APPENDICI

AL. Algebra vettoriale e matriciale

Vettori

Somma di vettori: struttura di gruppo

Come abbiamo richiamato nell'introduzione vi sono delle grandezze fisiche caratterizzabili come vettori, cioè tali da poter essere descritte mediante segmenti orientati che seguono una regola di somma nota come regola del parallelogrammo. Dal punto di vista algebrico queste entità fisiche sono trattabili come gli elementi di un *gruppo commutativo* rispetto all'operazione di *somma.* Detto X l'insieme dei vettori si ha dunque la struttura di gruppo $(X, +)$:

i) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \ : \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in X \implies \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in X$

ovvero: la somma di due vettori dello spazio è un vettore dello spazio, per cui il gruppo risulta *chiuso* rispetto all'operazione di somma;

ii) $\exists 0 \ \in X \ ; \ \forall \boldsymbol{a} \in X \ : \boldsymbol{a} + 0 = \boldsymbol{a}$

cioè: esiste il vettore nullo (elemento neutro) ed è unico;

iii) $\forall \boldsymbol{a} \in X \, \exists \, (-\boldsymbol{a}) \in X \, ; \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0$

cioè: esiste l'opposto di ogni vettore;

iv) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in X \ : \ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

ovvero vale la proprietà associativa della somma;

v) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in X \ : \ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

cioè il gruppo è commutativo.

Prodotto di un vettore per uno scalare: spazio vettoriale

L'operazione di prodotto di un vettore per uno *scalare,* scelto in un insieme S, ci permette poi di caratterizzare, dato un vettore $\boldsymbol{a}$ e uno scalare α un nuovo vettore $\alpha\,\boldsymbol{a}$ che ha la stessa direzione di $\boldsymbol{a}$, modulo pari a $|\alpha||\boldsymbol{a}|$ e verso concorde o discorde con $\boldsymbol{a}$ a seconda che il segno di α sia positivo o negativo, oppure un vettore nullo se $\alpha = 0$. Dal punto di vista algebrico l'operazione di prodotto di un vettore per uno scalare viene ad introdurre una struttura di *spazio lineare* o *spazio vettoriale* nel gruppo; nello spazio vettoriale (X, S) valgono le seguenti proprietà che si aggiungono a quelle di gruppo:

i) $\forall\alpha,\beta \in S, \boldsymbol{a} \in X \ : \ (\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{a}$

ii) $\forall\alpha,\beta \in S, \boldsymbol{a} \in X \ : \ (\alpha\,\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\,\boldsymbol{a})$

iii) $\forall\alpha \in S, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in X \ : \ \alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\,\boldsymbol{a} + \alpha\,\boldsymbol{b}$

iv) $\exists\, 1 \in S \ ; \ \forall\boldsymbol{a} \in X \ : \ 1\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

In particolare lo spazio fisico con il quale abbiamo abitualmente a che fare viene rappresentato mediante le terne ordinate di numeri reali, per cui $X = R^3$ e gli scalari sono numeri reali, per cui $S = R$. Mentre quando trattiamo dei sistemi olonomi facciamo uso dello spazio R^N, con gli scalari in R. Nel seguito ci occuperemo di vettori in R^3.

Prodotto scalare: metrica euclidea dello spazio

Tra le grandezze, caratterizzabili come vettori, si introduce poi il *prodotto scalare* che è uno *scalare* che denotiamo con $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, e che si definisce come:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\, cos\,\vartheta$$

essendo ϑ l'angolo compreso tra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

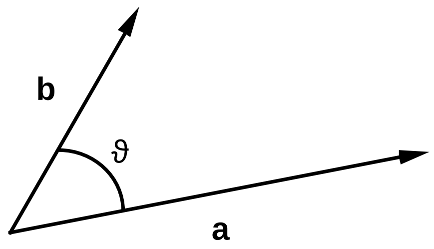

Figura AL. 1: angolo compreso fra due vettori

Segue immediatamente che:

• Il prodotto scalare si annulla: se almeno uno dei due vettori è nullo; oppure se i due vettori sono ortogonali.

• Se il prodotto scalare di due vettori non nulli è nullo, i due vettori sono ortogonali (condizione di ortogonalità).

Valgono poi evidentemente le proprietà *commutativa* e *distributiva:*

i) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3 \ : \ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

ii) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in R^3 \ : \ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

Inoltre:

iii) $\forall \alpha \in R, \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3 \ : \ \alpha(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\alpha\, \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\alpha\, \boldsymbol{b})$

Dal punto di vista geometrico l'introduzione di un prodotto scalare equivale all'introduzione di una *metrica* nello spazio; la metrica introdotta con l'usuale definizione del prodotto scalare è la metrica euclidea dello spazio R^3.

Il modulo di un vettore viene così a rappresentare una *norma* euclidea nello spazio:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}} = \|\boldsymbol{v}\|$$

Prodotto vettoriale

Dati due vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3$ si dice *prodotto vettoriale* dei due vettori, e lo denotiamo con $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$, un terzo *vettore* di direzione normale al piano di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e verso tale che $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ nell'ordine formino una *terna levogira* — cioè tale che per portare un vettore sul successivo si debba compiere una rotazione in senso *antiorario* osservando dal vertice del terzo vettore — e modulo pari all'area del parallelogrammo i cui lati sono i due vettori:

$$|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\, sen\, \vartheta$$

essendo ϑ l'angolo (convesso) compreso fra i due vettori stessi.

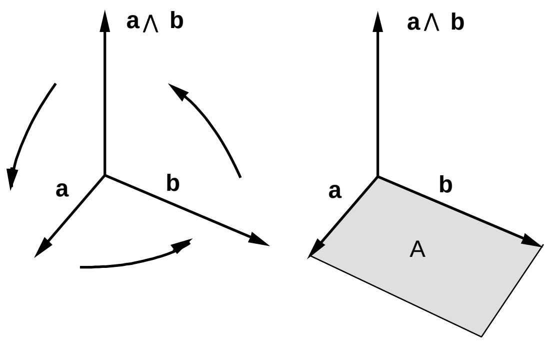

Figura AL. 2: prodotto vettoriale

Segue immediatamente che:

• Il prodotto vettoriale si annulla: se almeno uno dei due vettori è nullo; oppure se i due vettori sono paralleli.

• Se il prodotto vettoriale di due vettori non nulli è nullo, i due vettori sono paralleli (condizione di parallelismo).

Notiamo che il parallelismo fra due vettori si può esprimere anche con la condizione che richiede che un vettore si ottenga dall'altro moltiplicandolo per uno scalare non nullo; se invece lo scalare è nullo il vettore $\boldsymbol{b}$ risulta nullo. In ogni caso sussiste evidentemente la seguente equivalenza:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{b} = \lambda\, \boldsymbol{a}, \ \ \lambda \in R$$

Vale poi evidentemente la proprietà *distributiva.* Notiamo che il prodotto vettoriale non è commutativo, ma *anticommutativo:*

i) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3 \ : \ \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = -\, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$

ii) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in R^3 \ : \ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$

Inoltre:

iii) $\forall \alpha \in R, \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3 \ : \ \alpha(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = (\alpha\, \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge (\alpha\, \boldsymbol{b})$

Prodotto misto

Dati tre vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in R^3$ lo scalare $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ si dice *prodotto misto.*

Evidentemente l'operazione di prodotto vettoriale ha la precedenza sull'operazione di prodotto scalare, altrimenti la scrittura non avrebbe senso, dovendo il prodotto vettoriale agire tra due vettori.

• Geometricamente il prodotto misto rappresenta il volume del parallelepipedo i cui tre spigoli sono i tre vettori, preso con segno positivo se i tre vettori, nell'ordine in cui compaiono nel prodotto, formano una terna levogira, e negativo in caso contrario. Infatti possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\, cos\, \vartheta = A\, |\boldsymbol{c}|\, cos\, \vartheta = \pm A\, h$$

essendo A l'area di base del parallelepipedo pari al modulo del prodotto vettoriale e h l'altezza del parallelepipedo.

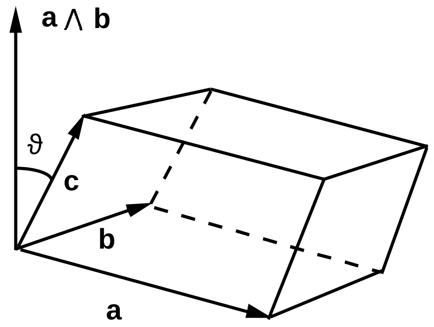

Figura AL. 3: significato geometrico del prodotto misto

Segue immediatamente che:

• Il prodotto misto si annulla: se almeno uno dei tre vettori è nullo; oppure se i tre vettori sono complanari. In questo caso infatti il volume del parallelepipedo è nullo.

• Se il prodotto misto di tre vettori non nulli è nullo, i tre vettori sono complanari (condizione di complanarità).

Oltre alle proprietà conseguenti alle proprietà del prodotto vettoriale e del prodotto scalare, il prodotto misto gode della proprietà per cui è possibile scambiare l'operatore di prodotto vettoriale con l'operatore di prodotto scalare:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$$

la quale risulta facilmente se si calcola il volume del parallelepipedo considerando come base il parallelelogrammo generato dai vettori $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ anzichè $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$.

Doppio prodotto vettoriale

Dati tre vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in R^3$ il vettore $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}$ si dice *doppio prodotto vettoriale.* Le parentesi sono necessarie per stabilire un ordine di precedenza tra i due prodotti vettoriali.

Sussiste la seguente relazione:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{a}$$

che dimostreremo in seguito. E' in ogni caso facile rendersi conto che il doppio prodotto vettoriale è un vettore che appartiene al piano di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, in quanto $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ è ortogonale ad $\boldsymbol{a}$ e a $\boldsymbol{b}$ e il doppio prodotto è a sua volta ortogonale a $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. Quindi deve appartenere al piano di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

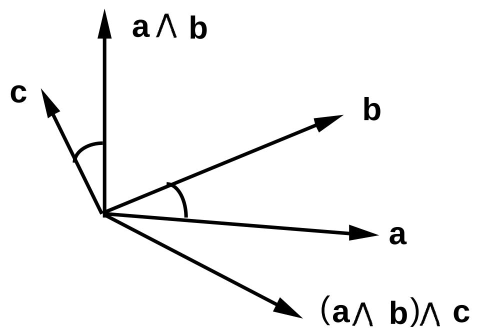

Figura AL. 4: doppio prodotto vettoriale

Notiamo che il doppio prodotto vettoriale non è associativo, cioè si ha generalmente:

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c}$$

Infatti, grazie alla anticommutatività del prodotto vettoriale risulta:

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}$$

in quanto:

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = -\, (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \wedge \boldsymbol{a}$$

e ci si riconduce al caso precedentemente esaminato.

• In ogni caso la regola mnemonica per sviluppare il doppio prodotto vettoriale è la seguente: si calcola prima il prodotto scalare del vettore esterno alla parentesi con il vettore *più lontano* e si moltiplica lo scalare ottenuto per il vettore *più vicino;* si sottrae poi il prodotto scalare del vettore esterno alla parentesi con il vettore *più vicino* moltiplicato per il vettore *più lontano.*

Triplo prodotto misto

Dati quattro vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in R^3$ si dice *triplo prodotto misto* lo scalare $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$.

Grazie ai risultati precedenti sussistono le relazioni seguenti:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d})$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d})$$

Vettori linearmente indipendenti

Dati n vettori non nulli $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ e n scalari $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ si dice che i vettori sono *linearmente indipendenti* se si ha:

$$\alpha_1\, \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\, \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_n\, \boldsymbol{a}_n = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \cdots, \alpha_n = 0$$

Si dice poi *dimensione* di uno spazio il numero massimo di vettori linearmente indipendenti che in esso si possono ottenere. Lo spazio fisico, che rappresentiamo con (R^3, R) ha tre dimensioni, in quanto si possono avere al massimo tre vettori linearmente indipendenti. Infatti ogni terna ordinata di R^3 si può esprimere, ad esempio mediante la combinazione:

$$(x, y, z) \equiv x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) + z\,(0, 0, 1)$$

Base di vettori nello spazio

Un insieme di vettori linearmente indipendenti in numero pari alla dimensione dello spazio prende il nome di *base dello spazio.* In particolare in R^3 una base è costituita da tre vettori linearmente indipendenti e la indichiamo con:

$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$$

o anche:

$$\{\boldsymbol{e}_i\,,\ i = 1, 2, 3\}$$

Base ortonormale

Una base dello spazio, in particolare in R^3, si dice ortonormale quando i vettori di base sono tra loro ortogonali e di modulo unitario. Solitamente si chiamano *versori* i vettori di modulo unitario, per cui si parla, in questo caso di versori della base. E' comodo scrivere le relazioni di ortogonalità e di norma unitaria dei vettori di base nella forma sintetica:

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, 2, 3 \tag{AL.1}$$

che prende il nome di *condizione di ortonormalità.*

Il simbolo:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & per\ i \neq k \\ \\ 1 & per\ i = k \end{cases}$$

si dice *simbolo di Kronecher.* La relazione precedente ci dice semplicemente che due vettori di base di indice diverso sono tra loro ortogonali:

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = 0, \qquad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = 0, \qquad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = 0$$

E ogni vettore della base ha modulo unitario (versore):

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = 1 \qquad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = 1, \qquad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 1$$

La base si dice poi *levogira* se per portare un vettore a sovrapporsi a quello successivo si deve compiere una rotazione antioraria, osservando dal vertice del terzo vettore.

Rappresentazioni di un vettore

Di un vettore, e quindi delle relazioni tra vettori, si possono dare tre tipi di rappresentazione:

1. Rappresentazione assoluta o simbolica

Questa rappresentazione considera il vettore come ente algebrico indipendentemente dalla scelta di una base di riferimento nello spazio. In questo caso, come abbiamo visto, il vettore viene rappresentato mediante un simbolo che lo identifica: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ecc. Relazioni assolute o simboliche tra vettori sono del tipo:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

In questa formulazione le leggi della meccanica vengono espresse in una forma che non dipende dal sistema di assi cartesiani del riferimento.

2. Rappresentazione semicartesiana

Poichè il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che si possono trovare nello spazio R^3 è 3, un quarto vettore, qualunque $\boldsymbol{v} \in R^3$ risulta linearmente dipendente dai vettori di una base prescelta, e in particolare di una base ortonormale. E' possibile allora rappresentare un vettore qualunque nello spazio come combinazione lineare dei tre vettori della base, nella forma:

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i \qquad \text{(AL.2)}$$

essendo v_1, v_2, v_3 degli scalari opportuni che prendono il nome di *componenti* del vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto alla base. La rappresentazione (AL.2) del vettore $\boldsymbol{v}$ si dice *rappresentazione semicartesiana.* La scrittura (AL.2) può essere abbreviata in:

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$$

dove si conviene di sottintendere la somma da 1 a 3 sugli indici ripetuti (convenzione di Einstein). La determinazione delle componenti risulta molto semplice se la base utilizzata è ortonormale, in quanto, grazie alla relazione di ortonormalità si ha:

$$v_k = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_k \tag{AL.3}$$

Infatti si ha:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}_k = v_i \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k = v_i \delta_{ik} = v_k$$

in quanto il simbolo di Kronecher è nullo quando l'indice $k \neq i$ e vale 1 quando $k = i$. Osserviamo allora che la presenza di tale simbolo muta il nome di un indice sommato in quello dell'altro indice.

• Quando si lavora con più indici ogni coppia di indici ripetuti deve avere denominazione diversa per evitare confusioni. Ad esempio si scrive:

$$a_i b_i \; v_k u_k$$

in modo che risulti chiaro l'abbinamento degli indici che vanno sommati.

• Quando un indice è ripetuto, cioè sommato, si può cambiare il nome dell'indice senza modificare il significato della scrittura. Per esempio:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_k b_k$$

3. Rappresentazione relativa o indiciale o cartesiana

Scelta una base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ nello spazio restano individuate le componenti di ogni vettore $\boldsymbol{v}$ relative alla base, che se la base è ortonormale, risultano espresse dalla (AL.3). Fissata la base ogni vettore viene posto in corrispondenza biunivoca con le sue componenti, cioè con una terna ordinata di numeri reali. E' possibile, perciò rappresentare ogni vettore dello spazio mediante le sue componenti e scrivere:

$$\boldsymbol{v} \equiv (v_1, v_2, v_3) \equiv (v_i) \tag{AL.4}$$

Questa rappresentazione viene detta *relativa* in quanto le componenti dipendono dalla scelta della base e cambiano per lo stesso vettore se si cambia la scelta della base. Si parla anche di rappresentazione *indiciale,* o *cartesiana.* Ogni relazione tra vettori, per esempio:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

che si può riscrivere utilizzando la rappresentazione semicartesiana di ogni vettore:

$$a_i \boldsymbol{e}_i + b_i \boldsymbol{e}_i = c_i \boldsymbol{e}_i$$

equivale anche alla scrittura:

$$(a_i + b_i - c_i)\, \boldsymbol{e}_i = 0$$

dove è sottintesa la somma da 1 a 3 sull'indice i ripetuto. Ma essendo i vettori di base, per definizione, dei vettori linearmente indipendenti, devono essere nulli i coefficienti della combinazione lineare e quindi risulta:

$$a_i + b_i - c_i = 0$$

Di conseguenza ogni relazione fra vettori in forma assoluta, una volta fissata la base, è equivalente ad una relazione fra le componenti, cioè ad una relazione in forma indiciale; nell'esempio si ha:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_i+b_i=c_i$$

Notiamo che la rappresentazione per componenti è quella con la quale concretamente si fanno i calcoli numerici.

• E' immediato verificare che le componenti dei versori di una base ortonormale relative alla stessa base sono date dal simbolo di Kronecher; infatti si ha:

$$(e_i)_k=\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_k=\delta_{ik}$$

E quindi i versori della base, rispetto alla base stessa hanno la rappresentazione cartesiana:

$$\boldsymbol{e}_1\equiv(1,0,0), \qquad \boldsymbol{e}_2\equiv(0,1,0), \qquad \boldsymbol{e}_3\equiv(0,0,1)$$

• E' importante sottolineare che la base sulla quale vengono proiettati i vettori e le relazioni tra vettori, ai fini della risoluzione di un problema non coincide necessariamente con la base dell'osservatore di un fenomeno fisico, o del moto di un corpo. In molti casi è utile scegliere una base i cui versori sono orientati in maniera diversa dagli assi cartesiani dell'osservatore, come accade, per esempio nei problemi di dinamica del corpo rigido.

Rappresentazione indiciale del prodotto scalare

E' facile ottenere, una volta scelta una *base ortonormale,* la rappresentazione del prodotto scalare di due vettori $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ relativa alla base, o indiciale. Abbiamo infatti:

$$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b}=b_k\boldsymbol{e}_k$$

Da cui segue, utilizzando le proprietà viste in precedenza:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{e}_i \times b_k \boldsymbol{e}_k = a_i b_k \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k = a_i b_k \delta_{ik} = a_i b_i$$

Quindi la rappresentazione del prodotto scalare relativa ad una base è data da:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \text{(AL.5)}$$

Simbolo di Levi-Civita

Consideriamo ora i prodotti vettoriali dei versori di una base ortonormale levogira; abbiamo i prodotti non nulli:

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \qquad \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

Gli altri possibili prodotti non nulli si ottengono dai precedenti per anticommutazione del prodotto vettoriale. E i prodotti nulli sono quelli dei versori per se stessi, in quanto vettori uguali sono certamente anche paralleli:

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 = 0 \qquad \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_2 = 0 \qquad \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_3 = 0$$

E' possibile riassumere questi risultati con la seguente scrittura compatta:

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk} \, \boldsymbol{e}_k \qquad \text{(AL.6)}$$

Il simbolo ε_{ijk} è detto *simbolo di Levi-Civita* ed è caratterizzato dalla seguente struttura:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & se\ almeno\ due\ indici\ sono\ uguali \\ \\ \pm 1 & altrimenti \end{cases}$$

essendo $+1$ se la classe della permutazione degli indici è di ordine pari e -1 se di ordine dispari, assumendo:

$$\varepsilon_{123} = +1$$

Ne viene di conseguenza che il simbolo di Levi-Civita cambia segno ogni volta che si scambiano due indici; per cui si ha, ad esempio:

$$\varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{123} = +1$$

Rappresentazione indiciale del prodotto vettoriale

Siamo allora in grado di dare la rappresentazione indiciale del prodotto vettoriale di due vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, cioè di scriverne le componenti rispetto ad una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Partendo dalla rappresentazione semicartesiana dei due vettori:

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b} = b_j\, \boldsymbol{e}_j$$

possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{e}_i \wedge b_j \boldsymbol{e}_j = a_i b_j\, \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = a_i b_j\, \varepsilon_{ijk}\, \boldsymbol{e}_k$$

Rimangono identificate le componenti del prodotto vettoriale rispetto alla base come:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \equiv (\varepsilon_{ijk}\, a_i b_j)$$

Esplicitando si ha:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \equiv (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Una regola mnemonica semplice per costruire le componenti del prodotto vettoriale è data dal determinante simbolico:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

il cui sviluppo, secondo gli elementi della prima riga, fornisce direttamente la rappresentazione semicartesiana del prodotto vettoriale.

Rappresentazione indiciale del prodotto misto

Dati tre vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ le cui rappresentazioni semicartesiane sulla base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_i\}$ sono:

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{c} = c_k \boldsymbol{e}_k$$

il loro prodotto misto viene rappresentato mediante le componenti nel modo seguente:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (a_i \boldsymbol{e}_i) \wedge (b_j \boldsymbol{e}_j) \times (c_k \boldsymbol{e}_k) = a_i b_j c_k\, \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k =$$

$$= a_i b_j c_k \, \varepsilon_{ij\ell} \, \boldsymbol{e}_\ell \times \boldsymbol{e}_k = \varepsilon_{ij\ell} \, \delta_{\ell k} \, a_i b_j c_k = \varepsilon_{ijk} \, a_i b_j c_k$$

Dunque la rappresentazione relativa alla base del prodotto misto è:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \varepsilon_{ijk} \, a_i b_j c_k \tag{AL.7}$$

Da questo risultato è facile verificare la proprietà del prodotto misto secondo cui $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$.

Tenendo conto della regola del determinante simbolico che esprime il prodotto vettoriale possiamo dare una rappresentazione in termini di determinante anche per il prodotto misto:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Questa scrittura si può interpretare come lo sviluppo secondo gli elementi della terza riga di un determinante costruito mediante le componenti dei tre vettori; per cui si ha:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{AL.8}$$

Rappresentazione indiciale del doppio prodotto vettoriale

Dati tre vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ la cui rappresentazione semicartesiana sulla base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_i\}$ è:

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b} = b_j \boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{c} = c_k \boldsymbol{e}_k$$

il doppio prodotto vettoriale si scrive:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = [(a_i \boldsymbol{e}_i) \wedge (b_j \boldsymbol{e}_j)] \wedge (c_k \boldsymbol{e}_k) = a_i b_j c_k \, (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) \wedge \boldsymbol{e}_k =$$

$$= a_i b_j c_k \, \varepsilon_{ij\ell} \, \boldsymbol{e}_\ell \wedge \boldsymbol{e}_k = a_i b_j c_k \, \varepsilon_{ij\ell} \, \varepsilon_{\ell km} \, \boldsymbol{e}_m$$

Non è difficile verificare che:

$$\varepsilon_{ij\ell} \, \varepsilon_{\ell Km} = \delta_{ik} \, \delta_{jm} - \delta_{im} \, \delta_{jk} \tag{AL.9}$$

Infatti gli indici j, k devono simultaneamente differire da i ed essere diversi tra loro, e dal momento che ogni indice può assumere solamente tre valori, rimangono solo le possibilità $i = k, j = m$ oppure $i = m, j = k$. Nel primo caso i due simboli di Levi-Civita risultano uguali e quindi il loro prodotto è comunque 1, nel secondo caso risultano opposti e il loro prodotto è quindi -1.

Di conseguenza il doppio prodotto vettoriale si riscrive:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = (\delta_{ik} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jk}) \, a_i b_j c_k \, \boldsymbol{e}_m = a_i c_i b_m \, \boldsymbol{e}_m - b_j c_j a_m \, \boldsymbol{e}_m$$

Rimane così identificata la rappresentazione:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \equiv (a_i c_i b_m - b_j c_j a_m)\, \boldsymbol{e}_m \qquad \text{(AL.10)}$$

Tenendo conto della rappresentazione indiciale del prodotto scalare possiamo anche scrivere:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{a}$$

Resta verificata dunque la regola del doppio prodotto vettoriale data in precedenza senza dimostrazione.

Rappresentazione indiciale del triplo prodotto misto

E' immediato allora ottenere, in base ai risultati precedenti, anche la rappresentazione indiciale del triplo prodotto misto:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} = a_i c_i b_j d_j - b_i c_i a_j d_j \qquad \text{(AL.11)}$$

Operatori lineari e matrici

Operatori lineari

Dato uno spazio lineare (X, S) una funzione:

$$\boldsymbol{f} \, : X \longrightarrow X$$

si dice *operatore lineare* quando soddisfa le seguenti proprietà:

i) $\forall \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in X \ : \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$

ii) $\forall \boldsymbol{x} \in X, \ \forall \alpha \in S \ : \ \boldsymbol{f}(\alpha\, \boldsymbol{x}) = \alpha\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Noi ci occuperemo degli operatori lineari nello spazio tridimensionale reale (R^3, R) dotato di metrica euclidea; e indicheremo tali operatori con simboli del tipo $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, ecc., tralasciando, come si fa usualmente le parentesi davanti all'argomento. Le proprietà di linearità di un operatore $\underset{\sim}{A}$ si scrivono allora:

i) $\forall \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y} \in R^3 \ : \ \underset{\sim}{A}\ (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{x} + \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{y}$

ii) $\forall \boldsymbol{x} \in R^3, \ \forall \alpha \in R \ : \ \underset{\sim}{A}\ (\alpha\, \boldsymbol{x}) = \alpha \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{x}$

In base all'azione di un operatore su un vettore si definiscono le operazioni di somma tra operatori e di prodotto di un operatore per uno scalare:

$$(\underset{\sim}{A}\ + \underset{\sim}{B}\ )\, \boldsymbol{x} = \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{x} + \underset{\sim}{B}\ \boldsymbol{x}$$

definisce l'operatore somma dei due operatori $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$; e:

$$(\alpha \underset{\sim}{A}\ )\, \boldsymbol{x} = \alpha \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{x}$$

definisce l'operatore prodotto di $\underset{\sim}{A}$ per lo scalare α.

Rappresentazioni di un operatore lineare

Come per un vettore, anche per un operatore lineare e per le relazioni che coinvolgono operatori lineari è possibile dare tre tipi di rappresentazione.

1. Rappresentazione assoluta o simbolica

Come per un vettore la *rappresentazione assoluta* o *simbolica* di un operatore lo designa come ente indipendente dall'osservatore e permette di scrivere le relazioni che coinvolgono degli operatori in forma indipendente dalla base dello spazio. Relazioni assolute sono relazioni del tipo:

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}\ , \qquad (\underset{\sim}{A} + \alpha\,\underset{\sim}{B}\,)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

2. Rappresentazione relativa o indiciale: matrice di un operatore

La relazione che lega il vettore $\boldsymbol{v} \in R^3$ al suo trasformato $\boldsymbol{w} \in R^3$ mediante l'azione di un operatore $\underset{\sim}{A}$:

$$\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} \tag{AL.12}$$

è una relazione assoluta. Possiamo ottenere una rappresentazione di questa relazione, *relativa* ad una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_i\}$ dello spazio, facendo uso delle rappresentazioni semicartesiane dei vettori:

$$\boldsymbol{w} = w_i\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{v} = v_k\boldsymbol{e}_k$$

Sostituendo nella (AL.12) abbiamo:

$$w_i\boldsymbol{e}_i = \underset{\sim}{A}\ v_k\boldsymbol{e}_k$$

Prendendo il prodotto scalare con $\boldsymbol{e}_j$ otteniamo:

$$\boldsymbol{e}_j \times (w_i\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_j \times \underset{\sim}{A}\ v_k\boldsymbol{e}_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad w_i\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_k v_k$$

E grazie alla relazione di ortonormalità (AL.1) si ha:

$$w_i\delta_{ij} = \boldsymbol{e}_j \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_k v_k \qquad \Longleftrightarrow \qquad w_j = \boldsymbol{e}_j \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_k v_k$$

Introduciamo allora il simbolo a due indici:

$$A_{jk} = \boldsymbol{e}_j \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_k \tag{AL.13}$$

che prende il nome di *elemento di matrice* dell'operatore $\underset{\sim}{A}$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Otteniamo allora la scrittura completamente indiciale:

$$w_j = A_{jk} v_k$$

che rappresenta, in forma relativa alla base, la relazione (AL.12). Gli elementi di matrice sono per un operatore ciò che le componenti sono per un vettore. La tabella rappresentativa di tutte le componenti di un operatore lineare, rispetto ad una base, prende il nome di *matrice* dell'operatore. Cambiando base la matrice di uno stesso operatore cambia i suoi elementi, analogamente a quanto accade per un vettore, le cui componenti cambiano se si muta la base rispetto alla quale vengono calcolate. La matrice rappresentativa di un vettore sarà scritta per esteso nella forma:

$$\underset{\sim}{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

o in forma abbreviata:

$$\underset{\sim}{A} \equiv \|A_{jk}\|$$

• Spesso, nella pratica, il termine *matrice* e il termine *operatore* vengono usati indifferentemente, anche se propriamente parlando la matrice è la rappresentazione relativa ad una base di un operatore, mentre per operatore si intende un ente assoluto, indipendente dalla base alla quale lo si riferisce per effettuare i calcoli numerici.

• Utilizzando la rappresentazione matriciale di un operatore è conveniente rappresentare i vettori sui quali un operatore agisce in forma di *vettori colonna* , in maniera tale che il risultato dell'azione di un operatore su di un vettore risulta essere un nuovo vettore ottenuto effettuando il *prodotto righe per colonne.* In altri termini la scrittura:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} \equiv (A_{jk} v_k)$$

si sviluppa per esteso come:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \\ A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3 \\ A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3 \end{pmatrix}$$

Una forma quadratica del tipo $\boldsymbol{u} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v}$ viene rappresentata allora come:

$$(u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3 \\ A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3 \\ A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3 \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare tra due vettori, in questo formalismo, risulta scritto come prodotto righe per colonne di un vettore riga per un vettore colonna.

prodotto tensoriale

Dati due vettori $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3$ riferiti ad una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_i\}$, la cui rappresentazione semicartesiana è:

$$\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b} = b_k \boldsymbol{e}_k$$

si dice *prodotto tensoriale* di $\boldsymbol{a}$ per $\boldsymbol{b}$, e lo si denota con $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$, l'operatore la cui matrice relativa alla stessa base è definita come:

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \equiv \|a_i b_k\| \tag{AL.14}$$

Per esteso si ha allora:

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \equiv \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \tag{AL.15}$$

• Se si eccettuano i casi in cui almeno uno dei due vettori sia nullo, oppure i due vettori siano paralleli, il prodotto tensoriale non è commutativo.

Valgono le seguenti proprietà:

i) $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\, (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{v})$

ii) $\boldsymbol{v}\, (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}$

che si verificano facilmente passando alla rappresentazione indiciale; infatti per la prima si ha:

$$(a_i b_k)\, v_k = a_i\, (b_k v_k)$$

E per la seconda:

$$v_i\, (a_i b_k) = (v_i a_i)\, b_k$$

Come esempio di prodotto tensoriale esaminiamo il prodotto tensoriale di due versori di una base ortonormale. Un versore $\boldsymbol{e}_i$ ha tutte le componenti nulle eccettuata la i-esima che vale 1. Di conseguenza il prodotto tensoriale di due versori $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k$ ha tutti gli elementi di matrice nulli eccettuato quello di indici ik che vale 1. Si ha perciò:

$$\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k \equiv \|\delta_{ij}\delta_{\ell k}\|$$

Si ha così ad esempio:

$$\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Rappresentazione semicartesiana di un operatore

A questo punto possiamo dare la rappresentazione semicartesiana di un operatore. Sappiamo che, scelta una base nello spazio:

$$\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad w_i = A_{ik} v_k$$

e tenendo conto che:

$$\boldsymbol{w} = w_i \boldsymbol{e}_i, \qquad v_k = \boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{v}$$

possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{w} = w_i \boldsymbol{e}_i = A_{ik} \boldsymbol{e}_i \, (\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{v}) = (A_{ik} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k) \, \boldsymbol{v}$$

per la prima proprietà del prodotto tensoriale. Ma data l'arbitrarietà di $\boldsymbol{v}$ segue l'identificazione:

$$\underset{\sim}{A} = A_{ik} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k \tag{AL.16}$$

che fornisce la rappresentazione semicartesiana di un operatore. Per esteso questa scrittura equivale a dire:

$$\underset{\sim}{A} = A_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + A_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante

Per una matrice $N \times N$, come è noto dall'algebra, si dice *determinante* la somma algebrica di tutti i prodotti di N elementi ottenuti scegliendo un solo elemento per ogni riga e per ogni colonna e convenendo di moltiplicare per -1 i prodotti nei quali le permutazioni dei primi e dei secondi indici degli elementi di matrice sono di classe diversa.

Per una matrice 3×3 ciò significa che il determinante è dato da:

$$\det(\underset{\sim}{A}) = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{21}A_{32}A_{13} + A_{12}A_{23}A_{31} - \\ - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{32}A_{23} - A_{21}A_{12}A_{33} \tag{AL.17}$$

Per una matrice 2×2 si ha semplicemente:

$$\det(\underset{\sim}{A}) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \tag{AL.18}$$

Per denotare il determinante in forma estesa si usa la scrittura:

$$\det(\underset{\sim}{A}) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Operatore trasposto e matrice trasposta

Data una matrice $\|A_{ik}\|$ si dice *matrice trasposta* la matrice $\|A_{ki}\|$ che si ottiene scambiando le righe con le colonne, cioè scambiando l'ordine degli indici di ogni elemento di matrice. Si dice, poi, operatore trasposto di $\underset{\sim}{A}$ l'operatore la cui matrice rappresentativa è la matrice trasposta di $\underset{\sim}{A}$ rispetto alla stessa base dello spazio. L'operatore trasposto si denota con $\underset{\sim}{A}^{T}$. Si ha, allora:

$$A_{ik}^{T} = A_{ki} \tag{AL.19}$$

Mostriamo che sussiste la seguente proprietà per il trasposto di un operatore. Dato un operatore $\underset{\sim}{A}$ si ha:

$$\boldsymbol{a} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{b} = (\underset{\sim}{A}^{\ T}\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}, \qquad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3 \tag{AL.20}$$

Infatti, scelta una base dello spazio si può scrivere:

$$\boldsymbol{a} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{b} = a_i A_{ik} b_k = A^T_{ki} a_i b_k = (\underset{\sim}{A}^{\ T}\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b}$$

Operatore inverso

Dato un operatore $\underset{\sim}{A}$ per cui si può scrivere:

$$\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v}$$

si dice *operatore inverso* di $\underset{\sim}{A}$, quando esiste, l'operatore $\underset{\sim}{A}^{\ -1}$ per cui si ha:

$$\boldsymbol{v} = \underset{\sim}{A}^{\ -1}\boldsymbol{w}$$

L'operatore inverso, quando esiste è unico. Infatti, supposto che esista un secondo operatore $\underset{\sim}{A}^{\ *}$ che gode della proprietà:

$$\boldsymbol{v} = \underset{\sim}{A}^{\ *}\boldsymbol{w}$$

segue:

$$\underset{\sim}{A}^{\ *}\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}^{\ -1}\boldsymbol{w}, \qquad \forall \boldsymbol{w} \in R^3$$

e data l' arbitrarietà di $\boldsymbol{w}$ si ha $\underset{\sim}{A}^{\ *} = \underset{\sim}{A}^{\ -1}$.

Operatore e matrice identità

Si dice operatore identità l'operatore $\underset{\sim}{I}$ che lascia inalterato ogni vettore dello spazio:

$$\underset{\sim}{I}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in R^3$$

La matrice che rappresenta l'operatore identità rispetto ad una base ortonormale qualunque dello spazio è una matrice i cui elementi sono i simboli di Kronecher. Infatti, scelta una base ortonormale qualunque si ha, per definizione di elemento di matrice:

$$I_{ik} = \boldsymbol{e}_i \times \underset{\sim}{I}\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k = \delta_{ik}$$

avendo tenuto conto che l'identità non modifica i vettori sui quali agisce.

• Si noti che questo risultato non dipende dalla scelta della base, per cui l'operatore identità ha la stessa rappresentazione rispetto a qualsiasi base ortonormale. La matrice rappresentativa dell'operatore identità si dice *matrice identità:*

$$\underset{\sim}{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{AL.21}$$

La rappresentazione semicartesiana dell'identità risulta allora la seguente:

$$\underset{\sim}{I} = \delta_{ik}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i$$

Ovvero:

$$\underset{\sim}{I} = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3 \qquad \text{(AL.22)}$$

che significa, evidentemente:

$$\underset{\sim}{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operatore e matrice prodotto

Si dice *operatore prodotto* tra due operatori $\underset{\sim}{A} \equiv \|A_{ij}\|$ e $\underset{\sim}{B} \equiv \|B_{jk}\|$ e lo si denota con $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}$ un operatore $\underset{\sim}{C}$ i cui elementi di matrice, rispetto alla base a cui si riferiscono gli operatori, sono dati da:

$$C_{ik} = A_{ij}B_{jk} \qquad \text{(AL.23)}$$

cioè dal prodotto righe per colonne degli elementi della prima matrice per gli elementi della seconda. La matrice rappresentativa, rispetto a una base, dell'operatore prodotto prende il nome di *matrice prodotto.* Per induzione si può definire il prodotto di più operatori.

• Il prodotto tra operatori generalmente non è commutativo.

Dalla definizione segue subito la seguente proprietà inerente il trasposto del prodotto:

$$(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})^T = \underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{A}^T \qquad \text{(AL.24)}$$

Infatti, detto $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}$ si ha, passando alla rappresentazione indiciale:

$$C_{ik}^T = C_{ki} = A_{kj}B_{ji} = B_{ij}^T A_{jk}^T$$

che equivale alla relazione assoluta (AL.24).

Operatori di proiezione

Un *operatore di proiezione* è un operatore la cui azione è quella di trasformare un vettore dello spazio nella proiezione di quel vettore su un sottospazio. Se lo spazio è R^3 il vettore viene proiettato su di una retta o su un piano. Un operatore di proiezione è caratterizzabile matematicamente per il fatto che si comporta come l'identità quando agisce su qualunque vettore del sottospazio su cui proietta.

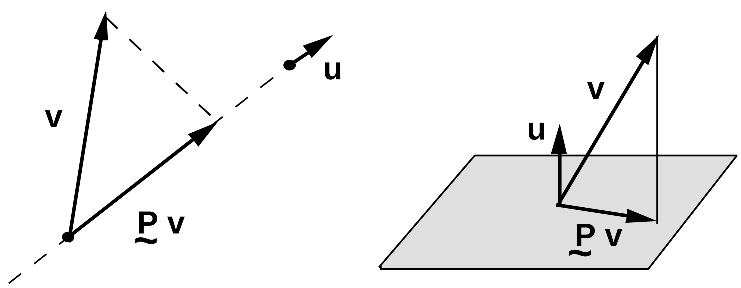

Figura AL. 5: azione di un operatore di proiezione

Cerchiamo una traduzione in termini algebrici di questa caratteristica, per ora esposta in modo intuitivo.

Scelto un vettore $\boldsymbol{v} \in R^3$ qualunque, e indicato con $\underset{\sim}{P}$ l'operatore di proiezione su un sottospazio $S \subseteq R^3$ si può scrivere:

$$S = \{\boldsymbol{w} \in R^3\,;\ \boldsymbol{w} = \underset{\sim}{P}\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v} \in R^3\}$$

E inoltre:

$$\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{P}\ \boldsymbol{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{w} = \underset{\sim}{P}\ \boldsymbol{w}$$

in quanto l'operatore di proiezione non altera i vettori del sottospazio. Allora un operatore di proiezione risulta caratterizzato dalla proprietà:

$$\underset{\sim}{P}^{\,2}\boldsymbol{v} = \underset{\sim}{P}\ \boldsymbol{v}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in R^3 \tag{AL.25}$$

avendo denotato con $\underset{\sim}{P}^{\,2} = \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{P}$ il prodotto dell'operatore per se stesso. Data l'arbitrarietà di $\boldsymbol{v}$ resta identificata la proprietà algebrica che caratterizza un operatore di proiezione:

$$\underset{\sim}{P}^{\,2} = \underset{\sim}{P} \tag{AL.26}$$

• Notiamo che anche l'identità gode della proprietà (AL.26); infatti l'identità si può considerare come un operatore di proiezione che proietta l'intero spazio su se stesso.

Vediamo come si può rappresentare un operatore di proiezione che proietta su di una retta di versore $\boldsymbol{u}$. Il vettore proiezione di un vettore $\boldsymbol{v} \in R^3$ è dato da $\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$, ma:

$$\underset{\sim}{P}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{v}$$

Dunque rimane individuato, data l'arbitrarietà di $\boldsymbol{v}$:

$$\underset{\sim}{P}\ = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$$

Il vettore $\underset{\sim}{P}\ \boldsymbol{v}$ prende il nome di *vettore componente* di $\boldsymbol{v}$ lungo la retta.

E immediato che si tratta di un operatore di proiezione in quanto si ha:

$$\underset{\sim}{P}^{\ 2} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} = \underset{\sim}{P}$$

Infatti, in rappresentazione indiciale si ha:

$$(u_i u_j)(u_j u_k) = u_i \, (u_j u_j) \, u_k = u_i u_k$$

essendo $u_j u_j = 1$ dal momento che $\boldsymbol{u}$ è un versore.

E' facile, allora, individuare anche l'operatore di proiezione su di un piano ortogonale a un versore $\boldsymbol{u}$. In questo caso, infatti, l'azione dell'operatore deve rimuovere da $\boldsymbol{v}$ la proiezione lungo $\boldsymbol{u}$.

Allora si deve avere:

$$\underset{\sim}{P}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{v} = \left(\underset{\sim}{I} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}\right)\,\boldsymbol{v}$$

Rimane individuato, allora, l'operatore di proiezione sul piano ortogonale a $\boldsymbol{u}$:

$$\underset{\sim}{P} \ = \underset{\sim}{I} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$$

Come osservazione conclusiva, notiamo che detti:

$$P_1 = \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \qquad P_2 = \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2, \qquad P_3 = \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3$$

gli operatori di proiezione sugli assi cartesiani, cioè sulle rette che hanno la direzione dei versori di una base ortonormale dello spazio R^3, la rappresentazione semicartesiana dell'identità (AL.22) ci consente di scrivere:

$$\underset{\sim}{I} = P_1 + P_2 + P_3$$

Ovvero l'identità si può pensare come la somma degli operatori di proiezione lungo tre rette ortogonali dello spazio.

• Notiamo che un operatore di proiezione è anche simmetrico.

Operatore e matrice complementare

Si dice *complemento algebrico* relativo all'elemento A_{ik} di una matrice $\|A_{ik}\|$ il determinante (minore) che si ottiene sopprimendo la riga i-esima e la colonna k-esima della matrice, moltiplicato per $(-1)^{i+k}$.

Denotato con C_{ik} il complemento algebrico di A_{ik} si dice *matrice complementare* di $\|A_{ik}\|$ la matrice $\|C_{ik}\|$ i cui elementi di matrice sono i complementi algebrici.

Si chiama poi *operatore complementare* dell'operatore $\underset{\sim}{A} \equiv \|A_{ik}\|$ l'operatore $\underset{\sim}{A}^{C} \equiv \|C_{ik}\|$, la cui rappresentazione relativa alla base è data dalla matrice complementare.

Teoremi di Laplace e matrice inversa

Riportiamo senza dimostrarli gli enunciati dei due teoremi di Laplace, che sono in ogni caso di verifica immediata per le matrici 3×3 e 2×2 delle quali qui ci occupiamo:

i) *La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) di una matrice per i rispettivi complementi algebrici è uguale al determinante della matrice.*

ii) *La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) di una matrice per i complementi algebrici di un'altra riga (o colonna) è uguale* *a zero.*

I due teoremi si possono conglobare nell'unica relazione seguente:

$$\det(\underset{\sim}{A})\,\delta_{jk} = C_{ij}A_{ik} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(\underset{\sim}{A})\,\underset{\sim}{I} = \left(\underset{\sim}{A}^{\,C}\right)^T \underset{\sim}{A} \tag{AL.27}$$

• Segue immediatamente che il determinante non cambia se si scambiano righe e colonne di una matrice, cioè: il determinante della trasposta di una matrice è uguale al determinante della matrice di partenza.

• Questi teoremi consentono, poi, di ottenere la condizione di esistenza e, nel caso che esista, la matrice dell'operatore inverso. Infatti, in base alla definizione, l'operatore inverso gode della proprietà:

$$\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}^{-1}$$

e quindi, dalla (AL.27), se:

$$\det(\underset{\sim}{A}) \neq 0$$

si può ottenere:

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underset{\sim}{A})}\left(\underset{\sim}{A}^{\,C}\right)^T$$

• Una matrice per la quale il determinante è nullo si dice *singolare,* in caso contrario si dice *non singolare.* Possiamo allora dire che la condizione affinchè esista l'inverso di un operatore è che la matrice rappresentativa dell'operatore sia non singolare. In questo caso l'operatore inverso esiste ed è unico.

Operatore inverso dell'operatore prodotto

Dati due operatori $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ le cui matrici relative a una base dello spazio sono non singolari l'operatore inverso del loro prodotto esiste ed è dato da:

$$(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,)^{-1} = \underset{\sim}{B}^{\,-1}\underset{\sim}{A}^{\,-1} \tag{AL.28}$$

Infatti possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{v}, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in R^3$$

Moltiplicando a sinistra per $\underset{\sim}{A}^{\,-1}$ entrambi i membri otteniamo:

$$\underset{\sim}{A}^{\,-1}\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}^{\,-1}\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{v}$$

Ma $\underset{\sim}{A}^{\,-1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{I}$, quindi:

$$\underset{\sim}{A}^{\,-1}\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{v}$$

Moltiplicando a sinistra per $\underset{\sim}{B}^{\,-1}$ entrambi i membri e ripetendo lo stesso ragionamento si ha:

$$\underset{\sim}{B}^{\,-1}\underset{\sim}{A}^{\,-1}\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{B}^{\,-1}\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{v}$$

Ovvero:

$$\underset{\sim}{B}^{\,-1}\underset{\sim}{A}^{\,-1}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$$

Ma per definizione di operatore inverso si ha:

$$(\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{B}\ )^{-1}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$$

E dunque dal confronto risulta:

$$(\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{B}\ )^{-1}\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{B}\ ^{-1}\underset{\sim}{A}\ ^{-1}\boldsymbol{w}, \qquad \forall \boldsymbol{w} \in R^3$$

Quindi, per l'arbitrarietà di $\boldsymbol{w}$ segue la (AL.28).

Prodotto misto dei vettori trasformati

Dati tre vettori qualunque $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in R^3$ e un operatore $\underset{\sim}{A}$ sussiste la seguente relazione tra il prodotto misto dei vettori trasformati e il prodotto misto dei vettori di partenza:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{b} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{c} = \det(\underset{\sim}{A}\ )\, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \tag{AL.29}$$

• Geometricamente questa relazione equivale al legame tra i volumi dei parallelepipedi formati dai vettori trasformati e da quelli di partenza ed esprime la variazione del volume dovuta all'azione di deformazione dell'operatore.

• Notiamo che se la matrice dell'operatore è singolare il volume trasformato si annulla, e quindi l'operatore trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente dipendenti.

Per dimostrare questo risultato osserviamo che se i tre vettori sono i versori della base si ha:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_i \wedge \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_j \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_k = \det(\underset{\sim}{A}\ )\, \varepsilon_{ijk} \tag{AL.30}$$

Infatti per i versori della base si può scrivere:

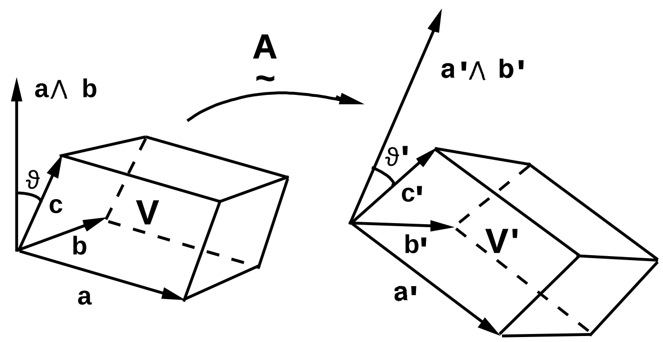

Figura AL. 6: deformazione del volume del parallelepipedo di tre vettori

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_j \equiv (A_{ik}\delta_{kj}) \equiv (A_{ij}) = (A_{1j}, A_{2j}, A_{3j})$$

essendo $\boldsymbol{e}_j \equiv (\delta_{kj})$. Allora il prodotto misto si può esprimere in forma di determinante:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_i \wedge \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_j \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_k = \begin{vmatrix} A_{1i} & A_{2i} & A_{3i} \\ A_{1j} & A_{2j} & A_{3j} \\ A_{1k} & A_{2k} & A_{3k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{1i} & A_{1j} & A_{1k} \\ A_{2i} & A_{2j} & A_{2k} \\ A_{3i} & A_{3j} & A_{3k} \end{vmatrix} = \det(\underset{\sim}{A}\ )\,\varepsilon_{ijk}$$

dove si è tenuto conto che il determinante non cambia scambiando righe e colonne. L'ultima uguaglianza nasce dal fatto che assegnando dei valori agli indici si ottiene il determinante moltiplicato per ± 1 a seconda che la classe della permutazione con cui gli indici sono stati scelti sia pari o dispari.

Ora possiamo esprimere:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{b} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{c} = \underset{\sim}{A}\ (a_i \boldsymbol{e}_i) \wedge \underset{\sim}{A}\ (b_j \boldsymbol{e}_j) \times \underset{\sim}{A}\ (c_k \boldsymbol{e}_k) =$$

$$= (\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_i \wedge \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_j \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{e}_k)\, a_i b_j c_k = \det(\underset{\sim}{A}\ )\, \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \det(\underset{\sim}{A}\ )\, \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

avendo utilizzato la (AL.30). Quindi la (AL.29) è verificata.

Prodotto vettoriale dei vettori trasformati

Dati due vettori qualunque $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3$ e un operatore $\underset{\sim}{A}$ sussiste la seguente relazione tra il prodotto vettoriale dei vettori trasformati e il prodotto vettoriale dei vettori di partenza:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{b} = \underset{\sim}{A}^{\ C} (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \qquad \text{(AL.31)}$$

• Geometricamente questa relazione equivale al legame tra le aree e le normali dei parallelogrammi formati dai vettori trasformati e da quelli di partenza dovuta all'azione di deformazione dell'operatore.

Per dimostrare questo risultato consideriamo un terzo vettore arbitrario $\boldsymbol{v} \in R^3$; in base alla (AL.29) risulta:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{b} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = \det(\underset{\sim}{A}\ ) \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{v}$$

Ora possiamo sempre esprimere $\boldsymbol{v} = \underset{\sim}{A}^{\ -1} \boldsymbol{w}$ e riscrivere:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{w} = \det(\underset{\sim}{A}\ ) \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \underset{\sim}{A}^{\ -1} \boldsymbol{w}$$

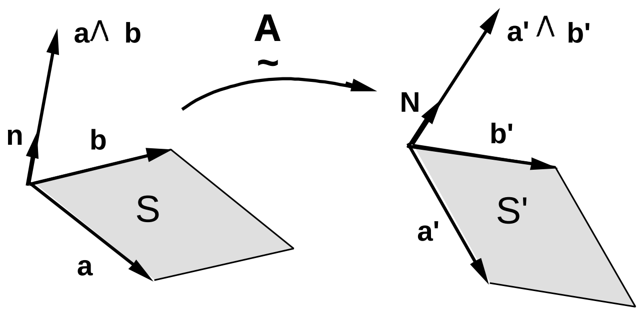

Figura AL. 7: deformazione dell'area del parallelogrammo di due vettori

Ma:

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\underset{\sim}{A})} \left(\underset{\sim}{A}^{C}\right)^{T}$$

E quindi rimane:

$$(\underset{\sim}{A}\,\boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{A}\,\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times \left(\underset{\sim}{A}^{C}\right)^{T} \boldsymbol{w}$$

Ora in un prodotto scalare si può trasportare un operatore da un fattore all'altro, trapsonendolo:

$$(\boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{A}\,\boldsymbol{b}) \times \left(\underset{\sim}{A}^{C}\right)^{T} \boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}^{C}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{w}$$

Quindi si ottiene:

$$(\underset{\sim}{A}\,\boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{A}\,\boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}^{C}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{w}$$

Ovvero:

$$\left[\underset{\sim}{A}\,\boldsymbol{a}\wedge\underset{\sim}{A}\,\boldsymbol{b}-\underset{\sim}{A}^{C}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\right]\times\boldsymbol{w}=0$$

L'arbitrarietà di $\boldsymbol{v}$ garantisce che anche $\boldsymbol{w}$ è del tutto arbitrario, e di conseguenza il prodotto scalare può annullarsi se e solo se è verificata la relazione (AL.31).

Operatore complementare di un operatore prodotto

Dati due operatori lineari $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ si ha la seguente relazione:

$$(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})^{C}=\underset{\sim}{A}^{C}\underset{\sim}{B}^{C} \tag{AL.32}$$

Infatti dati due vettori arbitrari $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in R^3$ e l'operatore $(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})$, in forza della (AL.31) possiamo scrivere:

$$(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})\,\boldsymbol{a}\wedge(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})\,\boldsymbol{b}=(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})^{C}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$$

Ma si possono anche considerare i vettori $\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{a},\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{b}$ e l'operatore $\underset{\sim}{A}$ e scrivere:

$$\underset{\sim}{A}\,(\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{a})\wedge\underset{\sim}{A}\,(\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{b})=\underset{\sim}{A}^{C}(\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{a}\wedge\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{b})$$

A sua volta:

$$\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{a}\wedge\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{b}=\underset{\sim}{B}^{C}(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})$$

Di conseguenza:

$$\underset{\sim}{A}\,(\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{a}) \wedge \underset{\sim}{A}\,(\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{b}) = \underset{\sim}{A}^{\,C}\underset{\sim}{B}^{\,C}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$$

D'altra parte, evidentemente:

$$(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,)\boldsymbol{a} \wedge (\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,)\boldsymbol{b} = \underset{\sim}{A}\,(\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{a}) \wedge \underset{\sim}{A}\,(\underset{\sim}{B}\,\boldsymbol{b})$$

Quindi confrontando i due risultati si ha:

$$(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,)^C(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \underset{\sim}{A}^{\,C}\underset{\sim}{B}^{\,C}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$$

Arbitrarietà di $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ assicura anche l'arbitrarietà di $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ e quindi segue l'identificazione (AL.32).

Determinante del prodotto di matrici

Dati due operatori $\underset{\sim}{A}\,, \underset{\sim}{B}$ e l'operatore prodotto $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}$ sussiste la seguente relazione tra i determinanti delle loro matrici rappresentative:

$$\det(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,) = \det(\underset{\sim}{A}\,)\det(\underset{\sim}{B}\,) \tag{AL.33}$$

Infatti grazie ai teoremi di Laplace (AL.27) applicati alla matrice prodotto abbiamo:

$$\det(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,)\,\underset{\sim}{I} = \left[(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,)^C\right]^T(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,)$$

Ma grazie alla (AL.32):

$$\left[(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B}\,)^C\right]^T = \left(\underset{\sim}{A}^{\,C}\underset{\sim}{B}^{\,C}\right)^T = \left(\underset{\sim}{B}^{\,C}\right)^T\left(\underset{\sim}{A}^{\,C}\right)^T$$

Ancora per la (AL.27) possiamo scrivere:

$$\left(\underset{\sim}{A}^{\,C}\right)^T \underset{\sim}{A} = \det(\underset{\sim}{A})\,\underset{\sim}{I}\,, \qquad \left(\underset{\sim}{B}^{\,C}\right)^T \underset{\sim}{B} = \det(\underset{\sim}{B})\,\underset{\sim}{I}$$

Quindi:

$$\det(\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{B})\,\underset{\sim}{I} = \det(\underset{\sim}{A})\,\det(\underset{\sim}{B})\,\underset{\sim}{I}$$

E di conseguenza si ottiene la (AL.33).

Operatori simmetrici

Un operatore lineare si dice *simmetrico* se è uguale al suo trasposto:

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^{T} \tag{AL.34}$$

In forma indiciale questa scrittura equivale a dire che:

$$A_{ik} = A_{ki} \tag{AL.35}$$

Ovvero la matrice rappresentativa dell'operatore si mantiene identica a se stessa scambiando le righe con le colonne. Anche la matrice si dice allora simmetrica.

• Una matrice simmetrica 3×3 possiede al massimo 6 elementi distinti.

Infatti si ha:

$$\underset{\sim}{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Operatori antisimmetrici

Un operatore lineare si dice *antisimmetrico* se è opposto al suo trasposto:

$$\underset{\sim}{A} = -\underset{\sim}{A}^{T} \qquad \text{(AL.36)}$$

In forma indiciale questa scrittura equivale a dire che:

$$A_{ik} = -A_{ki} \qquad \text{(AL.37)}$$

Ovvero la matrice rappresentativa dell'operatore ha elementi di matrice che cambiano segno scambiando le righe con le colonne. Anche la matrice si dice allora antisimmetrica. Ne consegue che:

• gli elementi della diagonale principale di una matrice antisimmetrica sono sempre nulli.

• Una matrice antisimmetrica 3×3 possiede al massimo 3 elementi distinti.

Infatti si ha:

$$
\underset{\sim}{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}
$$

Vettore duale

L'azione di un operatore antisimmetrico su di un vettore $\boldsymbol{v} \in R^3$ qualunque è tale che:

$$
\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in R^3 \tag{AL.38}
$$

Infatti, trasportando l'operatore da un fattore all'altro del prodotto scalare si ha:

$$
\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = \left(\underset{\sim}{A}^{\,T} \boldsymbol{v}\right) \times \boldsymbol{v}
$$

Ma per la condizione di antisimmetria segue:

$$
\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = -\left(\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v}\right) \times \boldsymbol{v}
$$

Da cui portando a primo membro segue la condizione (AL.38). Geometricamente questa condizione significa che il vettore trasformato mediante un operatore antisimmetrico o è nullo o è ortogonale al vettore di partenza.

Come abbiamo già osservato una matrice 3×3 antisimmetrica può avere al più 3 elementi di matrice non nulli, tanti quante sono le componenti di un vettore: questo fa pensare che gli elementi della matrice possano essere le componenti di un vettore e che l'azione dell'operatore antisimmetrico possa ricondursi ad una operazione tra vettori. La verifica della validità di questa congettura si ottiene introducendo il *vettore duale* della matrice, definito mediante le sue componenti come:

$$\omega_i = -\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,A_{jk} \qquad \text{(AL.39)}$$

Moltiplicando per $\varepsilon_{\ell mi}$ possiamo esplicitare gli elementi di matrice A_{jk} in termini di ω_i. Infatti abbiamo:

$$\varepsilon_{\ell mi}\,\omega_i = -\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_{\ell mi}\,\varepsilon_{ijk}\,A_{jk}$$

Ma:

$$\varepsilon_{\ell mi}\,\varepsilon_{ijk} = \delta_{\ell j}\,\delta_{mk} - \delta_{\ell k}\,\delta_{mj}$$

Per cui si ha:

$$\varepsilon_{\ell mi}\,\omega_i = -\,\frac{1}{2}\,(\delta_{\ell j}\,\delta_{mk} - \delta_{\ell k}\,\delta_{mj})\,A_{jk} = -\,\frac{1}{2}\,(A_{\ell m} - A_{m\ell})$$

E quindi, grazie all'antisimmetria della matrice

$$A_{\ell m} = -\,\varepsilon_{\ell mi}\,\omega_i = \varepsilon_{i\ell m}\,\omega_i \qquad \text{(AL.40)}$$

Abbiamo così ottenuto una rappresentazione di una matrice antisimmetrica in termini del suo vettore duale. Per esteso si ha:

$$\underset{\sim}{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{AL.41}$$

L'azione dell'operatore antisimmetrico su un vettore $\boldsymbol{v}$ si può allora esprimere, in rappresentazione indiciale come:

$$A_{\ell m} v_m = -\,\varepsilon_{\ell m i}\,\omega_i\,v_m = \varepsilon_{\ell i m}\,\omega_i\,v_m$$

ovvero in rappresentazione assoluta:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} \tag{AL.42}$$

In conclusione:

• Il trasformato di un vettore $\boldsymbol{v} \in R^3$ mediante un operatore antisimmetrico è il prodotto vettoriale del vettore duale per il vettore $\boldsymbol{v}$.

• Questo risultato vale solamente quando lo spazio ha 3 dimensioni. Infatti in questo caso e solo in questo caso il numero di componenti di una matrice antisimmetrica è 3, tante quante sono le componenti di un vettore, mentre in uno spazio di dimensione diversa manca questa coincidenza. Ad esempio in R^4 una matrice antisimmetrica ha 6 componenti significative, mentre un vettore ha solo quattro componenti. Solamente in R^3 il prodotto vettoriale si presenta come un vettore, mentre in spazi di dimensione maggiore si comporta come un tensore antisimmetrico a più di un indice.

Parte simmetrica e parte antisimmetrica di un operatore

Dato un operatore qualunque $\underset{\sim}{B}$ sussiste la seguente identità:

$$\underset{\sim}{B} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{B}^{T}\right) + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{B}^{T}\right)$$

Si può allora decomporre sempre un operatore nel modo seguente:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{A}$$

dove:

$$\underset{\sim}{S} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{B}^{T}\right) = \underset{\sim}{S}^{T} \qquad \text{(AL.43)}$$

è un operatore simmetrico e prende il nome di *parte simmetrica* di $\underset{\sim}{B}$, e:

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{B}^{T}\right) = -\underset{\sim}{A}^{T} \qquad \text{(AL.44)}$$

è un operatore antisimmetrico e prende il nome di *parte antisimmetrica* di $\underset{\sim}{B}$.

Quando si usa la rappresentazione indiciale spesso si introduce anche la notazione (ik) per denotare la simmetrizzazione degli indici e $[ik]$ per denotare l' antisimmetrizzazione. Per cui si scrive:

$$B_{ik} = B_{(ik)} + B_{[ik]}, \qquad B_{(ik)} = S_{ik}, \qquad B_{[ik]} = A_{ik}$$

Traccia di un operatore

Si dice *traccia* di un operatore la somma degli elementi della diagonale principale della sua matrice rappresentativa e si denota:

$$\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A}) = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \tag{AL.45}$$

Valgono le seguenti proprietà:

i) $\mathrm{Tr}\left(\underset{\approx}{A}^{T}\right) = \mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A})$

ii) $\mathrm{Tr}\,(\alpha\underset{\approx}{A}) = \alpha\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A})$

iii) $\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{B}\,\underset{\approx}{A}) = \mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A}\,\underset{\approx}{B})$

iv) $\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A} + \underset{\approx}{B}) = \mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A}) + \mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{B})$

che sono di verifica immediata.

Si hanno poi alcuni risultati che riguardano gli operatori simmetrici e antisimmetrici:

a) *la traccia di un operatore antisimmetrico è nulla:*

$\underset{\approx}{A}^{T} = -\underset{\approx}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A}) = 0$

come è evidente dal momento che la diagonale principale della matrice di un operatore antisimmetrico è costituita da elementi tutti nulli. Del resto questo risultato discende direttamente anche dalla proprietà i).

b) *La traccia del prodotto di un operatore simmetrico per un operatore antisimmetrico è nulla:*

$$\underset{\approx}{S}^{T} = \underset{\approx}{S}\,, \ \ \underset{\approx}{A}^{T} = -\underset{\approx}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}) = 0$$

Infatti:

$$\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,) = \mathrm{Tr}\,\left[(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,)^T\right] = \mathrm{Tr}\,\left(\underset{\approx}{A}\,^T\underset{\approx}{S}\,^T\right) = \mathrm{Tr}\,(-\underset{\approx}{A}\,\underset{\approx}{S}\,) =$$

$$= -\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A}\,\underset{\approx}{S}\,) = -\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,)$$

e quindi, portando a primo membro, l'annullarsi della traccia del prodotto.

c) *Se la traccia del prodotto di un operatore* $\underset{\approx}{A}$ *per qualunque operatore simmetrico* $\underset{\approx}{S}$ *è nulla, allora* $\underset{\approx}{A}$ *è antisimmetrico:*

$$\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,) = 0, \;\; \forall \underset{\approx}{S}\;\; ; \; \underset{\approx}{S}\,^T = \underset{\approx}{S} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\approx}{A}\,^T = -\underset{\approx}{A}$$

Infatti se ciò non fosse vero si potrebbe sempre separare la parte simmetrica da quella antisimmetrica: $\underset{\approx}{A} = \underset{\approx}{A}\,_S + \underset{\approx}{A}\,_A$. Di conseguenza si avrebbe:

$$\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,) = \mathrm{Tr}\,\left(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,_S\right) + \mathrm{Tr}\,\left(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,_A\right) = \mathrm{Tr}\,\left(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,_S\right)$$

grazie alla proprietà b). E per l'ipotesi dovrebbe risultare:

$$\mathrm{Tr}\,\left(\underset{\approx}{S}\,\underset{\approx}{A}\,_S\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad S_{ik}\,(A_S)_{ik} = 0$$

per tutti gli operatori simmetrici $\underset{\approx}{S}$. Ma questo può avvenire solamente se $\underset{\approx}{A}\,_S = 0$, cioè solo se l'operatore è antisimmetrico.

d) *Se la traccia del prodotto di un operatore* $\underset{\approx}{S}$ *per qualunque operatore antisimmetrico* $\underset{\approx}{A}$ *è nulla, allora* $\underset{\approx}{S}$ *è simmetrico:*

$$\mathrm{Tr}\,(\underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{A}\ ) = 0, \ \ \forall \underset{\sim}{A}\ \ ;\ \underset{\sim}{A}^{\ T} = -\underset{\sim}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \underset{\sim}{S}^{\ T} = \underset{\sim}{S}$$

Quest'ultima si dimostra in maniera del tutto analoga alla c).

Operatori unitari o ortogonali e operatori di rotazione

Un operatore $\underset{\sim}{U}$ si dice *unitario* o *ortogonale* se gode della proprietà:

$$\underset{\sim}{U}^{\ T}\underset{\sim}{U}\ = \underset{\sim}{I}\ = \underset{\sim}{U}\ \underset{\sim}{U}^{\ T} \tag{AL.46}$$

Si hanno le seguenti proprietà:

i) esiste sempre l'operatore inverso di un operatore unitario e vale:

$$\underset{\sim}{U}^{\ -1} = \underset{\sim}{U}^{\ T}$$

Il risultato è una conseguenza diretta della definizione (AL.46).

ii) Il modulo di qualsiasi vettore $\boldsymbol{v} \in R^3$ è invariante rispetto all'azione di un operatore unitario. Infatti:

$$\left|\underset{\sim}{U}\ \boldsymbol{v}\right|^2 = \underset{\sim}{U}\ \boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{U}\ \boldsymbol{v} = \left(\underset{\sim}{U}^{\ T}\underset{\sim}{U}\ \boldsymbol{v}\right) \times \boldsymbol{v} = (\underset{\sim}{I}\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|^2$$

grazie alla (AL.46).

• Geometricamente ciò significa che le lunghezze non vengono alterate dalle trasformazioni unitarie.

Questa proprietà è in effetti una conseguenza di una proprietà più generale:

iii) Il prodotto scalare di due vettori qualunque $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R^3$ è invariante rispetto all'azione di un operatore unitario. Infatti si ha:

$$\underset{\sim}{U}\, \boldsymbol{a} \times \underset{\sim}{U}\, \boldsymbol{b} = \left(\underset{\sim}{U}^{\,T} \underset{\sim}{U}\, \boldsymbol{a}\right) \times \boldsymbol{b} = (\underset{\sim}{I}\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

• Geometricamente questo risultato comporta che gli angoli tra coppie di rette dello spazio non vengono alterati dalle trasformazioni unitarie.

Per quanto riguarda il determinante di una matrice unitaria, tenendo conto delle proprietà del determinante abbiamo:

$$\det\left(\underset{\sim}{U}^{\,T} \underset{\sim}{U}\right) = \det\left(\underset{\sim}{U}^{\,T}\right) \det(\underset{\sim}{U}) = \left[\det(\underset{\sim}{U})\right]^2$$

Di conseguenza dalla (AL.46) segue:

$$\left[\det(\underset{\sim}{U})\right]^2 = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(\underset{\sim}{U}) = \pm 1$$

• Si definisce *operatore di rotazione (propria)* un operatore unitario il cui determinante vale $+1$.

• Le rotazioni proprie oltre a lasciare invariante il modulo di ogni vettore dello spazio, conservano inalterato, dopo la trasformazione, anche l'orientamento levogiro (o rispettivamente destrogiro) di ogni base dello spazio.

Infatti in conseguenza della (AL.29) si ha:

$$\underset{\sim}{U}\, \boldsymbol{e}_1 \wedge \underset{\sim}{U}\, \boldsymbol{e}_2 \times \underset{\sim}{U}\, \boldsymbol{e}_3 = \det(\underset{\sim}{U})\, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3$$

Se la base si partenza $\{\boldsymbol{e}_i\}$ è ortonormale levogira si ha:

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = +1$$

Dopo la trasformazione il prodotto misto dei trasformati dei vettori di base vale ancora 1 se il determinante dell'operatore è $+1$ e quindi la base è ancora levogira, mentre vale -1 in caso contrario; le trasformazioni unitarie non proprie mutano allora, una base levogira in una base destrogira.

• Le rotazioni proprie rappresentano dunque delle trasformazioni rigide dello spazio euclideo.

Nel seguito denotiamo con $\underset{\sim}{R}$ gli operatori di rotazione propria. Riassumendo essi sono caratterizzati dalle due proprietà:

$$\underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{R}^T, \qquad \det(\underset{\sim}{R}) = +1$$

Rotazioni degli assi coordinati

L'azione di un operatore di rotazione $\underset{\sim}{R}$ si può interpretare in due modi:

— *primo modo:* si pensa l'azione di $\underset{\sim}{R}$ su un vettore $\boldsymbol{v}$ come un'azione che ruota il vettore $\boldsymbol{v}$ di un certo angolo ϑ senza alterarne il modulo e lasciando inalterata la base dello spazio associata agli assi cartesiani del sistema di riferimento.

L'angolo fra il vettore di partenza e il vettore ruotato è caratterizzato dalla relazione che nasce dalla definizione di prodotto scalare e dall'invarianza del modulo per rotazione:

$$cos\,\vartheta = \frac{\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{R}\,\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|^2}$$

— *Secondo modo:* si pensa il vettore $\boldsymbol{v}$ come fisso nello spazio e si interpreta l'azione di $\underset{\sim}{R}$ come un'azione che fa compiere ai vettori della base

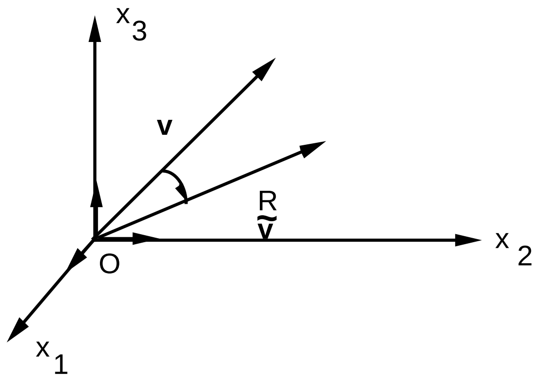

Figura AL. 8: rotazione di un vettore

associata agli assi cartesiani, una rotazione inversa a quella che prima si faceva compiere al vettore $\boldsymbol{v}$.

In questo modo si può esprimere mediante un operatore di rotazione una rotazione degli assi cartesiani.

Se indichiamo con $\underset{\sim}{R}$ la rotazione a cui sono soggetti i versori della base e marchiamo con l'apice i versori della base dopo la rotazione, abbiamo:

$$\boldsymbol{e}'_k = \underset{\sim}{R}\; \boldsymbol{e}_k \tag{AL.47}$$

Gli elementi della matrice di rotazione si possono scrivere, di conseguenza:

$$R_{ik} = \boldsymbol{e}_i \times \underset{\sim}{R}\; \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}'_k = (\boldsymbol{e}'_k)_i = \gamma_{ik} \tag{AL.48}$$

dove γ_{ik} rappresentano i coseni direttori dei versori della base trasformata rispetto a quelli della base di partenza, e coincidono con le componenti dei versori trasformati rispetto alla base di partenza:

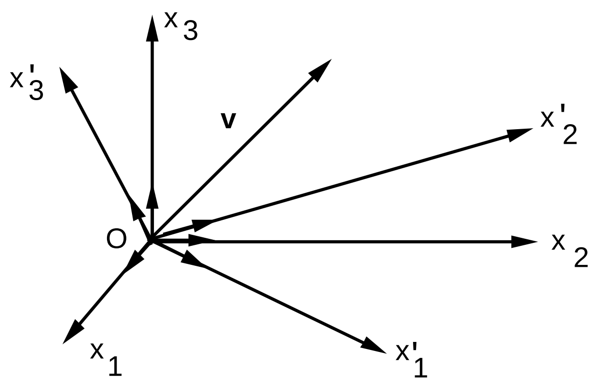

Figura AL. 9: rotazione degli assi cartesiani

$$\boldsymbol{e}'_k \equiv (\gamma_{1k}, \gamma_{2k}, \gamma_{3k})$$

• Ne viene di conseguenza che, operativamente, se si vuole costruire la matrice di rotazione che caratterizza l'operatore che trasforma i versori di base $\{\boldsymbol{e}_k\}$ nei nuovi versori $\{\boldsymbol{e}'_k\}$ basta costruire le colonne della matrice con le componenti dei nuovi versori rispetto ai vecchi. La matrice risulta allora nel modo seguente:

$$\underset{\sim}{R} \equiv \begin{pmatrix} (\boldsymbol{e}'_1)_1 & (\boldsymbol{e}'_2)_1 & (\boldsymbol{e}'_3)_1 \\ (\boldsymbol{e}'_1)_2 & (\boldsymbol{e}'_2)_2 & (\boldsymbol{e}'_3)_2 \\ (\boldsymbol{e}'_1)_3 & (\boldsymbol{e}'_2)_3 & (\boldsymbol{e}'_3)_3 \end{pmatrix}$$

• Osserviamo come la condizione di unitarietà della matrice di rotazione (AL.46) si traduce nella condizione di ortonormalità dei versori della nuova base; infatti si ha:

$$R^T_{ij}R_{jk} = \delta_{ik} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\boldsymbol{e}'_i)_j(\boldsymbol{e}'_k)_j = \boldsymbol{e}'_i \times \boldsymbol{e}'_k = \delta_{ik}$$

Le componenti di un vettore $\boldsymbol{v}$ dopo la rotazione degli assi si ottengono tenendo conto che si hanno, per lo stesso vettore le due rappresentazioni semicartesiane:

$$v_k\boldsymbol{e}_k = v'_k\boldsymbol{e}'_k$$

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{e}_j$ otteniamo:

$$v_j = \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_k v_k = \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}'_k v'_k = R_{jk}v'_k$$

• La condizione $\det(\underset{\sim}{R}) = +1$ si traduce invece nella condizione che la base dei versori trasformati sia levogira. Infatti il determinante viene a rappresentare il prodotto misto dei versori:

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = +1$$

Possiamo denotare le rappresentazioni relative alle due basi anche in forma simbolica nel modo seguente:

$$\boldsymbol{v}' \equiv (v'_k), \qquad \boldsymbol{v} \equiv (v_k)$$

Intendendo qui con $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}$ non tanto il vettore in se stesso, che non cambia al variare della base, quanto la terna che lo rappresenta rispetto alla base. Allora si può scrivere la legge di trasformazione delle componenti di un vettore per una rotazione $\underset{\sim}{R}$ degli assi nella forma compatta:

$$\boldsymbol{v}' = \underset{\sim}{R}^T\boldsymbol{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{v} = \underset{\sim}{R}\,\boldsymbol{v}' \tag{AL.49}$$

Esempio

Come esempio possiamo considerare una rotazione di un angolo ϑ del piano coordinato x_1x_2 attorno all'asse x_3.

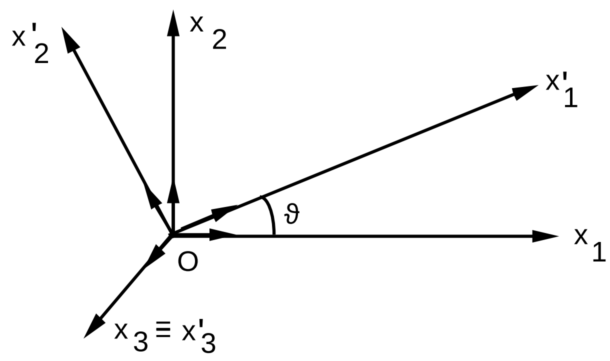

Figura AL. 10: rotazione degli assi nel piano z=0

Le componenti dei versori ruotati rispetto alla base non ruotata sono:

$$\boldsymbol{e}_1' \equiv (cos\,\vartheta, sen\,\vartheta, 0), \qquad \boldsymbol{e}_2' \equiv (-\,sen\,\vartheta, cos\,\vartheta, 0), \qquad \boldsymbol{e}_3' \equiv (0, 0, 1)$$

La matrice di rotazione, costruita ponendo in colonna le componenti dei versori della base ruotata risulta essere:

$$\underset{\sim}{R} \equiv \begin{pmatrix} cos\,\vartheta & -\,sen\,\vartheta & 0 \\ sen\,\vartheta & cos\,\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segue che la trasformazione delle componenti di un vettore $\boldsymbol{v}$ avviene secondo la legge (AL.49) e diviene:

$$\begin{cases} v_1' = v_1 cos\,\vartheta + v_2 sen\,\vartheta \\ \\ v_2' = -\,v_1 sen\,\vartheta + v_2 sen\,\vartheta \\ \\ v_3' = v_3 \end{cases}$$

Trasformazione di similitudine

Abbiamo visto come una matrice di rotazione serve a rappresentare la legge di trasformazione delle componenti di un vettore quando si effettua una rotazione degli assi cartesiani, ovvero della base dello spazio associata al sistema di riferimento. Abbiamo ottenuto l'informazione secondo cui se i versori sono ruotati in base alla legge:

$$\boldsymbol{e}_k' = \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{e}_k$$

Allora la rappresentazione di ogni vettore si modifica secondo la legge:

$$\boldsymbol{v} = \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{v}', \qquad \boldsymbol{v}' = \underset{\sim}{R}^{\,T} \boldsymbol{v}$$

Ci domandiamo ora con quale legge si trasforma la matrice rappresentativa di un qualunque operatore lineare $\underset{\sim}{A}$.

Denotiamo con:

$$\underset{\sim}{A} \ \equiv \|A_{ik}\|\,, \qquad \underset{\sim}{A}\,' \equiv \|A_{ik}'\|$$

Le matrici che rappresentano l'operatore rispetto alle due basi; in ognuna delle due rappresentazioni deve valere una legge di trasformazione del tipo:

$$\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} \tag{AL.50}$$

$$\boldsymbol{w}' = \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v}' \tag{AL.51}$$

Ma per i vettori si hanno le leggi di trasformazione:

$$\boldsymbol{w} = \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{w}', \qquad \boldsymbol{v} = \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{v}'$$

che sostituite nella (AL.50) comportano:

$$\underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{w}' = \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{v}'$$

Moltiplicando a sinistra per $\underset{\sim}{R}^{T}$ otteniamo:

$$\underset{\sim}{R}^{T} \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{w}' = \underset{\sim}{R}^{T} \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{v}'$$

E tenendo conto che $\underset{\sim}{R}^{T} \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{I}$ si ha:

$$\boldsymbol{w}' = \underset{\sim}{R}^{T} \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{v}'$$

condizione che si identifica con la (AL.51) se e solo se:

$$\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{R}^{T} \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{R} \tag{AL.52}$$

Questa regola di trasformazione, che prende il nome di *trasformazione di similitudine,* fornisce la legge con cui si modificano le matrici, cioè le rappresentazioni relative degli operatori, ruotando la base del riferimento cartesiano.

• Le proprietà di simmetria e di antisimmetria di una matrice sono proprietà assolute, cioè non dipendono dalla scelta della base di riferimento, ma sono proprietà dell'operatore. Infatti queste proprietà sono invarianti per trasformazione di similitudine.

La verifica è immediata. Sia infatti $\underset{\sim}{A} = \pm\underset{\sim}{A}^T$ una matrice, che risulta essere simmetrica nel caso si prenda il segno positivo e antisimmetrica se si prende il segno negativo; dopo la trasformazione di similitudine abbiamo:

$$\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{R} = \pm\underset{\sim}{R}^T \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{R} = \pm\underset{\sim}{A}'^T$$

Dunque le stesse proprietà di simmetria o antisimmetria.

Trasformazioni non unitarie

In alcuni casi può accadere di avere bisogno di passare da una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_k\}$ ad una nuova base $\{\boldsymbol{e}'_k\}$ che non è ortonormale. In questi casi la matrice $\underset{\sim}{S}$ che lega tra loro i versori delle due basi:

$$\boldsymbol{e}'_k = \underset{\sim}{S}\, \boldsymbol{e}_k$$

i cui elementi di matrice, rispetto alla base ortonormale di partenza, sono dati sempre dalla regola:

$$S_{ik} = \boldsymbol{e}_i \times \underset{\sim}{S}\, \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}'_k$$

non è una matrice unitaria e la sua azione non lascia inalterati nè i moduli dei vettori, nè gli angoli fra le rette dello spazio. Essa è comunque una matrice non singolare, altrimenti il prodotto misto dei vettori della base trasformata si annullerebbe, a causa della (AL.29), e i vettori trasformati risultando complanari non formerebbero una base. In questa situazione le leggi di trasformazione delle rappresentazioni dei vettori e delle matrici si ottengono esattamente come prima, con l'unica differenza che in luogo di

$\underset{\sim}{R}^{T}$ compare ora $\underset{\sim}{S}^{-1}$. Infatti la relazione tra le componenti di un vettore, rappresentato sulle due basi, è data da:

$$v_i \boldsymbol{e}_i = v'_k \boldsymbol{e}'_k$$

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{e}_j$ e tenendo conto del fatto che la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ è ortonormale, si ha:

$$v_j = \boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}'_k v'_k = S_{jk} v'_k$$

Si ha allora per la trasformazione della rappresentazione dei vettori:

$$\boldsymbol{v} = \underset{\sim}{S}\ \boldsymbol{v}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{v}' = \underset{\sim}{S}^{-1} \boldsymbol{v} \tag{AL.53}$$

E quindi per le matrici la seguente trasformazione di similitudine di cui la (AL.52) costituisce un caso particolare:

$$\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{S}^{-1} \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{S} \tag{AL.54}$$

Inversione spaziale

Consideriamo il piano reale R^2. Nel piano una rotazione degli assi cartesiani di un angolo ϑ può essere scritta nella forma che si desume dai risultati precedenti:

$$\underset{\sim}{R} \equiv \begin{pmatrix} cos\,\vartheta & -\,sen\,\vartheta \\ \\ sen\,\vartheta & cos\,\vartheta \end{pmatrix}$$

Ora, se consideriamo una rotazione $\underset{\sim}{\Pi}$ di un angolo piatto, cioè $\vartheta = \pi$ si ha:

$$\underset{\sim}{\Pi} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv -\underset{\sim}{I}$$

Dove in questo caso $\underset{\sim}{I}$ rappresenta l'identità 2×2 nel piano. L'operatore $\underset{\sim}{\Pi}$ equivale a una *inversione* dell'orientamento di entrambi gli assi cartesiani e può essere espresso, in R^2 mediante un operatore di rotazione propria.

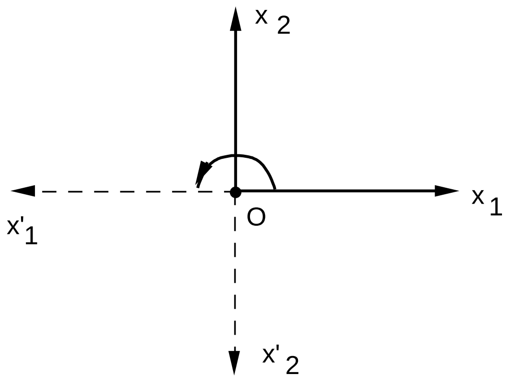

Figura AL. 11: inversione degli assi nel piano

Se passiamo nello spazio tridimensionale R^3 e definiamo l'operatore di inversione degli assi 3×3:

$$\underset{\sim}{\Pi} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv -\underset{\sim}{I}$$

ci accorgiamo subito, che a differenza di quanto accadeva in R^2, in R^3 l'inversione non è un operatore di rotazione propria, perchè, pur essendo un operatore unitario, in quanto $\underset{\sim}{\Pi}^T \underset{\sim}{\Pi} = \underset{\sim}{I}$, il determinante è negativo:

$$\det(\underset{\sim}{\Pi}) = -1$$

Dunque in R^3 — e in generale in uno spazio di dimensione dispari — l'inversione degli assi non è una rotazione propria. Essa viene a rappresentare un operatore unitario non di rotazione al quale si dà il nome di *inversione spaziale*. In fisica questo operatore è noto come *operatore di parità.*

Vettori polari o veri

Applicando $\underset{\sim}{\Pi}$ a un vettore di R^3 si ottiene la sua rappresentazione dopo l'inversione degli assi:

$$\boldsymbol{v}' = \underset{\sim}{\Pi}\, \boldsymbol{v} = -\,\boldsymbol{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad v'_i = -\,v_i \tag{AL.55}$$

Vettori le cui componenti cambiano segno per inversione degli assi prendono il nome di *vettori polari* o *vettori veri.* Sono vettori di questa natura gli spostamenti, le velocità, le accelerazioni, ecc.

• Notiamo che il prodotto scalare di due vettori veri non cambia segno per inversione degli assi, ma rimane invariante. Infatti:

$$\boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}' = \underset{\sim}{\Pi}\, \boldsymbol{a} \times \underset{\sim}{\Pi}\, \boldsymbol{b} = (-\,\boldsymbol{a}) \times (-\,\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

Uno scalare che rimane invariante anche per inversione degli assi si dice *scalare vero.*

Vettori assiali o pseudovettori

Proviamo ora a calcolare il prodotto vettoriale di due vettori polari, dopo un inversione degli assi. Abbiamo:

$$\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}' = \underset{\sim}{\Pi}\ \boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{\Pi}\ \boldsymbol{b} = (-\,\boldsymbol{a}) \wedge (-\,\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$$

Si osserva che il prodotto vettoriale non cambia il segno delle sue componenti dopo un'inversione degli assi.

In realtà il prodotto vettoriale non è un vero vettore; infatti, come abbiamo già osservato, in uno spazio a più di 3 dimensioni il prodotto vettoriale risulta caratterizzato da più di 3 componenti. Anche se in R^3 il prodotto vettoriale si caratterizza con lo stesso numero di componenti di un vettore e obbedisce alla regola di somma del parallelogrammo, tuttavia, il suo comportamento rispetto all'inversione degli assi non è quello di un vettore. Perciò si dice che è uno *pseudovettore* o anche *un vettore assiale.*

Se prendiamo il prodotto scalare di un vettore vero per uno pseudovettore otteniamo uno *pseudoscalare* cioè uno scalare il cui segno cambia per inversione degli assi. Il prodotto misto di tre vettori veri è un esempio di pseudoscalare:

$$\boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}' \times \boldsymbol{c}' = \underset{\sim}{\Pi}\ \boldsymbol{a} \wedge \underset{\sim}{\Pi}\ \boldsymbol{b} \times \underset{\sim}{\Pi}\ \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

Invarianti principali di un operatore

Dato un operatore lineare $\underset{\sim}{A}$ in R^3:

• le quantità scalari $\det(\underset{\sim}{A}\ )$, $\mathrm{Tr}\,(\underset{\sim}{A}\ )$, $\mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{A}^{\ C}\right)$ sono indipendenti dalla base rispetto alla quale l'operatore viene rappresentato e si dicono *invarianti principali* dell'operatore.

Tutti gli altri invarianti che caratterizzano l'operatore si ottengono come funzioni di questi invarianti principali.

— *Invarianza del determinante*

Effettuando una trasformazione di similitudine, mediante una matrice $\underset{\sim}{S}$ non singolare, non necessariamente di rotazione, abbiamo:

$$\det(\underset{\sim}{A}') = \det\left(\underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{S}\right) = \det\left(\underset{\sim}{S}^{-1}\right)\det(\underset{\sim}{A})\det(\underset{\sim}{S}) = \det(\underset{\sim}{A})$$

essendo evidentemente $\det\left(\underset{\sim}{S}^{-1}\right)\det(\underset{\sim}{S}) = 1.$

— *Invarianza della traccia*

Per la traccia abbiamo:

$$\mathrm{Tr}\,(\underset{\sim}{A}') = \mathrm{Tr}\left[\left(\underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{S}\right] = \mathrm{Tr}\left[\underset{\sim}{S}\left(\underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{A}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\left(\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{S}^{-1}\right)\underset{\sim}{A}\right] = \mathrm{Tr}\,(\underset{\sim}{A})$$

In maniera analoga si ottiene l'invarianza della traccia di $\underset{\sim}{A}^{C}$.

Problema agli autovalori

Il problema agli autovalori nasce come risposta al seguente quesito: *dato un operatore* $\underset{\sim}{A}$ *esistono dei vettori* $\boldsymbol{d}$ *i cui trasformati sono paralleli ai vettori* $\boldsymbol{d}$ *di partenza?*

La condizione di parallelismo tra un vettore $\boldsymbol{d}$ e il suo trasformato si scrive in questo modo:

$$\underset{\sim}{A}\, \boldsymbol{d} = \lambda \boldsymbol{d}$$

essendo λ uno scalare da determinare. Il problema geometrico è meglio leggibile da un punto di vista algebrico se lo si riscrive nella forma:

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I})\, \boldsymbol{d} = 0 \tag{AL.56}$$

Dal punto di vista algebrico questa scrittura rappresenta un sistema lineare omogeneo di 3 equazioni nelle 3 incognite costituite dalle componenti del vettore $\boldsymbol{d}$. In forma indiciale infatti si ha:

$$(A_{ik} - \lambda\, \delta_{ik})\, d_k = 0$$

che scritta per esteso fornisce il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} (A_{11} - \lambda)\ d_1 + A_{12}d_2 + A_{13}d_3 = 0 \\ A_{21}d_1 + (A_{22} - \lambda)\ d_2 + A_{23}d_3 = 0 \\ A_{31}d_1 + A_{32}d_2 + (A_{33} - \lambda)\ d_3 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzioni non banali se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo; e cioè se è soddisfatta l'*equazione caratteristica* del sistema:

$$\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) = 0 \tag{AL.57}$$

Ovvero in forma estesa:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

L'equazione caratteristica, per una matrice 3×3 si può sviluppare e semplificare ottenendo l'equazione cubica:

$$\lambda^3 - \mathrm{Tr}\,(\underset{\sim}{A})\,\lambda^2 + \mathrm{Tr}\left(\underset{\sim}{A}^{\,C}\right)\lambda - \det(\underset{\sim}{A}) = 0 \qquad \text{(AL.58)}$$

Nel caso di una matrice 2×2 si ha più semplicemente:

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(\underset{\sim}{A})\,\lambda + \det(\underset{\sim}{A}) = 0 \qquad \text{(AL.59)}$$

Risolvendo l'equazione caratteristica si determinano i valori del parametro λ in corrispondenza dei quali il problema ammette soluzioni non banali Per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione caratteristica ha soluzioni in campo complesso in numero pari al grado dell'equazione, contando le soluzioni multiple tante volte quanto è la loro molteplicità.

• Le radici dell'equazione caratteristica prendono il nome di *autovalori* dell'operatore $\underset{\sim}{A}$ e i vettori $\boldsymbol{d}$, che si determinano in corrispondenza, si dicono *autovettori* dell'operatore $\underset{\sim}{A}$.

La condizione (AL.57) equivale a richiedere che le equazioni del sistema omogeneo (AL.56) siano linearmente dipendenti. In R^3 se solo due equazioni del sistema sono linearmente indipendenti, il sistema ammette ∞^1 soluzioni per ogni autovalore. Geometricamente questo significa che, in corrispondenza di ogni autovalore esiste una retta dello spazio, invariante rispetto all'azione di $\underset{\sim}{A}$, e tutti i vettori che identificano i punti di quella retta sono autovettori corrispondenti all'autovalore considerato.

Per ogni autovalore esistono allora infiniti autovettori; infatti se $\boldsymbol{d}$ è un autovettore corrispondente all'autovalore λ ogni vettore ad esso parallelo è autovettore:

$$\underset{\sim}{A}\,(\alpha\,\boldsymbol{d}) = \alpha\,(\underset{\sim}{a}\;\boldsymbol{d}) = \alpha\,\lambda\,\boldsymbol{d} = \lambda\,(\alpha\,\boldsymbol{d})$$

qualunque sia α. La retta invariante risulta allora identificata dalle equazioni parametriche:

$$\boldsymbol{x} = \alpha\,\boldsymbol{d}$$

Quando si vogliono identificare gli autovettori di un operatore è allora conveniente scegliere la norma dei vettori uguale all'unità, assegnando così i versori delle rette invarianti.

• Le rette invarianti rispetto all'azione di un operatore si chiamano *assi principali* dell'operatore. Di conseguenza: *gli assi principali di un operatore sono le rette che hanno la direzione degli autovettori dell'operatore.*

Notiamo anche che in R^2 il problema agli autovalori può non avere radici reali, mentre in R^3 esiste sempre almeno una radice reale, dal momento che le soluzioni complesse si presentano sempre a due a due insieme alle loro coniugate; quindi essendo le radici in numero di 3, che è dispari, una di esse deve coincidere con la sua complessa coniugata, ed essere perciò reale.

• Notiamo che i coefficienti dell'equazione caratteristica sono gli *invarianti principali* dell'operatore; di conseguenza gli autovalori, che si esprimono in funzione di tali coefficienti, risultano essere essi pure invarianti rispetto alla scelta della base.

Autovalori di un operatore simmetrico

• *Gli autovalori di un operatore simmetrico sono reali.*

Per provarlo consideriamo una radice λ dell'equazione caratteristica, ammettendo in generale che possa essere complessa. Allora il sistema omogeneo (AL.56) avrà come soluzioni degli autovettori le cui componenti possono esse pure essere complesse. Scriviamo, nella forma indiciale:

$$A_{ik} d_k = \lambda \, d_i \tag{AL.60}$$

Tenendo conto che gli elementi della matrice A_{ik} sono quantità reali, la relazione complessa coniugata della precedente ci dà:

$$A_{ik} d^*_k = \lambda^* \, d^*_i \tag{AL.61}$$

avendo denotato con * l'operazione di coniugazione complessa. Ora moltiplicando la (AL.60) per d^*_i e la (AL.61) per d_i, otteniamo:

$$d^*_i A_{ik} d_k = \lambda \, d_i d^*_i = 0$$

$$d_i A_{ik} d^*_k = \lambda \, d^*_i d_i = 0$$

Grazie alla simmetria della matrice le due quantità a primo membro sono uguali, per cui, sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti e raccogliendo possiamo ottenere l'informazione:

$$(\lambda - \ \lambda^*) \, d^*_i d_i = 0$$

Ora:

$$d_i^* d_i = d_1^* d_1 + d_2^* d_2 + d_3^* d_3 > 0$$

rappresentando una somma dei quadrati di moduli di numeri complessi non tutti nulli, in quanto le d_i sono soluzioni *non banali,* e quindi non tutte nulle, di un sistema *lineare* omogeneo. Di conseguenza rimane $\lambda = \lambda^*$, che significa che l'autovalore è reale. Questa considerazione si può ripetere per ogni soluzione dell'equazione caratteristica, perciò tutti gli autovalori sono reali.

Autovettori di un operatore simmetrico

• *Gli autovettori di un operatore simmetrico sono reali e formano una base ortonormale dello spazio.*

Per il teorema fondamentale dell'algebra le radici dell'equazione caratteristica sono in numero uguale al grado dell'equazione caratteristica, cioè uguale alla dimensione dello spazio in cui l'operatore è definito, ed eventualmente possono esservi radici multiple. Inoltre per il risultato precedente tali autovalori sono reali. Di conseguenza anche gli autovettori, soluzioni del sistema lineare omogeneo (AL.56), sono reali.

— *Autovalori distinti*

Cominciamo con il considerare gli autovettori corrispondenti ad autovalori tra loro distinti e mostriamo che: *gli autovettori corrispondenti ad autovettori distinti sono tra loro ortogonali.*

Infatti, detti λ, λ' due autovalori distinti avremo:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{d} = \lambda \boldsymbol{d}$$

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{d}' = \lambda' \boldsymbol{d}'$$

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{d}'$ la prima di queste equazioni e per $\boldsymbol{d}$ la seconda e sottraendo otteniamo:

$$(\lambda - \lambda')\, \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{d}' = 0$$

Ora se gli autovalori sono distinti si ha:

$$\boldsymbol{d} \times \boldsymbol{d}' = 0$$

E dal momento che gli autovettori non possono essere nulli, essendo le loro componenti soluzioni *non banali* di un sistema lineare omogeneo, segue che essi sono tra loro ortogonali.

Dunque: un operatore simmetrico che ammette tre autovalori distinti, possiede anche tre autovettori tra loro ortogonali, ciascuno in corrispondenza ad un autovalore. Dal momento che gli autovettori possono essere normalizzati all'unità, si conclude che l'operatore ammette una base ortonormale di autovettori $\{\boldsymbol{d}_i\}$; e si può quindi scrivere:

$$\boldsymbol{d}_i \times \boldsymbol{d}_k = \delta_{ik}$$

— *Autovalori multipli*

i) Cominciamo con il considerare il caso in cui 2 autovalori su 3 siano coincidenti (*autovalore doppio*). Scriviamo allora, per esempio:

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} \neq \lambda^{(3)}$$

In questo caso il sistema omogeneo (AL.56) possiede una sola equazione linearmente indipendente e quindi si hanno ∞^2 soluzioni. Ciò significa che esiste un piano invariante rispetto all'azione di $\underset{\sim}{A}$. E quindi qualunque vettore del piano è autovettore e tutte le rette del piano passanti per l'origine sono assi principali dell'operatore. Inoltre è asse principale la retta normale al piano passante per l'origine.

In particolare possiamo scegliere due vettori nel piano, tra loro ortogonali normalizzati all'unità, formando così una base ortonormale con l'autovettore corrispondente all'autovalore distinto che risulta ortogonale ad essi, grazie al risultato ottenuto precedentemente.

Notiamo che in questo caso non esiste una sola base ortonormale di autovettori, ma ne esistono infinite, in quanto si possono scegliere, nel piano invariante infinite coppie di versori ortogonali, che risultano automaticamente ortogonali anche con il terzo autovettore.

ii) Se gli autovalori dell'operatore sono tutti coincidenti si ha:

$$\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)}$$

In questo caso il sistema omogeneo (AL.56) è identicamente soddisfatto in corrispondenza del valore comune degli autovalori e quindi tutto lo spazio risulta essere invariante rispetto all'azione della matrice $\underset{\sim}{A}$ e tutte le rette dello spazio passanti per l'origine sono assi principali dell'operatore. Dunque si ha:

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{I}) \boldsymbol{d} = 0, \qquad \forall \boldsymbol{d} \in R^3$$

L'arbitrarietà di $\boldsymbol{d}$ comporta l'identificazione:

$$\underset{\sim}{A} = \lambda \underset{\sim}{I} \equiv \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

L'operatore dilata ($|\lambda| > 1$) o contrae ($|\lambda| < 1$) tutti i vettori dello spazio dello stesso fattore λ indipendentemente dalla loro direzione (deformazione isotropa).

Diagonalizzazione di una matrice simmetrica

Abbiamo visto che dato un operatore simmetrico questo possiede sempre autovalori reali e una base di auotovettori ortonormali. In particolare possiamo sempre fare in modo che la base risulti levogira, in quanto, in caso che ciò non risultasse vero, basta moltiplicare uno dei vettori per -1 ottenendo in tal modo l'orientamento corretto.

Fatta questa scelta è sempre possibile, allora, costruire una matrice di rotazione che permette di passare dalla base $\{\boldsymbol{e}_i\}$, nella quale l'operatore è rappresentato, alla base degli autovettori:

$$\boldsymbol{d}_k = \underset{\sim}{R}\ \boldsymbol{e}_k$$

Gli elementi della matrice di rotazione cercata sono dati allora dalle componenti degli autovettori posti in colonna:

$$R_{ik} = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{d}_k = (\boldsymbol{d}_k)_i \tag{AL.62}$$

Per esteso si ha:

$$\underset{\sim}{R} \equiv \begin{pmatrix} (\boldsymbol{d}_1)_1 & (\boldsymbol{d}_2)_1 & (\boldsymbol{d}_3)_1 \\ (\boldsymbol{d}_1)_2 & (\boldsymbol{d}_2)_2 & (\boldsymbol{d}_3)_2 \\ (\boldsymbol{d}_1)_3 & (\boldsymbol{d}_2)_3 & (\boldsymbol{d}_3)_3 \end{pmatrix}$$

Si noti che il determinante di questa matrice ha il valore del prodotto misto degli autovettori ortonormalizzati e affinchè questo valga $+1$ occorre che la terna degli autovettori sia stata orientata in modo levogiro.

Rispetto alla base degli autovettori la matrice che rappresenta l'operatore $\underset{\sim}{A}$ ha la nuova rappresentazione:

$$\underset{\sim}{A}\,' = \underset{\sim}{R}^{T} \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{R}$$

Ma in questo caso non è necessario ricorrere alla trasformazione di similitudine per ottenere gli elementi di matrice, in quanto i versori della nuova base, essendo gli autovettori, consentono un calcolo diretto. Abbiamo:

$$A'_{ik} = \boldsymbol{d}_i \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{d}_k = \lambda^{(k)}\delta_{ik} \tag{AL.63}$$

Questa scrittura, per esteso equivale alla rappresentazione:

$$\underset{\sim}{A}\,' \equiv \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}$$

Questa rappresentazione di un operatore si dice *forma diagonale* e il procedimento di determinazione degli autovalori e degli autovettori, necessario per determinare la base rispetto alla quale la matrice dell'operatore assume forma diagonale si dice *diagonalizzazione* dell'operatore.

Rispetto alla base degli autovettori anche la rappresentazione semicartesiana dell'operatore diviene, di conseguenza, particolarmente semplice, in quanto si ha:

$$\underset{\sim}{A} = \lambda^{(k)}\delta_{ik}\boldsymbol{d}_i \otimes \boldsymbol{d}_k \qquad \Longleftrightarrow \underset{\sim}{A} = \lambda^{(k)}\boldsymbol{d}_k \otimes \boldsymbol{d}_k$$

E quindi, per esteso:

$$\underset{\sim}{A} = \lambda^{(1)}\boldsymbol{d}_1 \otimes \boldsymbol{d}_1 + \lambda^{(2)}\boldsymbol{d}_2 \otimes \boldsymbol{d}_2 + \lambda^{(3)}\boldsymbol{d}_3 \otimes \boldsymbol{d}_3$$

dove i prodotti tensoriali degli autovettori ortonormalizzati non sono altro che gli operatori di proiezione sugli assi principali dell'operatore $\underset{\sim}{A}$.

Questa rappresentazione consente di comprendere bene l'effetto dell'azione di un operatore su un vettore dello spazio; infatti se rappresentiamo un vettore $\boldsymbol{v} \in R^3$ sulla base degli autovettori di $\underset{\sim}{A}$, abbiamo la forma semicartesiana:

$$\boldsymbol{v} = v_k \boldsymbol{d}_k$$

Facendo ora agire l'operatore $\underset{\sim}{A}$ sul vettore $\boldsymbol{v}$ si ottiene:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = \left(\lambda^{(i)}\boldsymbol{d}_i \otimes \boldsymbol{d}_i\right)\ v_k \boldsymbol{d}_k = \lambda^{(i)}\boldsymbol{d}_i\ (\boldsymbol{d}_i \times \boldsymbol{d}_k)\ v_k = \lambda^{(i)}\ v_i \boldsymbol{d}_i$$

Ovvero in forma estesa:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = \lambda^{(1)}\, v_1 \boldsymbol{d}_1 + \lambda^{(2)}\, v_2 \boldsymbol{d}_2 + \lambda^{(3)}\, v_3 \boldsymbol{d}_3$$

L'operatore si comporta come un agente che deforma i vettori in maniera anisotropa, modificandone la prima componente secondo un coefficiente di dilatazione $\lambda^{(1)}$, la seconda componente secondo il fattore $\lambda^{(2)}$ e la terza componente secondo il fattore $\lambda^{(3)}$. Se due autovalori coincidono la deformazione diviene isotropa, cioè indipendente dalla direzione di $\boldsymbol{v}$, nel piano dei corrispondenti autovettori; se tre autovalori coincidono la deformazione è isotropa in tutto lo spazio.

Operatori definiti di segno

— Un operatore $\underset{\sim}{A}$ si dice *definito positivo* se e solo se:

i) $\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} > 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \neq 0$

ii) $\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{v} = 0$

Analogamente si dirà che un operatore è *definito negativo* se al posto del segno di $>$ compare il segno di $<$.

— Un operatore $\underset{\sim}{A}$ si dice *semidefinito positivo* se e solo se:

$\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{v} \in R^3$

Analogamente si dirà che un operatore è *semidefinito negativo* se al posto del segno di $\geq$ compare il segno di $\leq$.

Geometricamente il fatto che un operatore sia definito positivo indica che l'angolo tra un vettore $\boldsymbol{v} \neq 0$ e il suo trasformato è *acuto,* ovvero che il trasformato si trova nel semipiano aperto, che contiene $\boldsymbol{v}$, delimitato dalla retta normale a $\boldsymbol{v}$ passante per l'origine.

Infatti:

$$\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\,|\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{v}|\, cos\,\vartheta > 0$$

comporta, per $\boldsymbol{v} \neq 0$, che $cos\,\vartheta > 0$.

Diamo ora un criterio operativo per verificare se un operatore è definito di segno:

• Un operatore risulta essere *definito positivo* (rispettivamente, *definito negativo*) se gli autovalori della sua parte simmetrica sono tutti positivi (rispettivamente, negativi).

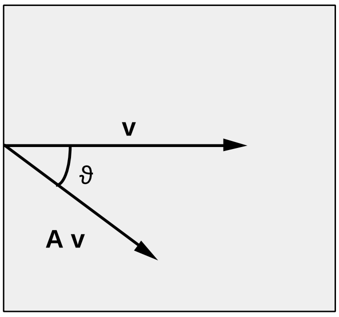

Figura AL. 12: azione di un operatore definito positivo

Infatti rappresentando i vettori sulla base degli autovettori dell'operatore si ha:

$$\boldsymbol{v} \times \underset{\sim}{A}\; \boldsymbol{v} == v_i \boldsymbol{d}_i \times \underset{\sim}{A}\; v_k \boldsymbol{d}_k = v_i v_k \boldsymbol{d}_i \times \underset{\sim}{A}\; \boldsymbol{d}_k = v_i v_k \boldsymbol{d}_i \times \underset{\sim}{A}\,{}_S \boldsymbol{d}_k =$$

$$= v_i v_k\, \lambda^{(i)} \boldsymbol{d}_i \times \boldsymbol{d}_k =$$

$$= v_i v_k\, \lambda^{(i)} \delta_{ik} = v_1^2\, \lambda^{(1)} + v_2^2\, \lambda^{(2)} + v_3^2\, \lambda^{(3)}$$

Quest'ultima quantità può risultare positiva (negativa) per vettori non nulli se e solo se gli autovalori sono tutti positivi (negativi). Per avere un operatore semidefinito di segno si può ammettere anche che uno o due autovalori siano nulli. Se tutti gli autovalori sono nulli l'operatore stesso è nullo. Si noti come solo la parte simmetrica dell'operatore contribuisce alla forma quadratica.

Questo criterio è particolarmente comodo quando la matrice si presenta in forma diagonale. Se la matrice non si presenta in forma diagonale è più conveniente ricorrere al criterio di Sylvester noto dall'analisi.

Matrici 2×2

A titolo di esempio esaminiamo il caso di una matrice simmetrica 2×2. Se la matrice non è in forma diagonale non è necessario diagonalizzarla, ma basta studiare la sua equazione caratteristica, che si presenta nella forma:

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A}\,)\,\lambda + \det(\underset{\approx}{A}\,) = 0$$

Sappiamo che gli autovalori sono reali, grazie alla simmetria della matrice; allora possiamo determinare i segni degli autovalori mediante la regola dei segni di Cartesio. Affinchè gli autovalori siano entrambi positivi (negativi) dovremo avere due *variazioni* (*permanenze*) dei segni dei coefficienti dell'equazione. Questo si realizza a condizione che:

$$\mathrm{Tr}\,(\underset{\approx}{A}\,) > 0 \;\; (< 0), \qquad \det(\underset{\approx}{A}\,) > 0$$

E' sufficiente perciò esaminare i segni della traccia e del determinante per stabilire il segno degli autovalori. Si può ancora osservare che in una matrice simmetrica 2×2 queste condizioni si traducono nelle seguenti:

$$A_{11} + A_{22} > 0 \; (< 0), \qquad A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$$

La condizione sul segno del determinante si può riscrivere:

$$A_{11}A_{22} > A_{12}^2 \qquad \Longrightarrow A_{11}A_{22} > 0$$

che comporta che A_{11} e A_{22} abbiano lo stesso segno. Di conseguenza la richiesta che la traccia sia positiva (negativa) si riconduce alla richiesta che $A_{11} > 0 \; (< 0)$.

Riassumendo le condizioni per verificare se una matrice simmetrica 2×2 è definita positiva (negativa) si possono ricondurre alla richiesta che:

$$A_{11} > 0 \ \ (< 0), \qquad \det(\underset{\sim}{A}) > 0$$

Si è ritrovato così il criterio di Sylvester applicato alla matrice 2×2.

Osservazioni

i) Se un operatore è diagonalizzabile i suoi invarianti principali, che non dipendono dalla scelta della base, possono essere calcolati a partire dalla matrice in forma diagonale che rappresenta l'operatore rispetto alla base degli autovettori. Gli invarianti principali risultano allora espressi mediante gli autovalori. Si ottiene subito:

$$\det(\underset{\sim}{A}) = \lambda^{(1)}\,\lambda^{(2)}\,\lambda^{(3)}$$

$$\mathrm{Tr}\,(\underset{\sim}{A}) = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)}$$

$$\mathrm{Tr}\,\left(\underset{\sim}{A}^{\,C}\right) = \lambda^{(1)}\,\lambda^{(2)} + \lambda^{(1)}\,\lambda^{(3)} + \lambda^{(2)}\,\lambda^{(3)}$$

Come si vede facilmente:

— l'annullarsi del determinante equivale all'annullarsi di almeno un autovalore, per cui una matrice non singolare ha autovalori tutti non nulli.

— Se oltre al determinante si annulla anche la traccia dell'operatore complementare allora almeno due autovalori sono nulli e viceversa.

— Se i tre invarianti principali sono nulli contemporaneamente allora i tre autovalori sono nulli e viceversa.

ii) Un problema agli autovalori può presentarsi anche sotto la forma, diversa dalla (AL.56):

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{H})\,\boldsymbol{d} = 0 \tag{AL.64}$$

dove $\underset{\sim}{A}$ è un operatore simmetrico e $\underset{\sim}{H}$ è un operatore *simmetrico definito positivo*. Questa forma può essere ricondotta alla (AL.56) grazie al fatto che l'operatore $\underset{\sim}{H}$ non è singolare. Infatti esiste in questo caso l'operatore inverso e moltiplicando a sinistra la (AL.64) per l'inverso si ha:

$$\underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{H})\,\boldsymbol{d} = \left(\underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{A} - \lambda\,\underset{\sim}{I}\right)\boldsymbol{d} = 0$$

Introdotto allora il nuovo operatore:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{H}^{-1}\underset{\sim}{A}$$

possiamo riscrivere il problema agli autovalori nella forma equivalente alla (AL.64):

$$(\underset{\sim}{B} - \lambda\,\underset{\sim}{I})\,\boldsymbol{d} = 0 \tag{AL.65}$$

• Osserviamo che gli autovalori del problema nella forma (AL.64) e (AL.65) sono gli stessi. Infatti gli autovalori sono determinati, per il problema (AL.65), dalla condizione:

$$\det(\underset{\sim}{B} - \lambda\,\underset{\sim}{I}) = 0$$

Ma essendo:

$$\det(\underset{\sim}{B} - \lambda\,\underset{\sim}{I}) = \det\left(\underset{\sim}{H}^{-1}\right)\,\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{H})$$

e:

$$\det\left(\underset{\sim}{H}^{-1}\right) \neq 0$$

per la non singolarità di $\underset{\sim}{H}$ segue che gli autovalori del problema (AL.65) soddisfano anche l'equazione caratteristica del problema (AL.64) che è rappresentata dalla:

$$\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{H}) = 0$$

e viceversa. Dunque gli autovalori sono gli stessi.

• Anche gli autovettori sono gli stessi. Infatti se $\boldsymbol{d}$ è autovettore del problema (AL.65) dovrà esserlo anche per il problema (AL.64) grazie alla non singolarità di $\underset{\sim}{H}$. Si ha:

$$\underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{H})\,\boldsymbol{d} = \left(\underset{\sim}{B} - \lambda\,\underset{\sim}{I}\right)\boldsymbol{d} = 0$$

Ma $\underset{\sim}{H}^{-1}(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{H})\,\boldsymbol{d}$ può essere nullo se e solo se:

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{H})\,\boldsymbol{d} = 0$$

in quanto se fosse diversamente risulterebbe:

$$\underset{\sim}{H}^{-1}\boldsymbol{w} = 0, \qquad \boldsymbol{w} = (\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{H})\,\boldsymbol{d}$$

cioè $\boldsymbol{w}$ sarebbe autovettore di $\underset{\sim}{H}^{-1}$ in corrispondenza di un autovalore nullo; ma $\underset{\sim}{H}^{-1}$ è non singolare e non può avere quindi autovalori nulli che renderebbero nullo il determinante, contrariamente all'ipotesi di non singolarità.

• Gli autovettori formano una base che risulta ortonormale solo se $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{I}$.

Infatti l'operatore $\underset{\sim}{B}$ non è simmetrico, perciò non valgono i teoremi provati per la diagonalizzazione degli operatori simmetrici. Se si considerano due autovettori $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}'$ relativi ad autovalori distinti λ, λ', si può scrivere:

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{d} = \lambda \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}$$

$$\underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{d}' = \lambda' \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}'$$

Moltiplicando scalarmente la prima per $\boldsymbol{d}'$ e la seconda per $\boldsymbol{d}$ e sottraendo, si ha, tenendo conto della simmetria dei due operatori:

$$(\lambda - \lambda')\ \boldsymbol{d} \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}' = 0$$

Essendo gli autovalori distinti per ipotesi segue che gli autovettori sono soggetti alla condizione:

$$\boldsymbol{d} \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}' = 0 \tag{AL.66}$$

che prende il posto della condizione di ortogonalità. Rimane arbitraria la norma dei singoli vettori che, grazie al fatto che $\underset{\sim}{H}$ è definita positiva, può essere scelta in maniera che risulti:

$$\boldsymbol{d} \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d} = 1 > 0$$

Si può allora scrivere una relazione:

$$\boldsymbol{d}_i \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}_k = \delta_{ik} \tag{AL.67}$$

E' chiaro che se $\underset{\sim}{H}$ coincide con l'identità, e solo in questo caso, la base risulta ortonormale. La (AL.67) ci informa anche del fatto che se rappresentiamo gli operatori rispetto alla base degli autovettori sia la matrice $\underset{\sim}{H}$, che la matrice $\underset{\sim}{A}$ divengono simultaneamente diagonali e la $\underset{\sim}{H}$ coincide con l'identità, infatti:

$$H'_{ik} = \boldsymbol{d}_i \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}_k = \delta_{ik}$$

$$A'_{ik} = \boldsymbol{d}_i \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{d}_k = \lambda^{(i)} \boldsymbol{d}_i \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}_k = \lambda^{(i)} \delta_{ik}$$

Si noti che è necessario richiedere che $\underset{\sim}{H}$ sia definita positiva, altrimenti non si potrebbe imporre la (AL.67), perchè non si conoscerebbe il segno delle quantità:

$$\boldsymbol{d}_1 \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}_1, \qquad \boldsymbol{d}_2 \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}_2, \qquad \boldsymbol{d}_3 \times \underset{\sim}{H}\ \boldsymbol{d}_3$$

Equazione di un ellissoide riferita al suo centro

Consideriamo l'equazione di un ellissoide riferita ad un sistema cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$ dello spazio R^3, avente origine nel centro dell'ellissoide:

$$A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{23}x_2x_3 = 1 \quad \text{(AL.68)}$$

A questa equazione si può dare una forma assoluta se introduciamo la matrice simmetrica:

$$\underset{\sim}{A} \equiv \|A_{ik}\|$$

e il vettore:

$$\boldsymbol{x} \equiv (x_i)$$

Allora l'equazione si riscrive:

$$\boldsymbol{x} \times \underset{\sim}{A}\ \boldsymbol{x} = 1 \tag{AL.69}$$

E' facile osservare che, trattandosi di un ellissoide la matrice risulta essere definita positiva. Infatti, dal momento che la matrice è simmetrica, essa si può diagonalizzare e l'equazione può essere riscritta facendo uso delle coordinate relative alla base degli autovettori della matrice, che denotiamo con x'_1, x'_2, x'_3. La matrice in questo sistema di coordinate risulta diagonale e possiede autovalori reali, essendo simmetrica, e positivi, essendo definita positiva.

Si ha allora l'equazione dell'ellissoide:

$$\lambda^{(1)} x'^2_1 + \lambda^{(2)} x'^2_2 + \lambda^{(3)} x'^2_3 = 1$$

Essendo gli autovalori tutti positivi è possibile esprimerli come quadrati di numeri reali, e in particolare introdurre a_1, a_2, a_3 tali che:

$$\lambda^{(1)} = \frac{1}{a_1^2}, \qquad \lambda^{(2)} = \frac{1}{a_2^2}, \qquad \lambda^{(3)} = \frac{1}{a_3^2}$$

Allora l'equazione dell'ellissoide assume la forma canonica ben nota:

$$\frac{x'^2_1}{a_1^2} + \frac{x'^2_2}{a_2^2} + \frac{x'^2_3}{a_3^2} = 1 \tag{AL.70}$$

• Osserviamo che gli assi principali della matrice $\underset{\sim}{A}$ vengono a rappresentare gli assi di simmetria dell'ellissoide. Dunque la ricerca degli assi principali di un ellissoide viene ricondotta alla diagonalizzazione di una matrice simmetrica.

Notiamo anche che se la matrice fosse stata non singolare, ma non definita di segno, vi sarebbero stati autovalori positivi e negativi e la stessa equazione avrebbe rappresentato un iperboloide.

Potenze di un operatore

Dato un operatore lineare $\underset{\approx}{A}$ si può definire il quadrato dell'operatore come il prodotto dell'operatore per se stesso:

$$\underset{\approx}{A}^{2} = \underset{\approx}{A}\,\underset{\approx}{A} \tag{AL.71}$$

Di conseguenza per induzione si definisce la potenza $(n+1)$-esima, di un operatore:

$$\underset{\approx}{A}^{n+1} = \underset{\approx}{A}^{n}\underset{\approx}{A}\,, \qquad n \in N \tag{AL.72}$$

Ne viene di conseguenza che:

Se $\underset{\approx}{A}$ ammette un autovalore λ e $\boldsymbol{d}$ è il corrispondente autovettore si ha:

$$\underset{\approx}{A}\,\boldsymbol{d} = \lambda\,\boldsymbol{d} \qquad \Longrightarrow \underset{\approx}{A}^{2}\boldsymbol{d} = \lambda\,\underset{\approx}{A}\,\boldsymbol{d} = \lambda^2\,\boldsymbol{d}$$

E quindi iterando:

$$\underset{\approx}{A}^{n}\boldsymbol{d} = \lambda^n\,\boldsymbol{d}$$

Ovvero:

• la potenza n-esima di un operatore $\underset{\sim}{A}$ ha gli stessi autovettori di $\underset{\sim}{A}$ e autovalori uguali alla potenza n-esima dei suoi autovalori.

In particolare se l'operatore $\underset{\sim}{A}$ è simmetrico, $\underset{\sim}{A}^{\,n}$ risulta diagonalizzabile e si ha la rappresentazione semicartesiana:

$$\underset{\sim}{A}^{\,n} = \left[\lambda^{(i)}\right]^n \boldsymbol{d}_i \otimes \boldsymbol{d}_i$$

Rappresentazione polare di un operatore

Un operatore non singolare $\underset{\sim}{A}$ tale che:

$$\det(\underset{\sim}{A}) > 0 \tag{AL.73}$$

può sempre essere espresso nella *forma polare:*

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{B} \tag{AL.74}$$

dove $\underset{\sim}{R}$ è un operatore di rotazione e $\underset{\sim}{B}$ è un operatore simmetrico definito positivo (operatore di dilatazione).

Infatti dato l'operatore $\underset{\sim}{A}$ si può osservare che l'operatore:

$$\underset{\sim}{A}^{\,T}\underset{\sim}{A}$$

è *simmetrico* e *definito positivo.*

— Tale operatore è simmetrico; infatti si ha:

$$\left(\underset{\sim}{A}^{\,T}\underset{\sim}{A}\right)^T = \underset{\sim}{A}^{\,T}\underset{\sim}{A}$$

— E' definito positivo; infatti:

$$\boldsymbol{v} \times \left(\underset{\sim}{A}^{T} \underset{\sim}{A} \, \boldsymbol{v} \right) = (\underset{\sim}{A} \, \boldsymbol{v}) \times (\underset{\sim}{A} \, \boldsymbol{v}) = |\underset{\sim}{A} \, \boldsymbol{v}|^2$$

Di conseguenza è diagonalizzabile e i suoi autovalori $\lambda^{(i)}$ sono positivi. Questo significa che è possibile estrarre la radice quadrata di ogni autovalore e definire l'operatore lineare simmetrico e definito positivo:

$$\underset{\sim}{B} = \sqrt{\lambda^{(i)}} \, \boldsymbol{d}_i \otimes \boldsymbol{d}_i \tag{AL.75}$$

per il quale si ha evidentemente:

$$\underset{\sim}{B}^{2} = \underset{\sim}{A}^{T} \underset{\sim}{A} \tag{AL.76}$$

Dal momento che $\underset{\sim}{B}$ è non singolare, essendo definito positivo, esiste il suo inverso e possiamo definire l'operatore:

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{A} \, \underset{\sim}{B}^{-1} \tag{AL.77}$$

Ora rimane da verificare che $\underset{\sim}{R}$ appena definito è un operatore di rotazione. Abbiamo infatti:

$$\underset{\sim}{R}^{T} \underset{\sim}{R} = \left(\underset{\sim}{A} \, \underset{\sim}{B}^{-1} \right)^{T} \underset{\sim}{A} \, \underset{\sim}{B}^{-1} = \left(\underset{\sim}{B}^{-1} \right)^{T} \underset{\sim}{A}^{T} \underset{\sim}{A} \, \underset{\sim}{B}^{-1} = \underset{\sim}{I}$$

grazie al fatto che $\underset{\sim}{B}$ è simmetrico, e alla (AL.76).

Inoltre per quanto riguarda il determinante si ha:

$$\det(\underset{\sim}{R}) = \det\left(\underset{\sim}{A} \, \underset{\sim}{B}^{-1} \right) = \det(\underset{\sim}{A}) \det\left(\underset{\sim}{B}^{-1} \right)$$

Ora dalla (AL.76), tenendo conto che il determinante non cambia per trasposizione, abbiamo:

$$\left[\det(\underset{\sim}{A})\right]^2 = \left[\det(\underset{\sim}{B})\right]^2$$

Ma $\underset{\sim}{A}$ ha determinante positivo per ipotesi e $\underset{\sim}{B}$ ha determinante positivo essendo definito positivo, segue:

$$\det(\underset{\sim}{A}) = \det(\underset{\sim}{B})$$

E quindi:

$$\det(\underset{\sim}{A}) \det\left(\underset{\sim}{B}^{-1}\right) = 1$$

dal momento che il determinante dell'operatore inverso è l'inverso del determinante.

Osserviamo che in alternativa alla rappresentazione (AL.74) si può dare anche la seguente:

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{R} \tag{AL.78}$$

Dal momento che il prodotto non è generalmente commutativo, $\underset{\sim}{C}$ differisce da $\underset{\sim}{B}$. Si ha infatti dal confronto fra la (AL.74) e la (AL.78):

$$\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{R}$$

da cui si ricava moltiplicando a destra per $\underset{\sim}{R}^T$:

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{R}^T \tag{AL.79}$$

• Dal punto di vista dell'azione di un operatore $\underset{\sim}{A}$ non singolare, questo risultato significa che l'azione dell'operatore si può pensare realizzata dalla composizione di una rotazione rigida che non deforma i vettori, ma li ruota conservandone il modulo, e da una dilatazione che li deforma senza ruotarli.