# *NA. Operatore nabla*

Consideriamo una funzione scalare:

$$f \ : \ A \longrightarrow R \, , \qquad A \subseteq R^3$$

differenziabile, di classe $\mathcal{C}^{(2)}$ almeno. Il valore di questa funzione dipende dalle tre variabili:

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_i) \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

Il suo differenziale si scrive allora:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\, dx_3$$

Possiamo abbreviare la scrittura come:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

## *Gradiente*

Questa scrittura si presenta come un prodotto scalare di un vettore le cui componenti sono le derivate parziali della funzione $f$ e del vettore $d\boldsymbol{x}$.

• Si chiama *gradiente* della funzione $f$ il vettore:

$$\mathrm{grad} \ f \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \tag{NA.1}$$

Si può allora esprimere il differenziale di $f$ nella forma di prodotto scalare, come:

$$df = \mathrm{grad}\ f \times d\boldsymbol{x} \tag{NA.2}$$

• Va notato il fatto che il carattere vettoriale del gradiente non dipende dalla funzione $f$ su cui agisce l'operatore, ma è proprio dell'operatore stesso, poichè le tre derivate parziali si comportano come un vettore, formando un operatore scalare quando vengono combinate con i differenziali delle variabili indipendenti. Nasce allora l'idea di introdurre l'operatore differenziale vettoriale *nabla,* definito da:

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \tag{NA.3}$$

Il gradiente viene allora ottenuto mediante l'azione dell'operatore nabla su una funzione scalare:

$$\mathrm{grad}\ f = \nabla f \tag{NA.4}$$

Si ha allora, per il differenziale la nuova scrittura:

$$df = \nabla f \times d\boldsymbol{x} \tag{NA.5}$$

## *Divergenza*

Il vettore *nabla,* come ogni altro vettore, può essere moltiplicato sia scalarmente che vettorialmente per un altro vettore. Occorre però fare attenzione in quanto nabla, essendo un operatore differenziale, agisce come tale sulle funzioni che vengono scritte alla sua destra, di conseguenza i prodotti sono soggetti alle regole del calcolo differenziale. Per cui, per esempio la scrittura $\nabla f$ differisce dalla scrittura $f\,\nabla$; la prima designa un gradiente, mentre la seconda indica una operatore che manca ancora del suo argomento.

Data una funzione vettoriale (*campo vettoriale* ):

$$\boldsymbol{v} \equiv (v_i) \ : \ A \longrightarrow R^3 \,, \qquad A \subseteq R^3$$

differenziabile, si dice *divergenza* di $\boldsymbol{v}$ lo scalare:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \tag{NA.6}$$

Si usa anche la notazione:

$$\mathrm{div}\ \ \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} \tag{NA.7}$$

## *Rotore*

Il prodotto vettoriale di nabla che agisce su un campo vettoriale $\boldsymbol{v}$:

$$\nabla \wedge \boldsymbol{v} \equiv \left( \varepsilon_{ijk} \, \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \tag{NA.8}$$

prende il nome di *rotore* di $\boldsymbol{v}$. Su usa anche la notazione:

$$\mathrm{rot}\ \ \boldsymbol{v} = \nabla \wedge \boldsymbol{v} \tag{NA.9}$$

## *Laplaciano*

Combinando insieme l'azione di due operatori nabla si possono costruire degli operatori del secondo ordine. Si chiama *laplaciano* l'operatore ottenuto mediante il prodotto scalare di nabla per se stesso; si ha:

$$\nabla^2 = \nabla \times \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{NA.10}$$

Il laplaciano, essendo un operatore scalare, si applica altrettanto bene a funzioni scalari come a funzioni vettoriali. E' indicato talvolta anche con $\Delta$.

## *Formule*

Basandosi sulle proprietà dei vettori e sui teoremi di derivazione, si verificano le seguenti identità:

1) $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$

2) $\nabla \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \nabla \times \boldsymbol{v} + \nabla \times \boldsymbol{w}$

3) $\nabla \wedge (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \nabla \wedge \boldsymbol{v} + \nabla \wedge \boldsymbol{w}$

4) $\nabla \times (\phi\, \boldsymbol{v}) = \phi\, \nabla \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \nabla\phi$

5) $\nabla \wedge (\phi\, \boldsymbol{v}) = \phi\, \nabla \wedge \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \wedge \nabla\phi$

6) $\nabla \times (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \times \nabla \wedge \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \nabla \wedge \boldsymbol{w}$

7) $\nabla \wedge (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w} \times \nabla)\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\, (\nabla \times \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v} \times \nabla)\, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\, (\nabla \times \boldsymbol{w})$

8) $\nabla\, (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w} \times \nabla)\, \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \times \nabla)\, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{w})$

9) $\nabla \times \nabla\phi = \nabla^2\phi$

10) $\nabla \wedge \nabla\phi = 0$

11) $\nabla \times \nabla \wedge \boldsymbol{v} = 0$

12) $\nabla \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{v}) = \nabla (\nabla \times \boldsymbol{v}) - \nabla^2 \boldsymbol{v}$

## *Campo irrotazionale*

Un campo vettoriale $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ si dice *irrotazionale* se soddisfa la condizione:

$$\nabla \wedge \boldsymbol{v} = 0 \tag{NA.11}$$

• Se un campo è irrotazionale, allora, esiste una funzione scalare differenziabile $U = U(\boldsymbol{x})$ tale che $\boldsymbol{v} = \nabla U$ e se il dominio è semplicemente connesso $U$ è una funzione a un sol valore (potenziale).

## *Campo solenoidale*

Un campo vettoriale $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ si dice *solenoidale* se soddisfa la condizione:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = 0 \tag{NA.12}$$

• Se un campo è solenoidale, allora, esiste una funzione vettoriale differenziabile $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ tale che $\boldsymbol{v} = \nabla \wedge \boldsymbol{A}$ (potenziale vettore).

### *Rappresentazione di un campo vettoriale qualunque*

Qualunque campo vettoriale $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ differenziabile si può rappresentare come somma di un campo solenoidale e di un campo irrotazionale, cioè si può scrivere nella forma:

$$\boldsymbol{v} = \nabla \wedge \boldsymbol{A} + \nabla U \tag{NA.13}$$

Infatti se $\boldsymbol{v}$ è differenziabile si possono definire i nuovi campi:

$$\phi = \nabla \times \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{w} = \nabla \wedge \boldsymbol{v} \tag{NA.14}$$

Ma per le proprietà precedentemente enunciate si ha allora:

$$\nabla \times \boldsymbol{w} = \nabla \times \nabla \wedge \boldsymbol{v} = 0$$

Dunque $\boldsymbol{w}$ è un campo solenoidale. Quindi esiste una funzione vettoriale $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ tale che:

$$\boldsymbol{w} = \nabla \wedge \boldsymbol{B} \tag{NA.15}$$

Per come è stata definita tale funzione risulta indeterminata a meno di un gradiente, per cui se si prende:

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} + \nabla \psi$$

al posto di $\boldsymbol{B}$ si ottiene sempre lo stesso $\boldsymbol{w}$. Confrontando la (NA.15) con la seconda delle (NA.14) si ottiene:

$$\nabla \wedge (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}) = 0$$

Dunque esiste una funzione scalare $U = U(\boldsymbol{x})$ tale che:

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{B} = \nabla U \tag{NA.16}$$

Ricordiamo che $\boldsymbol{B}$ è definito a meno di un gradiente, per cui è come se la funzione $U$ fosse del tutto arbitraria. Prendendo la divergenza della (NA.16) abbiamo:

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{B} + \nabla^2 U$$

e per la prima delle (NA.14) segue:

$$\phi = \nabla \times \boldsymbol{B} + \nabla^2 U$$

Giocando ora sull' arbitrarietà di $U$ scegliamo quest'ultima funzione in maniera tale che soddisfi l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 U = \phi \tag{NA.17}$$

Questa scelta di $U$ equivale ad una scelta di $\boldsymbol{B}$ tale che:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = 0$$

e dunque all'identificazione di un campo $\boldsymbol{B}$ solenoidale, definito come rotore di una altro campo vettoriale $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} = \nabla \wedge \boldsymbol{A}$$

Rimane così verificata la (NA.13).