

# Vettori applicati

---

In non pochi problemi fisici non è sufficiente considerare i *vettori liberi*, perchè le grandezze fisiche vettoriali possono avere comportamenti differenti in dipendenza del loro punto di applicazione. L'esempio più evidente è quello di una forza applicata ad un corpo, che a seconda del punto di applicazione può lasciare che il corpo stia in equilibrio oppure no.

Un altro esempio di vettore applicato è dato dalla velocità di un punto di un corpo rigido che dipende, con una legge ben precisa dal punto considerato.

Nasce, perciò, l'esigenza di introdurre il concetto di *vettore applicato*, come un ente a sei parametri, dei quali tre sono le coordinate del punto di applicazione e tre sono le componenti del vettore. Simbolicamente un

vettore applicato si denota con una coppia ordinata di elementi dei quali il primo è il punto di applicazione e il secondo è il vettore.

## Momento polare di un vettore applicato

Dato un *vettore applicato* ad un punto  $(A, \underline{\mathbf{v}})$  e un punto  $Q$  nello spazio,

si dice *momento polare* di  $\underline{\mathbf{v}}$  rispetto al polo  $Q$  la quantità:

$$\underline{\mathbf{M}}_Q = QA \wedge \underline{\mathbf{v}} \quad (1)$$

L'indice al piede del vettore *momento* denota il *polo di riduzione* e il vettore  $QA$  è costruito in modo che la sua origine sia il polo  $Q$  e il suo vertice sia il punto di applicazione del vettore.

Il modulo di  $\underline{\mathbf{M}}_Q$  si può scrivere

$$|\underline{\mathbf{M}}_Q| = |\underline{\mathbf{v}}| |QA| \operatorname{sen}\vartheta = |\underline{\mathbf{v}}| d \quad (2)$$

dove:  $d = |QA| \operatorname{sen}\vartheta$  è detto *braccio* del vettore  $\underline{\mathbf{v}}$  rispetto al polo  $Q$ .

Il *momento polare* di un vettore applicato risulta essere *nullo*

— quando il vettore è nullo

e/oppure

- quando il polo coincide con il punto di applicazione del vettore  
oppure
- quando  $QA$  è parallelo a  $\underline{\mathbf{v}}$  ovvero  $Q$  appartiene alla retta di applicazione di  $\underline{\mathbf{v}}$ .

Negli ultimi due casi si ha che il braccio risulta essere nullo.

Notiamo che, data la definizione, il *momento* è un vettore ortogonale al piano individuato dal vettore  $\underline{\mathbf{v}}$  e dal polo.

Se si fa scorrere il polo lungo una retta parallela alla retta di applicazione del vettore, oppure si fa scorrere il vettore lungo la propria retta d'azione il momento non cambia.

Infatti, nel primo caso si ha:



$$\underline{\mathbf{M}}_{Q'} = Q' A \wedge \underline{\mathbf{v}} = (Q'Q + QA) \wedge \underline{\mathbf{v}} = Q'Q \wedge \underline{\mathbf{v}} + QA \wedge \underline{\mathbf{v}}$$

ma  $Q'Q \wedge \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$  essendo  $Q'Q$  parallelo a  $\underline{\mathbf{v}}$ . E quindi:

$$\underline{\mathbf{M}}_{Q'} = QA \wedge \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{M}}_Q$$

Nel secondo caso abbiamo:

$$\underline{\mathbf{M}}_Q = QA' \wedge \underline{\mathbf{v}} = (QA + AA') \wedge \underline{\mathbf{v}} = QA \wedge \underline{\mathbf{v}} + AA' \wedge \underline{\mathbf{v}}$$

ma

$$AA' \wedge \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}$$

perchè  $AA'$  è parallelo a  $\underline{\mathbf{v}}$ , quindi anche in questo caso il momento non cambia.

## Momento assiale di un vettore applicato

Se si fa scorrere, invece, il polo lungo una retta qualsiasi (in generale non parallela alla retta d'azione di  $\underline{\mathbf{v}}$ ) il momento polare varierà essendo:

$$Q'A \wedge \underline{\mathbf{v}} = QA \wedge \underline{\mathbf{v}} + Q'Q \wedge \underline{\mathbf{v}} \quad (3)$$

Se si proietta il momento polare sulla retta in questione otterremo una quantità invariabile rispetto alla scelta del polo sulla retta.

Infatti, detto  $\underline{u}$  il versore della retta  $r$  su cui scorre il polo  $Q$  si ha, moltiplicando (??) scalarmente per  $\underline{u}$ :

$$Q'A \wedge \underline{v} \times \underline{u} = QA \wedge \underline{v} \times \underline{u} + Q'Q \wedge \underline{v} \times \underline{u}$$

Ora:

$$Q'Q \wedge \underline{v} \times \underline{u} = \underline{0}$$

dal momento che  $Q'Q$  è parallelo ad  $\underline{u}$  e quindi i tre vettori sono sicuramente complanari.

Allora è naturale introdurre la quantità:

$$M_r = QA \wedge \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{M}}_Q \times \underline{\mathbf{u}} \quad (4)$$

che prende il nome di *momento assiale* di  $\underline{\mathbf{v}}$  rispetto alla retta  $r$ . Se  $\underline{\mathbf{v}}$  è un vettore vero  $M_r$  è uno *pseudoscalare* e non dipende dalla scelta del polo sulla retta, ma solamente dalla retta  $r$ .

- Il *momento assiale* di un vettore applicato risulta essere *nullo* quando il *prodotto misto* che lo definisce si annulla e cioè quando i tre vettori  $QA$ ,  $\underline{\mathbf{v}}$

e  $\underline{u}$  sono *complanari*.

Ora  $Q$  sta sulla retta di  $\underline{u}$  e  $A$  sulla retta d'azione di  $\underline{v}$ : dunque perchè i tre vettori  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  e  $QA$  siano *complanari* occorre e basta che  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  siano *complanari*; in questo modo anche  $QA$  sta sullo stesso piano. Dunque il prodotto misto si annulla, in generale, se la retta  $r$  e la retta d'azione di  $\underline{v}$  sono complanari.

Di conseguenza

condizione necessaria e sufficiente affinché il momento assiale di un vettore applicato non nullo  $\underline{\mathbf{v}}$ , rispetto ad una retta  $r$ , sia non nullo è che la retta  $r$  e la retta d'azione di  $\underline{\mathbf{v}}$  siano sghembe.

Sistemi di vettori applicati

La teoria dei vettori applicati trova una sua utilità quando anzichè limitarsi ad un solo vettore applicato ci si trova ad operare con un *sistema* di più vettori applicati.

Un sistema di vettori applicati si denota con  $\Sigma_a$ , definito come l'insieme dei vettori applicati di cui ci stiamo occupando:

$$\Sigma_a = \{(A_s, \mathbf{v}_s); s = 1, 2, \dots, n\} \quad (5)$$

Per caratterizzare un *sistema di vettori applicati* sono utili i seguenti vettori:

$$\mathbf{R} = \sum_{s=1}^n \mathbf{v}_s \quad (6)$$

che prende il nome di vettore *risultante* e viene ottenuto eseguendo la somma dei vettori del sistema come se fossero liberi.

Inoltre il vettore *momento risultante* riferito ad un *polo*  $Q$ :

$$\mathbf{M}_Q = \sum_{s=1}^n Q A_s \wedge \mathbf{v}_s \quad (7)$$

che si ottiene sommando i momenti polari, calcolati rispetto allo stesso polo  $Q$  dei singoli vettori applicati del sistema.

- Si vede immediatamente dalla (??) che, in generale il momento risultante di un sistema di vettori applicati differisce dal momento del vettore risultante, pensato applicato in un qualche punto  $A$ .

## Legge di distribuzione dei momenti

Come varia il *momento risultante* di un sistema di vettori applicati al variare del *polo*  $Q$ ?

Scelto un nuovo *polo*  $Q'$ , per la definizione di momento risultante (??) abbiamo:

$$\underline{\mathbf{M}}_{Q'} = \sum_{s=1}^n Q' A_s \wedge \underline{\mathbf{v}}_s = \sum_{s=1}^n (Q'Q + QA_s) \wedge \underline{\mathbf{v}}_s = \sum_{s=1}^n Q'Q \wedge \underline{\mathbf{v}}_s + \sum_{s=1}^n QA_s \wedge \underline{\mathbf{v}}_s$$

Dal momento che  $Q'Q$  non dipende dall'indice  $s$  si può riscrivere:

$$\underline{\mathbf{M}}_{Q'} = Q'Q \wedge \sum_{s=1}^n \underline{\mathbf{v}}_s + \sum_{s=1}^n QA_s \wedge \underline{\mathbf{v}}_s$$

E' facile riconoscere il vettore *risultante* definito da (??) nella prima sommatoria e il momento rispetto al polo  $Q$  definito da (??) nella seconda.

In conclusione si ha la seguente *legge di distribuzione dei momenti al variare del polo*

$$\underline{\mathbf{M}}_{Q'} = \underline{\mathbf{M}}_Q + Q'Q \wedge \underline{\mathbf{R}} \quad (8)$$

che si può leggere in questo modo:

Il momento risultante rispetto al nuovo polo  $Q'$  è uguale al momento risultante rispetto al vecchio polo  $Q$  più il momento del vettore risultante pensato applicato in  $Q$ , calcolato rispetto al nuovo polo  $Q'$ .

La regola mnemonica per scrivere correttamente il termine aggiuntivo  $Q'Q \wedge \mathbf{R}$  consiste nel ricordare che nel vettore  $Q'Q$  il primo punto da scrivere è il nuovo polo, cioè quello che compare nel momento a primo membro della legge di distribuzione e che il vettore  $\mathbf{R}$  deve essere il secondo fattore del prodotto vettoriale.

## Invarianza del momento rispetto al polo

Può accadere, e a quali condizioni, che il momento risultante sia indipendente dalla scelta del polo?

Imponendo nella legge di distribuzione dei momenti la condizione di invarianza del momento risultante rispetto al polo:

$$\underline{\mathbf{M}}_{Q'} = \underline{\mathbf{M}}_Q \quad (9)$$

otteniamo che la (??) può essere verificata se e solo se risulta:

$$Q'Q \wedge \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (10)$$

Se si esclude il caso banale in cui  $Q' \equiv Q$ , la (??) può essere soddisfatta nei seguenti due casi:

a. sistemi a risultante nullo

$$\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (11)$$

In questo caso il momento risultante è lo stesso qualunque sia il punto dello spazio che viene scelto come polo: sarà, perciò sufficiente indicare il momento risultante semplicemente con  $\underline{\mathbf{M}}$  senza specificare il polo.

## Coppia

Un esempio notevole di sistema a risultante nullo è dato dalla *coppia*.

Si dice coppia un sistema di due vettori applicati a risultante nullo.

Il fatto che il risultante sia nullo ci dice che i due vettori sono tra loro paralleli, di verso opposto e di uguale modulo.



Il momento della *coppia* è indipendente dalla scelta del polo e può essere facilmente calcolato scegliendo come polo il punto di applicazione di uno dei due vettori della coppia, il quale risulta avere allora momento nullo:

$$\underline{\mathbf{M}} = QA \wedge \underline{\mathbf{v}} \quad (12)$$

In modulo abbiamo:

$$|\underline{\mathbf{M}}| = |\underline{\mathbf{v}}| d \quad (13)$$

dove il braccio  $d = |QA| \sin \vartheta$  è uguale alla distanza fra le due rette d'azione dei vettori della coppia.

Ne consegue che: *una coppia di vettori non nulli ha momento nullo se e solo se il suo braccio è nullo.*

In tal caso i due vettori sono uguali e contrari e sulla stessa retta d'azione. Per una coppia di braccio nullo si ha  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ .

## b. sistemi a risultante non nullo

Il secondo modo per soddisfare la condizione di invarianza del momento risultante (??) si ha quando il risultante è non nullo e  $Q'Q$  risulta parallelo al risultante. In questo caso il momento risultante è lo stesso per qualunque

polo appartenente alla retta passante per  $Q$  e parallela ad  $\underline{R}$  e non più per qualunque punto dello spazio, preso come polo, come accadeva nel caso precedente. Scegliendo i poli su di una retta parallela ad  $\underline{R}$ , ma diversa, il momento risultante cambia.

Si può anche formulare questo risultato nel modo seguente:

In un sistema di vettori applicati a risultante non nullo il momento risultante non cambia se si fa scorrere il polo lungo una retta parallela al risultante.

Possiamo anche concludere, tenendo conto di tutti i risultati ottenuti che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché il momento risultante di un sistema di vettori applicati sia completamente indipendente dalla scelta del polo è che il vettore risultante sia nullo.

## Sistemi a momento nullo rispetto a un polo

Abbiamo finora analizzato, nella legge di distribuzione dei momenti che cosa succede quando si annulla il termine  $Q'Q \wedge \mathbf{R}$ ; resta ora da analizzare

che cosa succede quando si annulla, invece, il momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  dello spazio:

$$\underline{\mathbf{M}}_Q = \underline{\mathbf{0}} \quad (14)$$

In tale situazione la legge di distribuzione dei momenti (??) si riduce a:

$$\underline{\mathbf{M}}_{Q'} = Q'Q \wedge \underline{\mathbf{R}} \quad (15)$$

relazione che ci dice che se il momento risultante rispetto ad un polo  $Q$  è nullo, allora il momento risultante rispetto ad un altro polo  $Q'$  è uguale al momento del vettore risultante  $\underline{\mathbf{R}}$  applicato nel punto  $Q$ . In questo caso e solo in questo caso il vettore *momento risultante* coincide con il *momento* del *vettore risultante*.

## Teorema di Varignon

Un sistema di vettori applicati in uno stesso punto, o tali che le loro rette d'azione passino per lo stesso punto, ha momento risultante uguale al momento del vettore risultante applicato in quel punto.

### DIMOSTRAZIONE

Scelto come polo il punto comune alle rette d'azione di tutti i vettori, che può essere anche il punto di applicazione, almeno di alcuni di essi, e che chiamiamo  $Q$  calcoliamo il momento risultante rispetto al polo  $Q$ , che secondo la definizione (??) vale:

$$\underline{\mathbf{M}}_Q = \sum_{s=1}^n Q A_s \wedge \underline{\mathbf{v}}_s$$

Ora, se la retta d'azione del generico vettore del sistema passa per  $Q$  o addirittura  $Q$  coincide con il punto di applicazione  $A_s$  segue immediatamente:

$$QA_s \wedge \underline{\mathbf{v}}_s = \underline{\mathbf{0}}, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

dal momento che  $QA_s$  risulta parallelo a  $\underline{\mathbf{v}}_s$  quando la retta d'azione di  $\underline{\mathbf{v}}_s$  passa per  $Q$  e nullo quando  $A_s \equiv Q$ . Ne viene di conseguenza che:

$$\underline{\mathbf{M}}_Q = \underline{\mathbf{0}}$$

e quindi ci troviamo nel caso **b** che abbiamo esaminato prima; perciò risulta soddisfatta la relazione (??) cioè è verificato l'enunciato del teorema.

## Momento assiale di un sistema di vettori

Anche per un sistema di vettori applicati è conveniente introdurre il concetto di *momento assiale* relativo ad una retta  $r$  che contiene il polo. Si ha anche in questo caso:

$$M_r = \underline{\mathbf{M}}_Q \times \underline{\mathbf{u}}$$

identica alla (??). Grazie alla legge di distribuzione dei momenti (??) anche per un sistema di vettori applicati il *momento assiale* risulta indipendente dalla scelta del polo lungo la retta  $r$  assegnata. Infatti abbiamo:

$$M_r = \underline{\mathbf{M}}_{Q'} \times \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{M}}_Q \times \underline{\mathbf{u}} + Q'Q \wedge \underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{u}}$$

Ma dal momento che  $Q'$  e  $Q$  appartengono alla retta  $r$  di direzione  $\underline{\mathbf{u}}$  segue che  $Q'Q$  è parallelo ad  $\underline{\mathbf{u}}$  e quindi il prodotto misto  $Q'Q \wedge \underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{u}}$  è certamente nullo, perchè i tre vettori  $Q'Q$ ,  $\underline{\mathbf{R}}$  e  $\underline{\mathbf{u}}$  risultano complanari.

Dunque il momento assiale risulta indipendente dal punto che si sceglie come polo lungo la retta  $r$ .

## Trinomio invariante

Dato un sistema di vettori applicati  $\Sigma_a$  i vettori  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}_Q$  vengono detti *vettori principali* del sistema. Con questi due vettori è possibile costruire uno *pseudoscalare* che prende il nome di *trinomio invariante* o anche, brevemente *invariante*

$$\mathcal{J} = \mathbf{M}_Q \times \mathbf{R} \quad (16)$$

La denominazione di *invariante* deriva dal fatto che la quantità  $\mathcal{J}$  non dipende dalla scelta del polo  $Q$  nello spazio. Infatti, cambiando polo, la legge di distribuzione dei momenti (??) comporta:

$$\mathcal{J} = \underline{\mathbf{M}}_{Q'} \times \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{M}}_Q \times \underline{\mathbf{R}} + Q'Q \wedge \underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{R}}$$

dove il prodotto misto  $Q'Q \wedge \underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{R}}$  è evidentemente nullo contenendo addirittura due vettori uguali.

Notiamo che, in generale, se il risultante è non nullo l'annullarsi dell'*invariante* equivale a dire che il momento risultante è ortogonale al risultante oppure è nullo. Ciò accade, per sempio, come vedremo, per i sistemi di *vettori paralleli* e per i sistemi di vettori appartenenti ad uno stesso piano (*sistemi piani*).

## Asse centrale di un sistema di vettori applicati

Esistono, dei punti che presi come poli di riduzione rendono minimo il modulo del momento?

Introduciamo un punto  $O$  dello spazio, rispetto al quale supponiamo di conoscere il momento  $\underline{\mathbf{M}}_O$  e un polo variabile  $P$  caratterizzato dal suo vettore spostamento rispetto ad  $O$ :

$$OP = \underline{\mathbf{x}} \equiv (x_i) \equiv (x_1, x_2, x_3) \quad (17)$$

Con queste notazioni il momento rispetto al polo variabile viene espresso come una funzione della variabile vettoriale  $\underline{\mathbf{x}}$ :

$$\underline{\mathbf{M}}_P = \underline{\mathbf{M}}_O + PO \wedge \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}} \quad (18)$$

dove abbiamo scambiato l'ordine del prodotto vettoriale. A noi interessa ricercare, se esistono, i minimi del modulo, ovvero del modulo al quadrato, il cui studio risulta più semplice. Allora la funzione da studiare è:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = (\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}})^2 \quad (19)$$

Per cercare i minimi di questa funzione dobbiamo imporre la condizione necessaria di minimo relativo che richiede di annullare il gradiente della funzione.

Differenziando otteniamo:

$$df(\underline{\mathbf{x}}) = 2(\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}}) \times \underline{\mathbf{R}} \wedge d\underline{\mathbf{x}} \quad (20)$$

Mediante le proprietà del prodotto misto possiamo scambiare l'ordine dei prodotti ottenendo:

$$df(\underline{\mathbf{x}}) = 2(\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}}) \wedge \underline{\mathbf{R}} \times d\underline{\mathbf{x}} \quad (21)$$

Poichè per qualsiasi funzione differenziabile  $f(\underline{\mathbf{x}})$  si ha:

$$df(\underline{\mathbf{x}}) = \nabla f(\underline{\mathbf{x}}) \times d\underline{\mathbf{x}}$$

è immediato ottenere il gradiente della nostra funzione:

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = 2(\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}}) \wedge \underline{\mathbf{R}} \quad (22)$$

Ora la condizione necessaria perchè un punto sia un estremante è che:

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{0}}$$

che nel nostro caso si traduce in:

$$(\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}}) \wedge \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (23)$$

A questo punto si presentano tre possibilità:

a. prima possibilità

$$\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Ma questo caso non è di alcun interesse perchè se il risultante è nullo allora il momento è indipendente dal polo ed è perciò una funzione costante e non vi sono quindi minimi per il suo modulo. D'ora in poi perciò supponiamo senz'altro che:

$$\underline{\mathbf{R}} \neq \underline{\mathbf{0}} \tag{24}$$

b. seconda possibilità

$$\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (25)$$

c. terza possibilità

$$\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}} \quad \text{parallelo ad} \quad \underline{\mathbf{R}}$$

I casi b) e c) si possono conglobare nella seguente equazione:

$$\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}} = \lambda \underline{\mathbf{R}}, \quad \lambda \in R \quad (26)$$

che dà il caso b) per  $\lambda = 0$  e il caso c) per  $\lambda \neq 0$ .

L'equazione vettoriale (??) rappresenta il luogo geometrico dei punti dello spazio che sono estremanti del modulo del momento risultante. Si tratta di un'equazione vettoriale *lineare* in  $x$ , contenente un parametro  $\lambda$  e rappresenta

perciò, come vedremo meglio, in seguito una retta. A tale retta si dà il nome di *asse centrale*.

- Mostriamo ora che si tratta effettivamente di punti di minimo. Mediante la (??) ricaviamo che la condizione (??) equivale a dire che il momento calcolato rispetto ai punti dell'*asse centrale* presi come poli, vale:

$$\underline{\mathbf{M}}_P = \lambda \underline{\mathbf{R}} \quad (27)$$

dove  $\lambda$  si ricava facilmente prendendo il prodotto scalare della relazione (??) con  $\underline{\mathbf{R}}$ :

$$\underline{\mathbf{M}}_P \times \underline{\mathbf{R}} = \lambda \underline{\mathbf{R}}^2$$

Tenendo conto della definizione di *invariante* (??) e del fatto che il risultante è supposto non nullo ricaviamo:

$$\lambda = \frac{\mathcal{J}}{\underline{\mathbf{R}}^2} \quad (28)$$

e dunque, rispetto ai punti dell'*asse centrale* presi come poli il momento vale:

$$\underline{\mu} = \underline{\mathbf{M}}_P = \frac{\mathcal{J}}{\underline{\mathbf{R}}^2} \underline{\mathbf{R}} \quad (29)$$

Esso risulta essere *parallelo* al risultante e inoltre è indipendente dal polo considerato.

Se calcoliamo ora il momento rispetto ad un polo qualsiasi  $Q$  che, in generale, può non appartenere all'*asse centrale*, mediante la legge di distribuzione (??), abbiamo:

$$\underline{\mathbf{M}}_Q = \underline{\mathbf{M}}_P + QP \wedge \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mu} + QP \wedge \underline{\mathbf{R}}$$

ovvero:

$$\underline{\mathbf{M}}_Q = \underline{\mu} + \underline{\mathbf{N}}_Q \quad (30)$$

dove:

$$\underline{\mathbf{N}}_Q = QP \wedge \underline{\mathbf{R}} \quad (31)$$

rappresenta la componente del momento  $\underline{\mathbf{M}}_Q$  normale al risultante  $\underline{\mathbf{R}}$ , mentre  $\underline{\mu}$  rappresenta la componente parallela al risultante.

Di conseguenza il modulo del momento risultante calcolato rispetto al polo  $Q$  è dato dalla composizione pitagorica delle due componenti (parallela e normale al risultante) e vale:



$$|\underline{\mathbf{M}}_Q| = \sqrt{\underline{\mu}^2 + \underline{\mathbf{N}}_Q^2} \quad (32)$$

Poichè  $\underline{\mathbf{N}}_Q^2$  è sempre positivo quando  $Q$  non appartiene all'asse centrale ed è nullo se e solo se  $Q$  appartiene all'asse centrale, ne viene di conseguenza che il modulo del momento sull'asse centrale è minimo e vale  $|\underline{\mu}|$ .

Notiamo che il momento risultante calcolato rispetto ad un polo qualsiasi è costituito da due componenti: una parallela al risultante e indipendente dal polo ( $\underline{\mu}$ ) e una, normale al risultante, che è nulla sull'asse centrale e cresce linearmente allontanandosi da esso ( $\underline{\mathbf{N}}_Q$ ) in quanto risulta:

$$|\underline{\mathbf{N}}_Q| = |\underline{\mathbf{R}}| d \quad (33)$$

dove  $d$  è la distanza del polo  $Q$  dall'asse centrale.

Riassumendo:

L'asse centrale è la retta luogo geometrico dei punti dello spazio, che presi come poli di riduzione, rendono il momento risultante parallelo al risultante e di minimo modulo oppure nullo.

- L'asse centrale è una retta parallela al risultante

Si può vederlo facilmente applicando la legge di distribuzione dei momenti (??) per due poli  $P$  e  $P'$  appartenenti all'asse centrale per i quali il momento è identico e vale  $\underline{\mu}$ . Risulta allora:

$$\underline{\mu} = \underline{\mu} + P'P \wedge \underline{\mathbf{R}} \quad \iff \quad P'P \wedge \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}}$$

e dunque, essendo  $\underline{\mathbf{R}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ , supposto  $P' \neq P$ , segue  $P'P$  parallelo ad  $\underline{\mathbf{R}}$ , e quindi l'asse centrale che è diretto come  $P'P$  risulta parallelo ad  $\underline{\mathbf{R}}$ .

## Rappresentazione cartesiana dell'asse centrale

Abbiamo scritto in precedenza l'equazione vettoriale dell'asse centrale (??) nella forma:

$$\underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{R}} \wedge \underline{\mathbf{x}} = \lambda \underline{\mathbf{R}}$$

Se proiettiamo questa equazione vettoriale su di un sistema di assi cartesiani  $Ox_1x_2x_3 \equiv Oxyz$  otteniamo le seguenti equazioni:

$$M_{Oi} = \varepsilon_{ijk} R_j x_k = \lambda R_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (34)$$

Denotando con  $x, y, z$  gli indici relativi agli assi cartesiani, abbiamo il sistema di tre equazioni lineari in  $x, y, z$  e nel parametro  $\lambda$ :

$$\begin{cases} M_{Ox} + R_y z - R_z y = \lambda R_x \\ M_{Oy} + R_z x - R_x z = \lambda R_y \\ M_{Oz} + R_x y - R_y x = \lambda R_z \end{cases} \quad (35)$$

Queste sono le equazioni parametriche dell'asse centrale. Eliminando il parametro  $\lambda$  si ottengono le equazioni cartesiane dell'asse centrale. Può essere più semplice tener conto dell'espressione per  $\lambda$  ottenuta mediante l'invariante (??). In tal caso, le tre equazioni precedenti, dopo aver sostituito l'espressione per  $\lambda$  risultano essere linearmente dipendenti. Prendendo allora due di esse che risultano *linearmente indipendenti* abbiamo le equazioni cartesiane dell'asse centrale; per esempio, poniamo siano indipendenti le prime due:

$$\begin{cases} M_{Ox} + R_y z - R_z y = \frac{J}{R^2} R_x \\ M_{Oy} + R_z x - R_x z = \frac{J}{R^2} R_y \end{cases} \quad (36)$$

Ora, due equazioni lineari in  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , e tra loro linearmente indipendenti, rappresentano nello spazio una retta.

## Operazioni elementari

Si chiamano *operazioni elementari* su di un sistema di vettori applicati le seguenti operazioni:

- *l'aggiunta o la soppressione di una o più coppie di braccio nullo;*
- *la sostituzione di più vettori applicati in uno stesso punto con il loro*

*risultante, applicato nello stesso punto; o viceversa la decomposizione di un vettore applicato in un punto in più vettori applicati nello stesso punto, il cui risultante è uguale al vettore di partenza.*

Una conseguenza di queste due operazioni elementari consiste nel:

— *trasporto di un vettore lungo la propria retta d'azione.*

Questa terza operazione elementare non è indipendente dalle prime due in quanto il trasporto del vettore lungo la sua retta d'azione si può pensare come l'aggiunta di una coppia di braccio nullo seguita dalla soppressione di un'altra coppia di braccio nullo o dalla sostituzione di due vettori applicati nello stesso punto con il loro risultante.

Per come sono state definite:

Le operazioni elementari non alterano nè il risultante nè il momento risultante

di un sistema di vettori applicati.

e in questo sta la loro importanza ai fini della riducibilità dei sistemi di vettori applicati.

Sistemi riducibili

Diamo la seguente definizione di *riducibilità* di due sistemi:

Due sistemi di vettori applicati si dicono riducibili quando è possibile passare dall'uno all'altro mediante operazioni elementari.

e la definizione di *sistema riducibile a zero*

Un sistema di vettori applicati si dice riducibile a zero, o equilibrato o nullo quando, mediante operazioni elementari, può essere ridotto a coppie di braccio nullo.

Osserviamo che se un sistema di vettori applicati  $\Sigma'_a$  è riducibile ad un altro sistema  $\Sigma''_a$  allora è vero anche il viceversa e cioè che  $\Sigma''_a$  è riducibile a  $\Sigma'_a$ . Infatti, se per passare da  $\Sigma'_a$  a  $\Sigma''_a$  occorre aggiungere, mediante operazioni elementari un sistema nullo  $\Sigma'''_a$ , invertendo tutte le operazioni elementari

(cioè scambiando l'operazione di *aggiungere* con quella di *sopprimere*, ecc.)  
si ritorna da  $\Sigma''_a$  a  $\Sigma'_a$ .

## Teoremi di riducibilità

Il teorema più importante della teoria dei vettori applicati riguarda la riducibilità di un qualunque sistema di vettori applicati ad un sistema di vettori applicati particolarmente semplice.

Un sistema di vettori applicati di risultante  $\underline{\mathbf{R}}$  e momento risultante  $\underline{\mathbf{M}}_Q$  calcolato rispetto a un polo  $Q$  è riducibile ad un solo vettore  $\underline{\mathbf{R}}$  applicato in  $Q$  e ad una coppia di momento  $\underline{\mathbf{M}}_Q$ .

DIMOSTRAZIONE

La dimostrazione di questo teorema può essere fatta in tre stadi successivi, ciascuno dei quali costituisce un teorema a se stante: a questi tre teoremi si dà il nome di *teoremi di riducibilità*.

a. un sistema di più di tre vettori applicati è riducibile a tre vettori

Supponiamo di avere un sistema di più di tre vettori applicati:

$$\Sigma_a = \{(A_s, \mathbf{v}_s) ; s = 1, 2, \dots, n ; n > 3\}$$

e di assegnare tre punti *non allineati*  $P', P'', P'''$ . Allora, dato il generico vettore  $\mathbf{v}_s$ , applicato in  $A_s$ , congiungiamo  $A_s$  con i tre punti  $P', P'', P'''$ . Qualunque sia  $A_s$ , se i quattro punti non sono complanari, i versori che si possono assegnare alle tre rette congiungenti ottenute, costituiscono una

base dello spazio. Allora è possibile decomporre su questa base qualunque vettore dello spazio e, in particolare  $\underline{\mathbf{v}}_s$ .

Se invece i quattro punti risultassero complanari, mediante un'operazione elementare, possiamo far scorrere il vettore  $\underline{\mathbf{v}}_s$  lungo la propria retta d'azione portando il suo punto di applicazione al di fuori del piano e riconducendoci in tal modo al caso di non complanarità. Se poi anche il vettore fosse complanare con i quattro punti basteranno due soli versori di base per decomporlo nel piano e questi esistono sempre grazie al fatto che i punti  $P', P'', P'''$  non sono allineati.

Eseguita la decomposizione risulterà:

$$\underline{\mathbf{v}}_s = \underline{\mathbf{v}}'_s + \underline{\mathbf{v}}''_s + \underline{\mathbf{v}}'''_s$$

dove gli apici denotano i tre vettori componenti di  $\underline{\mathbf{v}}_s$  nelle tre direzioni.

Facendo uso della seconda operazione elementare sostituiamo al vettore  $\underline{v}_s$  i tre vettori componenti. Ora facciamo scorrere ciascuno dei tre vettori lungo la propria retta d'azione fino a raggiungere i punti  $P'$ ,  $P''$ ,  $P'''$ .

Ripetendo l'operazione per ogni vettore applicato del sistema ci riconduciamo a tre sottosistemi di vettori ciascuno dei quali risulta applicato

in  $P', P'', P'''$ :

$$\Sigma'_a = \{(P', \underline{\mathbf{v}}'_s) ; s = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\Sigma''_a = \{(P'', \underline{\mathbf{v}}''_s) ; s = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\Sigma'''_a = \{(P''', \underline{\mathbf{v}}'''_s) ; s = 1, 2, \dots, n\}$$

Sostituendo i vettori applicati nello stesso punto con il loro risultante si giunge ad un sistema di soli tre vettori applicati nei tre punti assegnati:

$$(P', \sum_{s=1}^n \underline{\mathbf{v}}'_s), \quad (P'', \sum_{s=1}^n \underline{\mathbf{v}}''_s), \quad (P''', \sum_{s=1}^n \underline{\mathbf{v}}'''_s)$$

## b. un sistema di tre vettori è riducibile a due vettori applicati

Se si parte da un sistema di tre vettori applicati, oppure si è fatto uso del teorema precedente, questo ulteriore teorema ci consente di ridurre il sistema di partenza ad un sistema più semplice, costituito da due soli vettori applicati.

Dopo una opportuna sequenza di operazioni elementari ci riconduciamoci ai seguenti sistemi di vettori applicati:

$$\{(Q, \underline{\mathbf{v}}_2''), (Q, \underline{\mathbf{v}}_3'')\}, \quad \{(P_1, \underline{\mathbf{v}}_1'), (P_1, \underline{\mathbf{v}}_2'), (P_1, \underline{\mathbf{v}}_3')\}$$

che si sostituiscono con i rispettivi risultanti ottenendo un sistema di due soli vettori applicati in  $Q$  e in  $P_1$ .

## c. un sistema di due vettori è riducibile ad un vettore e a una



## coppia

Partendo da un sistema di due vettori applicati uno nel punto  $Q$  che prendiamo come polo e l'altro nel punto  $P$ , indichiamo questi vettori con:  $(P, \underline{\mathbf{v}}_1)$  e  $(Q, \underline{\mathbf{v}}_2)$ .

Aggiungendo in  $Q$  una coppia di braccio nullo di vettore  $\underline{\mathbf{v}}_1$ , possiamo poi comporre il vettore  $\underline{\mathbf{v}}_2$  con il vettore  $\underline{\mathbf{v}}_1$  appena trasportato. Il loro risultante coinciderà con il risultante  $\underline{\mathbf{R}}$  del sistema, applicato in  $Q$ . Rimane inoltre la coppia di momento:  $\underline{\mathbf{M}}_Q = QP \wedge \underline{\mathbf{v}}_1$ .



## Sistemi a invariante nullo

Grazie a quanto visto a proposito dell'*asse centrale* e dei *teoremi di riducibilità* possiamo concludere che:

- se si sceglie come polo un punto dell'asse centrale, un sistema a risultante non nullo è riducibile a un vettore applicato nel polo, uguale al risultante, e ad una coppia il cui momento è parallelo al risultante e ha minimo modulo rispetto a quello delle coppie relative a poli non appartenenti all'asse centrale.

Un caso particolarmente notevole è dato dai *sistemi ad invariante nullo*. Infatti se si ha che:

$$\mathcal{J} = \mathbf{M}_Q \times \mathbf{R} = 0 \quad (37)$$

si possono presentare le seguenti possibilità:

- $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{M}_Q$  non nulli e ortogonali tra loro: il sistema si riduce al vettore risultante applicato nel polo e ad una coppia di momento ortogonale al

risultante. L'asse centrale in questo caso esiste e la componente del momento parallela al risultante  $\underline{\mu}$  è nulla. Questa situazione si verifica per i poli che non appartengono all'asse centrale;

—  $\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}}$  In questo caso il sistema si riduce alla sola coppia essendo nullo il risultante;

—  $\underline{\mathbf{M}}_Q = \underline{\mathbf{0}}$  Questa situazione si verifica per i poli appartenenti all'asse centrale: infatti sull'asse centrale il momento è uguale a  $\underline{\mu}$ , che per un sistema a invariante nullo è nullo grazie alla (??). Abbiamo allora la circostanza notevole per cui:

- Un sistema a invariante nullo e risultante non nullo è riducibile ad un solo vettore applicato ad un punto dell'asse centrale.

Esistono due classi notevoli di *sistemi a invariante nullo* e sono: i *sistemi di vettori piani* e i *sistemi di vettori paralleli*.

## Sistemi di vettori piani

*Un sistema di vettori si dice piano quando le rette d'azione dei vettori che lo compongono e i loro punti di applicazione appartengono a uno stesso piano, che si dice piano del sistema.*

Scelto un polo su questo piano il momento di ciascun vettore del sistema  $(A_s, \underline{\mathbf{v}}_s)$  sarà ortogonale al vettore stesso e al vettore del piano che congiunge il polo  $Q$  con il punto di applicazione  $A_s$ ; perciò sarà ortogonale al piano. Di conseguenza anche il momento risultante  $\underline{\mathbf{M}}_Q$  risulta ortogonale al piano dei vettori e quindi al loro risultante, che appartiene pure al piano essendo la somma di vettori del piano; oppure risulta nullo.

Di conseguenza l'invariante di un sistema di vettori piani è nullo.

## Sistemi di vettori paralleli



*Si dice che un sistema di vettori applicati è un sistema di vettori paralleli quando le rette d'azione di tutti i suoi vettori sono parallele.*

Un sistema di vettori paralleli non è, generalmente un sistema piano, tuttavia anche un sistema di vettori paralleli è un *sistema a invariante nullo*. Infatti il risultante  $\mathbf{R}$  ha la direzione comune ai vettori paralleli, mentre il momento di ogni vettore è normale a ciascun vettore del sistema, e quindi il momento risultante è normale alla direzione comune di tutti i vettori e quindi anche al risultante. Perciò l'invariante risulta essere nullo.

Dunque, anche in questo caso il momento risulta essere nullo quando è calcolato rispetto a un punto dell'asse centrale scelto come polo e il sistema è riducibile al solo vettore risultante applicato in un punto dell'asse centrale.

## Centro dei vettori paralleli

Sia  $\Sigma_a$  un sistema di  $n$  vettori applicati paralleli di versore comune  $\mathbf{u}$ .

Possiamo rappresentare ciascun vettore del sistema nella forma:

$$\underline{\mathbf{v}}_s = v'_s \underline{\mathbf{u}} \quad (38)$$

dove:

$$v'_s = \underline{\mathbf{v}}_s \times \underline{\mathbf{u}} = \pm |\underline{\mathbf{v}}_s| \quad (39)$$

è la componente del generico vettore del sistema rispetto al versore  $\underline{\mathbf{u}}$ , che

risulta positiva o negativa a seconda che il vettore sia concorde o discorde con  $\underline{\mathbf{u}}$ .

Anche il risultante si può esprimere allo stesso modo:

$$\underline{\mathbf{R}} = R' \underline{\mathbf{u}} \quad (40)$$

con:

$$R' = \underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{u}} = \pm |\underline{\mathbf{R}}| = \sum_{s=1}^n v'_s \quad (41)$$

Scriviamo l'equazione vettoriale dell'asse centrale (??) per il sistema di vettori paralleli; abbiamo:

$$\underline{\mathbf{M}}_O + PO \wedge \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{0}}$$

essendo  $\lambda = 0$  per un sistema di vettori paralleli. Tenendo conto delle informazioni precedenti abbiamo:

$$\sum_{s=1}^n OA_s \wedge v'_s \mathbf{u} + PO \wedge R' \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

essendo  $P$  un punto dell'asse centrale. Raccogliendo il prodotto vettoriale per  $\mathbf{u}$  e tenendo conto che  $PO = -OP$  possiamo scrivere:

$$\left( \sum_{s=1}^n OA_s v'_s - OPR' \right) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (42)$$

Questa equazione, essendo sempre  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$  equivale a richiedere che esista un  $\alpha \in R$  per cui si ha:

$$\sum_{s=1}^n OA'_s v'_s - OPR' = \alpha \mathbf{u}$$

Se si suppone che  $R' \neq 0$ , in modo che l'asse centrale esista, l'equazione precedente si può risolvere rispetto a  $OP$  ottenendo:

$$OP = \frac{1}{R'} \left( \sum_{s=1}^n OA'_s v'_s - \alpha \mathbf{u} \right) \quad (43)$$

che rappresenta, in forma parametrica l'equazione dell'asse centrale per il sistema di vettori paralleli.

Si vede facilmente che l'asse centrale ha la direzione di  $\mathbf{u}$  e che tra tutti i punti dell'asse centrale ne esiste uno e uno solo, corrispondente al valore del parametro:  $\alpha = 0$ , le cui coordinate non dipendono dal versore  $\mathbf{u}$ . Immaginando di ruotare tutti i vettori del sistema di vettori paralleli di uno stesso angolo, anche  $\mathbf{u}$  risulterà ruotato di questo angolo e allo stesso modo l'asse centrale: tuttavia il punto in questione, non dipendendo dal versore  $\mathbf{u}$  rimarrà immutato e si troverà all'intersezione di tutti gli assi centrali che si ottengono ruotando i vettori di un angolo qualsiasi. A questo punto si dà il

nome di *centro dei vettori paralleli* e si denota con  $C$ . La sua definizione si ottiene ponendo  $\alpha = 0$ :

$$OC = \frac{1}{R'} \sum_{s=1}^n OA_s v'_s \quad (44)$$

- Il centro soddisfa l'equazione della stella di tutti gli assi centrali che si ottengono ruotando il versore  $\mathbf{u}$  e perciò rappresenta l'intersezione di tutti gli assi centrali dei sistemi di vettori paralleli ruotati. Osserviamo che al tendere di  $R'$  a zero il centro tende ad un punto improprio in quanto le sue coordinate tendono all'infinito.

- Evidentemente la definizione del *centro dei vettori paralleli* non dipende dalla scelta del punto  $O$ , che è del tutto arbitraria, come si vede aggiungendo  $O'O$  ad entrambi i membri della (??) per cambiare l'origine in  $O'$ : la formula del centro non modifica la sua struttura.

- Dato un sistema di vettori paralleli e concordi i cui punti di applicazione cadono non esternamente ad una superficie (o a una curva nel caso che i punti di applicazione appartengano ad uno stesso piano) convessa il centro cade non esternamente alla superficie (curva) convessa.

Ricordiamo che *una superficie (curva) regolare si dice convessa quando il piano tangente (la retta tangente) in ogni suo punto lascia l'intera superficie (curva) nello stesso semispazio (semipiano).*

Vediamo la dimostrazione nel caso di un sistema di vettori i cui punti di applicazione appartengono ad un piano e sono racchiusi da una curva convessa: l'estensione al caso di una superficie convessa è immediata.

Osserviamo anzitutto che essendo i vettori concordi e **u** il loro versore le componenti dei vettori e del risultante, definite dalle (??) e (??), sono uguali ai rispettivi moduli.





Scegliamo ora un sistema cartesiano ortogonale nel piano della curva convessa  $Oxy$  in modo che l'asse delle ordinate risulti tangente alla curva in un suo punto qualsiasi e scriviamo l'ascissa del centro dei vettori paralleli proiettando la (??) sull'asse delle  $x$ . Otteniamo:

$$x_C = \frac{1}{|\underline{\mathbf{R}}|} \sum_{s=1}^n x_s |\underline{\mathbf{v}}_s| \quad (45)$$

Evidentemente, tenendo conto che il risultante per ipotesi è non nullo abbiamo:

$$|\underline{\mathbf{v}}_s| \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, n; \quad |\underline{\mathbf{R}}| > 0$$

Inoltre nell'ipotesi che tutti i punti di applicazione dei vettori paralleli siano non esterni alla curva, essendo la curva convessa, essi si troveranno nel semipiano chiuso che contiene la curva, e dunque risulterà anche:

$$x_s \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

Di conseguenza dalla (??) risulta che:

$$x_C \geq 0$$

Ora, data l'arbitrarietà della scelta del sistema cartesiano, possiamo ripetere il ragionamento per gli infiniti sistemi di assi il cui asse delle ordinate risulta tangente in un punto della curva, ottenendo, in conclusione che il centro deve trovarsi non esterno all'intersezione di tutti i semipiani delle ascisse non negative, cioè non esterno alla curva convessa.

Centro di due vettori paralleli: metodo grafico

