Si può dunque affermare che:

Durante il moto le forze perdute e le reazioni vincolari si fanno equilibrio

Questo enunciato è noto come *principio di D'Alembert* ed equivale alla regola di passaggio dalla statica alla dinamica stabilita in precedenza.

Si può allora riscrivere la disuguaglianza variazionale della dinamica nella forma semplice:

$$\delta L^{(p)} \leq 0, \quad \forall \delta P_s$$

Equazioni di Lagrange

Per poter

utilizzare la disuguaglianza variazionale della dinamica,

ed *ottenere le equazioni del moto di Lagrange*, dobbiamo procedere facendo tre ipotesi:

- i) *vincoli lisci*
- ii) *vincoli bilaterali*
- iii) *sistema olonomo*

— L'ipotesi che *i vincoli siano lisci*

come sappiamo, comporta che il principio dei lavori virtuali sia una *condizione* anche *necessaria* per l'equilibrio di un sistema meccanico, e permette, quindi, di determinare *tutte* le configurazioni di equilibrio del sistema.

Analogamente, dal punto di vista dinamico, la condizione che i vincoli siano lisci comporta che la disuguaglianza variazionale della dinamica sia una *condizione necessaria*, oltre che *sufficiente*, ai fini della determinazione del moto di un sistema meccanico, e permette, quindi, di determinare *tutti* i moti del sistema.

— L'ipotesi che *i vincoli siano bilaterali*

garantisce che tutti gli spostamenti siano *reversibili* e quindi comporta che la (1) risulti valida sotto forma di *uguaglianza*:

$$\sum_{s=1}^n (\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s) \times \delta P_s = 0, \quad \forall \delta P_s \quad (2)$$

A tale condizione si dà il nome di *relazione simbolica della dinamica*.

Questa condizione è valida anche in presenza di vincoli unilaterali, fino a che il sistema si mantiene in configurazioni ordinarie, mentre perde la sua validità nelle configurazioni di confine.

→ Dal *punto di vista analitico* l'esclusione delle configurazioni di confine si rende necessaria per il fatto che in configurazione di confine possono verificarsi gli *urti*, cioè quelle situazioni in cui le grandezze cinematiche

possono **perdere la continuità**; e quindi, essendo la continuità **condizione necessaria** per la **differenziabilità**, non è più possibile la formulazione del problema in termini di **equazioni differenziali**, ma occorre una formulazione in termini di leggi di bilancio integrali.

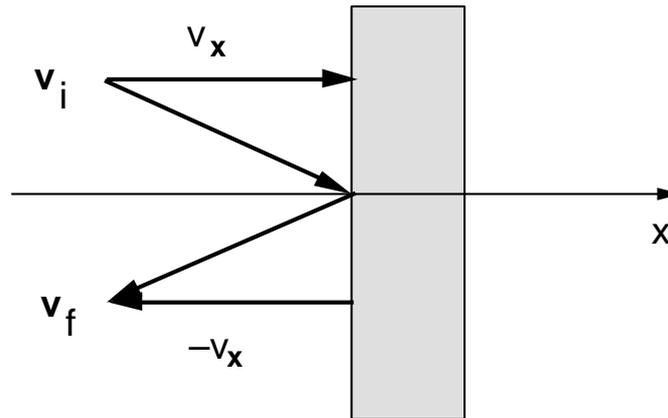


Fig. 1 - Perdita di continuità della velocità al confine

Dal momento che noi siamo qui interessati ad una formulazione in termini di

equazioni differenziali del moto

questa *ipotesi* si rende *indispensabile*.

Osserviamo che in *statica* questo problema non sussiste, in quanto le equazioni della statica sono equazioni algebriche e non differenziali; di conseguenza non richiedono alcuna differenziabilità, e quindi, l'equilibrio in configurazioni di confine può essere studiato senza problemi.

— L'ipotesi che *il sistema sia olonomo*

permette di introdurre i **parametri lagrangiani** e lo **spazio delle configurazioni** per descrivere il moto del sistema meccanico.

Se il sistema è olonomo, a N gradi di libertà, possiamo identificare i punti del sistema mediante le relazioni:

$$OP_s = OP_s(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$$

ed esprimere gli spostamenti virtuali come:

$$\delta P_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h$$

Questa informazione, introdotta nella (2) comporta:

$$\sum_{s=1}^n \mathbf{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h - \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h = 0, \quad \forall \delta q_h$$

Possiamo introdurre le componenti lagrangiane delle forze attive:

$$Q_h = \sum_{s=1}^n \mathbf{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$

E analogamente le quantità:

$$\tau_h = \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (3)$$

Otteniamo allora la condizione:

$$(Q_h - \tau_h) \delta q_h = 0, \quad \forall \delta q_h$$

Ovvero in termini di vettori nello spazio delle configurazioni:

$$(\underline{Q} - \underline{\tau}) \times \delta \underline{q} = 0, \quad \forall \delta \underline{q} \quad (4)$$

essendo:

$$\underline{Q} \equiv (Q_h), \quad \underline{\tau} \equiv (\tau_h)$$

Dal momento che le forze possono dipendere solo dalle posizioni e dalle velocità dei punti e al più dal tempo, ma non dagli spostamenti virtuali, si ha:

$$\underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$$

Le quantità $\underline{\tau}$ coinvolgendo le accelerazioni dipendono anche dalle derivate seconde, ma comunque non dagli spostamenti virtuali:

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\dot{\mathbf{q}}}, \underline{\ddot{\mathbf{q}}}, t)$$

Allora il prodotto scalare (4), grazie all'arbitrarietà degli spostamenti virtuali, può annullarsi solo a condizione che:

$$\underline{\mathbf{Q}} - \underline{\tau} = \underline{\mathbf{0}} \quad \iff \quad Q_h - \tau_h = 0$$

Scritto per esteso il risultato ottenuto rappresenta un sistema di N equazioni differenziali per le N funzioni incognite $q_h(t)$ che descrivono il moto del sistema olonomo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = Q_1 \\ \tau_2 = Q_2 \\ \dots \\ \tau_N = Q_N \end{array} \right.$$

in cui i termini differenziali compaiono in τ_h . Per rendere utilizzabile praticamente questo sistema di equazioni differenziali dobbiamo esprimere τ_h mediante una grandezza macroscopica, caratteristica del sistema meccanico e che siamo in grado di calcolare.

Mostriamo che sussiste il seguente legame di τ_h con l'energia cinetica del sistema:

$$\tau_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \quad (5)$$

DIMOSTRAZIONE

Partendo dall'espressione dell'energia cinetica di un sistema particellare:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s v_s^2$$

abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial v_s^2}{\partial q_h} \right)$$

Bisogna allora dimostrare che:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_s^2}{\partial q_h} = \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (6)$$

Esaminiamo il primo termine a primo membro:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}_s \times \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \dot{q}_h} \right) = \mathbf{a}_s \times \frac{\partial v_s}{\partial \dot{q}_h} + \mathbf{v}_s \times \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s}{\partial \dot{q}_h}$$

Ma la velocità in un sistema olonomo si scrive:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

Essendo OP_s indipendente da \dot{q}_h derivando rispetto a questa variabile si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$

Quindi sostituendo si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} = \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} + \mathbf{v}_s \times \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (7)$$

Esaminando ora il secondo termine si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_s^2}{\partial q_h} = \mathbf{v}_s \times \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{dP_s}{dt} = \mathbf{v}_s \times \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (8)$$

Nella precedente lo scambio dell'ordine di derivazione risulta legittimo in quanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{dP_s}{dt} &= \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_s}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 P_s}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 P_s}{\partial q_h \partial t} = \\ &= \left(\dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial P_s}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \end{aligned}$$

Ma i risultati (7) e (8) comportano proprio la (6).

Dunque le equazioni differenziali del moto di un sistema olonomo a vincoli lisci assumono la forma definitiva:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad (9)$$

Sono queste *le equazioni di Lagrange*.

Forze conservative: lagrangiana

Quando le forze attive sono conservative le loro componenti lagrangiane si possono esprimere come derivate parziali di un potenziale rispetto ai parametri lagrangiani:

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}, \quad U = U(q_k, t)$$

Dal momento che il potenziale non dipende dalle \dot{q}_h si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} = 0$$

Quindi le equazioni di Lagrange (9) si possono riscrivere:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} (T + U) - \frac{\partial}{\partial q_h} (T + U) = 0$$

Quando le forze sono conservative, allora, si introduce in maniera naturale la *funzione di Lagrange* o *lagrangiana*:

$$\mathcal{L} = T + U \quad (10)$$

e si scrivono mediante essa le equazioni di Lagrange nella forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \quad (11)$$

Si osserva che:

- la funzione di Lagrange è definita a meno di una *costante additiva* a causa del fatto che contiene come addendo il potenziale che è indeterminato a meno di una costante additiva;
 - moltiplicando la lagrangiana per un fattore costante non nullo, si ottengono sempre le stesse equazioni del moto; per cui la lagrangiana risulta definita anche a meno di un *fattore di scala*.
-

Potenziali generalizzati

Il caso delle forze conservative non è l'unico che rende possibile l'introduzione della lagrangiana e la scrittura delle equazioni di Lagrange nella forma (11). Infatti questa scrittura risulta essere compatibile con la scrittura (9) delle stesse equazioni del moto qualora le componenti lagrangiane delle forze attive si possano esprimere nella forma:

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} \quad (12)$$

dove la funzione U , che prende il nome di *potenziale generalizzato*, non rappresenta più, in generale, un potenziale di una forza conservativa, essendo una funzione che può dipendere anche dalle \dot{q}_h :

$$U = U(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Va messo in evidenza il fatto che U può dipendere solo *linearmente* da \dot{q}_k , infatti dalla (12) si ha:

$$Q_h(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{\partial U}{\partial q_h} - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial q_l} \dot{q}_l - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial t}$$

Dal momento che Q_h non dipende da \ddot{q}_k , per forze di natura fisica, è chiaro che deve risultare:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_l} = 0$$

Quindi si può scrivere:

$$U = f_h(q_k, t) \dot{q}_h + g(q_k, t)$$

E quindi:

$$Q_h = \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_h} - \frac{\partial f_h}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial g}{\partial q_h} - \frac{\partial f_h}{\partial t} = \alpha_{hk} \dot{q}_k + \beta_h$$

dove sussiste evidentemente la condizione di antisimmetria:

$$\alpha_{kh} = -\alpha_{hk}$$

Per distinguere un potenziale generalizzato da un potenziale che caratterizza un sistema di forze conservativo chiameremo, d'ora in poi, quest'ultimo *potenziale ordinario*.

Forze giroscopiche

Un sistema di forze si dice *giroscopico* quando il lavoro di tali forze si mantiene nullo durante il moto.

- In particolare quando le forze derivano da un potenziale generalizzato e $\beta_h = 0$, il lavoro compiuto dalle forze attive durante il moto risulta essere nullo, ovvero è nulla la potenza sviluppata dalle forze attive:

$$W = Q_h \dot{q}_h = \alpha_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k = 0$$

a causa dell'antisimmetria dei coefficienti e quindi il sistema di forze è giroscopico.

Un **esempio fisico** ben noto è fornito dalla *forza di Lorentz* agente su di una carica elettrica puntiforme e che si muove con velocità $\underline{\mathbf{v}}$ in un campo magnetico $\underline{\mathbf{B}}$:

$$\underline{\mathbf{F}} = e \underline{\mathbf{v}} \wedge \underline{\mathbf{B}}, \quad \underline{\mathbf{B}} = \nabla \wedge \underline{\mathbf{A}}$$

essendo $\underline{\mathbf{A}}$ il *potenziale vettore*. Il potenziale generalizzato della forza di Lorentz vale:

$$U(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}) = e \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{A}}$$

La forza risulta essere giroscopica dal momento che il termine $\beta_h = 0$; infatti la potenza sviluppata durante il moto è chiaramente nulla:

$$W = \underline{\mathbf{F}} \times \underline{\mathbf{v}} = e \underline{\mathbf{v}} \wedge \underline{\mathbf{B}} \times \underline{\mathbf{v}} = 0$$

Forze dissipative

Un sistema di forze si dice *dissipativo* quando il lavoro compiuto durante il moto si mantiene negativo o al più nullo.

In particolare se le corrispondenti forze generalizzate di Lagrange sono funzioni lineari omogenee di \dot{q}_k :

$$Q_h = -\gamma_{hk} \dot{q}_k$$

esse risultano dissipative se la matrice $\|\gamma_{hk}\|$ è simmetrica e semidefinita positiva, in quanto la potenza sviluppata da tali forze è data da:

$$W = Q_h \dot{q}_h = -\gamma_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k \leq 0$$

Si può allora introdurre la *funzione di dissipazione*:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \gamma_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (13)$$

Di conseguenza le forze dissipative di questo tipo si possono far derivare, anzichè da un potenziale ordinario come le forze conservative o da un potenziale generalizzato come le forze giroscopiche, da una funzione di dissipazione. Risulta allora:

$$Q_h = - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h}$$

Nel caso in cui siano presenti contemporaneamente forze conservative, forze giroscopiche e forze dissipative lineari, allora, le equazioni di Lagrange possono essere scritte nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h} = 0$$

avendo separato la parte delle forze generalizzate che deriva da un potenziale da quella che deriva da una funzione di dissipazione.

Considerazioni analitiche

Il sistema delle equazioni di Lagrange è un sistema differenziale di ordine $2N$, come si vede facilmente sviluppando la derivata rispetto al tempo nella (9), da cui si ottiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h$$

In un sistema olonomo l'energia cinetica si scrive come forma quadratica:

$$T = \frac{1}{2} a_{hk}(q_\ell, t) \dot{q}_h \dot{q}_k + b_h(q_\ell, t) \dot{q}_h + d(q_\ell, t)$$

Per cui si ha che la matrice dei coefficienti delle derivate seconde, che sono le derivate di ordine più elevato, è la matrice dell'energia cinetica:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} = a_{hk}$$

Salvo casi degeneri questa matrice è definita positiva e quindi è non singolare. Perciò il sistema delle equazioni di Lagrange può essere portato in forma normale risolvendolo rispetto alle derivate di ordine più elevato. Notiamo che la presenza di un potenziale generalizzato, dovendo essere quest'ultimo una funzione lineare delle \dot{q}_ℓ non contribuisce alla formazione dei coefficienti delle \ddot{q}_ℓ .

Integrale generale e integrali particolari del moto

Si estendono alle equazioni di Lagrange i concetti di *integrale generale del moto* e di *integrale particolare del moto* già noti per la dinamica del punto e dei sistemi.

Inegrale generale del moto di un sistema lagrangiano

Si dice *integrale generale del moto* l'integrale generale del sistema delle equazioni del moto, cioè la *famiglia delle* ∞^{2N} *soluzioni del sistema* (9), caratterizzata da $2N$ costanti, tante quanto è l'ordine del sistema differenziale.

L'integrale generale si può rappresentare come:

$$q_h = q_h(t, c_1, c_2, \dots, c_{2N}) \quad (14)$$

Integrale particolare del moto di un sistema lagrangiano

Si dice *integrale particolare del moto* un integrale particolare del sistema differenziale del moto, cioè una delle soluzioni che si ottiene assegnando un valore particolare a ciascuna delle $2N$ costanti c_1, c_2, \dots, c_{2N} , ovvero assegnando le condizioni iniziali sui parametri lagrangiani e sulle loro derivate prime rispetto al tempo.

Inegrale primo del moto di un sistema lagrangiano

Una funzione:

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$$

si dice *integrale primo del moto* quando, sostituendo in essa alle variabili q_h, \dot{q}_h le funzioni $q_h(t)$ che rappresentano un integrale particolare del moto e le loro derivate temporali, la funzione ψ assume un valore costante nel tempo:

$$\psi(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t), t) = C, \quad \forall t$$

Il valore della costante può essere calcolato facilmente utilizzando le condizioni iniziali, grazie al fatto che ψ mantiene in ogni istante il valore iniziale.

Coordinate cicliche o ignorabili

Quando il moto di un sistema meccanico è governato da una lagrangiana \mathcal{L} è possibile dare la definizione di *coordinata ciclica* o *ignorabile*.

Una coordinata lagrangiana $q_{\bar{h}}$ si dice *coordinata ciclica* o *ignorabile* se non compare direttamente nella lagrangiana, ma solamente attraverso la sua derivata temporale.

Di conseguenza \mathcal{L} risulta indipendente da $q_{\bar{h}}$ e si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{h}}} = 0$$

E la corrispondente equazione di Lagrange diviene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{h}}} = 0$$

E quindi la funzione:

$$p_{\bar{h}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{\bar{h}}} = \textit{costante}$$

è un integrale primo del moto.

- Ad ogni coordinata ciclica viene quindi a corrispondere un integrale primo del moto.

Questo risultato rende particolarmente utile la presenza di coordinate cicliche in una lagrangiana.

Esempio

Un esempio familiare può essere offerto dalla seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k^2 x^2$$

che conduce alle equazioni del moto di un punto materiale soggetto ad una forza elastica parallela all'asse delle ascisse, avente centro nell'origine. I parametri lagrangiani sono qui le coordinate del punto x, y, z e si osserva che le coordinate y, z sono cicliche, in quanto non compaiono direttamente nella lagrangiana, ma solamente attraverso le loro derivate temporali. Restano allora individuati i due integrali primi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} = m \dot{y}_0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} = m \dot{z}_0$$

Osservazioni

Facciamo qualche considerazione sul principio di D'Alembert che è stato esaminato sopra.

— Viene naturale domandarsi se l'interpretazione delle equazioni del moto come condizioni di equilibrio è una formalità matematica oppure ha un senso fisico; in altri termini se esiste un osservatore rispetto al quale, durante il moto il punto si trova effettivamente in equilibrio.

La risposta è immediata, in quanto:

– ogni punto è sempre in equilibrio rispetto ad un osservatore la cui origine si trova in quel punto;

– ogni corpo rigido è sempre in equilibrio rispetto ad un osservatore con esso solidale;

– ogni sistema olonomo, rappresentato nello spazio delle configurazioni con un punto, è in equilibrio rispetto all'osservatore dello spazio delle configurazioni che vede il punto rappresentativo in equilibrio.

Infatti se scriviamo, per il generico punto P_s la condizione di equilibrio relativo del punto rispetto ad un osservatore la cui origine Ω si trova in P_s e i cui assi sono comunque orientati, avremo:

$$\underline{\mathbf{F}}_s + \underline{\mathbf{F}}_s^{(\tau)} + \underline{\Phi}_s = \underline{\mathbf{0}}$$

essendo:

$$\underline{\mathbf{F}}_s^{(\tau)} = -m_s \underline{\mathbf{a}}_s^{(\tau)}$$

la forza di trascinamento. Ma $P_s \equiv \Omega$ e quindi l'accelerazione di trascinamento vale semplicemente:

$$\underline{\mathbf{a}}_s^{(\tau)} = \underline{\mathbf{a}}_s$$

La condizione di equilibrio relativo si scrive, dunque:

$$\underline{\mathbf{F}}_s - m_s \underline{\mathbf{a}}_s + \underline{\Phi}_s = \underline{\mathbf{0}}$$

E questa è proprio l'equazione del moto rispetto all'osservatore inerziale (assoluto).

- Se il sistema materiale è costituito da un solo punto basta individuare un unico osservatore relativo rispetto al quale il punto si trova in equilibrio, mentre se il sistema materiale è costituito da più punti, generalmente non si riesce a trovare uno stesso osservatore relativo rispetto al quale l'intero sistema sia in equilibrio.

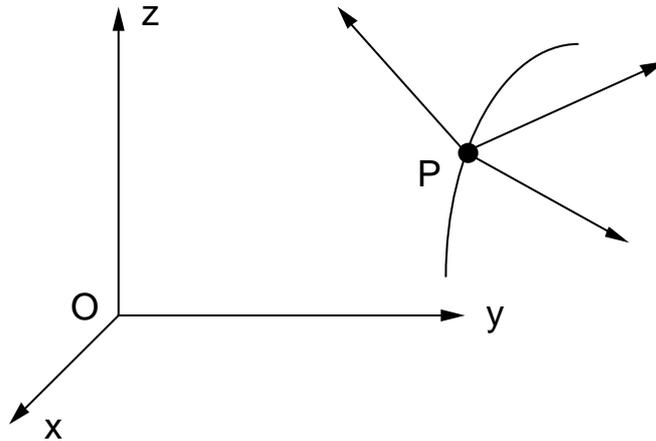


Fig. 2 - Moto di un punto come equilibrio relativo

- Se il corpo è rigido ogni sistema di assi solidale con il corpo rigido rappresenta un osservatore relativo rispetto al quale *ogni punto* del corpo è sempre in equilibrio. Scrivendo le equazioni cardinali della statica per l'equilibrio relativo del corpo rigido rispetto ad un osservatore solidale

abbiamo:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{R}}^{(e,a)} + \underline{\mathbf{R}}^{(\tau)} + \underline{\mathbf{R}}^{(e,v)} = 0 \\ \underline{\mathbf{M}}_{\Omega}^{(e,a)} + \underline{\mathbf{M}}_{\Omega}^{(\tau)} + \underline{\mathbf{M}}_{\Omega}^{(e,v)} = 0 \end{cases}$$

Ma:

$$\underline{\mathbf{R}}^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n m_s \underline{\mathbf{a}}_s^{(\tau)}$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{\Omega}^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \underline{\mathbf{a}}_s^{(\tau)}$$

All'equilibrio relativo l'accelerazione relativa e l'accelerazione di Coriolis sono nulle, perciò, per il teorema di Coriolis l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione assoluta coincidono:

$$\underline{\mathbf{a}}_s = \underline{\mathbf{a}}_s^{(\tau)}$$

Dunque:

$$\underline{\mathbf{R}}^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n m_s \underline{\mathbf{a}}_s = - \underline{\dot{\mathbf{Q}}}$$

$$\underline{\mathbf{M}}_{\Omega}^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \underline{\mathbf{a}}_s = - \underline{\dot{\mathbf{K}}}_{\Omega} - m \underline{\mathbf{v}}_{\Omega} \wedge \underline{\mathbf{v}}_G$$

E le equazioni dell'equilibrio relativo divengono le equazioni cardinali della dinamica.

- Nel caso del sistema, olonoma, infine, il sistema si può rappresentare con un punto dello spazio delle configurazioni ed esiste, in questo spazio, la possibilità di scrivere rispetto allo stesso osservatore le condizioni di

equilibrio relativo, imponendo l'annullarsi delle componenti lagrangiane delle forze attive alle quali si aggiungono le componenti lagrangiane delle forze di trascinamento:

$$Q_h + Q_h^{(\tau)} = 0$$

Ma in questo caso:

$$Q_h^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n m_s \underline{\mathbf{a}}_s^{(\tau)} \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} = - \sum_{s=1}^n m_s \underline{\mathbf{a}}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} = - \tau_h$$

E quindi la condizione di equilibrio relativo conduce alle equazioni di Lagrange.

* * *