TC. Trasformazioni canoniche

Funzione generatrice

Consideriamo le equazioni di Hamilton:

$$\dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}, \qquad \dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \tag{TC.1}$$

per le variabili canoniche q_h, p_h, relative ad un'hamiltoniana generica $\mathcal{H}(q_h, p_h, t)$, e supponiamo di effettuare un cambio di variabili mediante una trasformazione regolare del tutto generale: [1]

$$Q_h = Q_h(q_k, p_k, t), \qquad P_h = P_h(q_k, p_k, t) \tag{TC.2}$$

Dopo una trasformazione così generale le equazioni di Hamilton possono venire trasformate in equazioni che non hanno più la forma canonica (TC.1): nasce allora il problema di determinare a quali condizioni una trasformazione come la (TC.2) lascia invarianti le equazioni di Hamilton, ovvero a quali condizioni le nuove variabili sono ancora variabili canoniche. In genere le nuove equazioni di Hamilton si scriveranno:

$$\dot{Q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_h}, \qquad \dot{P}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_h}$$

potendo a priori la nuova hamiltoniana $\mathcal{H}'$ differire da $\mathcal{H}$.

Definiremo allora *trasformazione canonica* o *di contatto* una trasformazione che porta variabili canoniche in nuove variabili canoniche. In

[1] Evidentemente qui i simboli Q_h non vanno confusi con le componenti lagrangiane delle forze con le quali non hanno alcuna relazione.

ogni caso, prima e dopo la trasformazione deve valere il principio di Hamilton nella seconda forma, e cioè devono risultare uguali a zero le variazioni dei due funzionali che esprimono gli integrali d'azione:

$$\delta\mathcal{S}[q_h, p_h] = \delta \int_{t_1}^{t_2} [\dot{q}_h p_h - \mathcal{H}(q_h, p_h, t)]\, dt = 0$$

$$\delta\mathcal{S}'[Q_h, P_h] = \delta \int_{t_1}^{t_2} [\dot{Q}_h P_h - \mathcal{H}'(Q_h, P_h, t)]\, dt = 0$$

Ciò significa che i due integrali d'azione non sono necessariamente uguali, ma possono differire per un funzionale $\mathcal{F}$ a variazione *identicamente* nulla:

$$\mathcal{F}[q_h, p_h, Q_h, P_h] = \mathcal{S}[q_h, p_h] - \mathcal{S}'[Q_h, P_h]$$

Ora la variazione risulta essere identicamente nulla solo gli estremi dell'intervallo d'integrazione $[t_1, t_2]$, perciò $\mathcal{F}$ deve dipendere solo dalle variabili calcolate in tali estremi. Ha quindi la forma:

$$\mathcal{F}[q_h, p_h, Q_h, P_h] =$$

$$= F(q_h(t_2), p_h(t_2), Q_h(t_2), P_h(t_2), t_2) - F(q_h(t_1), p_h(t_1), Q_h(t_1), P_h(t_1), t_1) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q_h(t), p_h(t), Q_h(t), P_h(t), t)\, dt$$

Infatti si ha proprio:

$$\delta\mathcal{F}[q_h, p_h, Q_h, P_h] = \left[\frac{\partial F}{\partial q_h}\,\delta\, q_h + \frac{\partial F}{\partial Q_h}\,\delta\, Q_h + \frac{\partial F}{\partial p_h}\,\delta\, p_h + \frac{\partial F}{\partial P_h}\,\delta\, P_h\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Allora abbiamo il seguente legame fra le funzioni integrande degli integrali d'azione e la funzione F:

$$\dot{q}_h p_h - \mathcal{H} = \dot{Q}_h P_h - \mathcal{H}' + \frac{dF}{dt} \tag{TC.3}$$

La funzione F prende il nome di *funzione generatrice* della trasformazione canonica, perchè, come vedremo, nota tale funzione, si può determinare completamente la trasformazione stessa.

• Osserviamo che le $4\,N$ variabili q_h, p_h, Q_h, P_h non possono essere tutte indipendenti, a causa delle $2\,N$ leggi di trasformazione (TC.2) che le legano fra loro; di conseguenza solo $2\,N$ di esse sono indipendenti. Dunque la funzione F, espressa in termini delle sole variabili indipendenti potrà contenere al più $2\,N$ variabili. Distingueremo, perciò, i 4 tipi di funzioni generatrici che legano le vecchie variabili alle nuove, e le denoteremo con $F_1(q_h, Q_h, t)$, $F_2(q_h, P_h, t)$, $F_3(p_h, Q_h, t)$, $F_4(p_h, P_h, t)$.

Funzione generatrice del tipo $F_1(q_h, Q_h, t)$

Se la funzione generatrice è del tipo $F_1(q_h, Q_h, t)$ la sua derivata totale rispetto al tempo risulta essere:

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}\,\dot{q}_h + \frac{\partial F_1}{\partial Q_h}\,\dot{Q}_h + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{TC.4}$$

Confrontando la (TC.4) con la (TC.3) e identificando i coefficienti delle variabili indipendenti, abbiamo la determinazione completa della trasformazione in termini della funzione generatrice:

$$p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}, \qquad P_h = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_h}, \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{TC.5}$$

Esplicitando dalla prima relazione le nuove variabili Q_h in funzione delle q_h e di t, mediante la seconda relazione si ottengono anche le P_h in funzione delle vecchie variabili. L'ultima relazione lega le due hamiltoniane.

• Osserviamo che se la F, e quindi le leggi di trasformazione (TC.2) non dipendono esplicitamente dal tempo, le hamiltoniane coincidono.

Funzione generatrice del tipo $F_2(q_h, P_h, t)$

Se la funzione generatrice è, invece, del tipo $F_2(q_h, P_h, t)$, la sua derivata totale rispetto al tempo si scrive:

$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial F_2}{\partial q_h}\,\dot{q}_h + \frac{\partial F_2}{\partial P_h}\,\dot{P}_h + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{TC.6}$$

Per confrontare la (TC.6) con la (TC.3) e, identificando i coefficienti delle variabili indipendenti, ottenere:

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h}, \qquad Q_h = \frac{\partial F_2}{\partial P_h}, \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{TC.7}$$

abbiamo bisogno, in questo caso di una trasformazione di Legendre che leghi F_2 a $-F_1$:

$$F_2(q_h, P_h, t) = Q_h P_h - [-F_1(q_h, Q_h, t)], \qquad P_h = \frac{\partial(-F_1)}{\partial Q_h}$$

sostituita nella (TC.3), che diviene:

$$p_h\dot{q}_h - \mathcal{H} = -Q_h\dot{P}_h - \mathcal{H}' + \frac{dF_2}{dt}$$

Funzione generatrice del tipo $F_3(p_h, Q_h, t)$

Se la funzione generatrice è, questa volta, del tipo $F_3(p_h, Q_h, t)$, la sua derivata totale rispetto al tempo è data da:

$$\frac{dF_3}{dt} = \frac{\partial F_3}{\partial p_h}\,\dot{p}_h + \frac{\partial F_2}{\partial Q_h}\,\dot{Q}_h + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{TC.8}$$

Per confrontare la (TC.8) con la (TC.3) e, identificando i coefficienti delle variabili indipendenti, ottenere:

$$q_h = -\frac{\partial F_3}{\partial p_h}, \qquad P_h = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_h}, \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{TC.9}$$

occorre in questo caso introdurre una trasformazione di Legendre che lega $-F_3$ a $-F_1$:

$$-F_3(p_h, Q_h, t) = q_h p_h - F_1(q_h, Q_h, t), \qquad p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}$$

sostituita nella (TC.3), che diviene:

$$-q_h\dot{p}_h - \mathcal{H} = \dot{Q}_h P_h - \mathcal{H}' + \frac{dF_3}{dt}$$

Funzione generatrice del tipo $F_4(p_h, P_h, t)$

Infine, se la funzione generatrice è del tipo $F_4(p_h, P_h, t)$, la sua derivata totale rispetto al tempo vale:

$$\frac{dF_4}{dt} = \frac{\partial F_4}{\partial p_h}\,\dot{p}_h + \frac{\partial F_4}{\partial P_h}\,\dot{P}_h + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{TC.10}$$

Per confrontare la (TC.10) con la (TC.3) e identificando i coefficienti delle variabili indipendenti, ottenere:

$$q_h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h}, \qquad Q_h = \frac{\partial F_4}{\partial P_h}, \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{TC.11}$$

occorre in questo caso introdurre due trasformazioni di Legendre combinate che legano F_4 a F_1:

$$F_4(p_h, P_h, t) = Q_h P_h - q_h p_h + F_1(q_h, Q_h, t)$$

che sostituite nella (TC.3), comportano:

$$-q_h \dot{p}_h - \mathcal{H} = -Q_h \dot{P}_h - \mathcal{H}' + \frac{dF_4}{dt}$$

Esempi

Esaminiamo alcuni semplici esempi di trasformazioni canoniche, partendo dalla loro funzione generatrice:

i) *trasformazione identica*

La trasformazione identica è evidentemente canonica, dal momento che lascia inalterate le variabili q_h, p_h. Essa è generata dalla funzione di tipo F_2 indipendente dal tempo:

$$F_2(q_k, P_k) = q_k P_k \tag{TC.12}$$

Dalle (TC.7) abbiamo:

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = P_h, \qquad Q_h = \frac{\partial F_2}{\partial P_h} = q_h, \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H}$$

La trasformazione non dipende dal tempo e quindi l'hamiltoniana rimane pure inalterata.

ii) *Trasformazioni puntuali*

La trasformazione identica è un caso particolarissimo di quella classe di trasformazioni che definiscono le Q_h solamente in funzione delle vecchie coordinate q_h e del tempo, e che prendono il nome di *trasformazioni puntuali.* Esse si caratterizzano mediante la funzione generatrice di tipo F_2:

$$F_2(q_k, P_k, t) = f_k(q_\ell, t)\, P_k \tag{TC.13}$$

dove $f_k(q_\ell, t)$ è una funzione arbitraria delle sole q_ℓ e del tempo. Si ha allora, grazie alla (TC.7), la trasformazione:

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \frac{\partial f_k}{\partial q_h}\, P_k, \qquad Q_h = \frac{\partial F_2}{\partial P_h} = f_h(q_\ell, t)$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{H} + \frac{\partial f_k}{\partial t}\, P_k$$

iii) *Trasformazione di scambio*

La trasformazione di scambio è generata dalla funzione di tipo F_1 indipendente dal tempo:

$$F_1(q_k, Q_k) = q_k Q_k \tag{TC.14}$$

Mediante le (TC.5) abbiamo:

$$p_h = \frac{\partial F_1}{\partial q_h} = Q_h, \qquad P_h = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_h} = -q_h, \qquad \mathcal{H}' = \mathcal{H} \tag{TC.15}$$

L'interesse di questa trasformazione sta nel suo valore concettuale: essa scambia, a meno di un segno, le coordinate con i momenti canonici. Ciò significa che dopo una trasformazione canonica le nuove variabili non sono più vincolate a rappresentare delle coordinate nello spazio delle configurazioni e dei momenti coniugati ad esse tramite una lagrangiana, ma vengono liberamente trasformate in tutto lo spazio delle fasi, con la sola condizione di lasciare invariata la struttura canonica delle equazioni del moto. Per cui esse possono essere, in un certo senso "ruotate" nello spazio delle fasi fino a scambiarsi.

La verifica della canonicità di questa semplice trasformazione si può effettuare anche direttamente sostituendola nelle equazioni di Hamilton, le quali vengono semplicemente a scambiarsi nelle nuove coordinate.

Invarianti canonici

Condizioni di canonicità - Parentesi fondamentali di Poisson

Nota la funzione generatrice, come abbiamo visto, siamo in grado di costruire la trasformazione canonica corrispondente. Ci poniamo ora un altro problema:

— *A quali condizioni una legge di trasformazione delle variabili canoniche q_h, p_h deve soddisfare affinchè le nuove variabili Q_k, P_k siano anch'esse variabili canoniche?*

E' chiaro che se si riesce a determinare una funzione generatrice F dalla quale discende la nostra trasformazione, essa sarà certamente una trasformazione canonica, ma vorremmo ora trovare un criterio del tutto generale, cioè delle condizioni di canonicità alle quali tutte le variabili canoniche devono soddisfare. Possiamo quindi anche riformulare la nostra domanda nel modo seguente:

— *A quali condizioni le* $2\,N$ *variabili* $Q_k,\ P_k$ *devono soddisfare per essere variabili canoniche?*

Possiamo determinare queste condizioni mediante un calcolo diretto.

Supponiamo che le variabili $q_h,\, p_h$ siano canoniche, relativamente all'hamiltoniana $\mathcal{H}$ e valgano, di conseguenza, le equazioni di Hamilton:

$$\dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}, \qquad \dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \tag{TC.16}$$

Consideriamo la generica trasformazione delle variabili, che assumiamo essere non singolare e differenziabile:

$$Q_k = Q_k(q_h, p_h, t), \qquad P_k = P_k(q_h, p_h, t)$$

Calcoliamo:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial Q_k}{\partial q_h}\,\dot{q}_h + \frac{\partial Q_k}{\partial p_h}\,\dot{p}_h + \frac{\partial Q_k}{\partial t} \tag{TC.17}$$

$$\dot{P}_k = \frac{\partial P_k}{\partial q_h}\,\dot{q}_h + \frac{\partial P_k}{\partial p_h}\,\dot{p}_h + \frac{\partial P_k}{\partial t} \tag{TC.18}$$

Mediante le equazioni di Hamilton (TC.16) possiamo eliminare $\dot{q}_h,\, \dot{p}_h$ nelle (TC.17), (TC.18), ottenendo:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial Q_k}{\partial q_h}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_h}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} + \frac{\partial Q_k}{\partial t} \tag{TC.19}$$

$$\dot{P}_k = \frac{\partial P_k}{\partial q_h}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} - \frac{\partial P_k}{\partial p_h}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} + \frac{\partial P_k}{\partial t} \tag{TC.20}$$

Ora esprimiamo le derivate dell'hamiltoniana $\mathcal{H}$ in termini delle nuove variabili $Q_k,\ P_k$:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_h} \tag{TC.21}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_h} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_h} \tag{TC.22}$$

Sostituiamo le (TC.21), (TC.22) nelle (TC.19), (TC.20) e raccogliamo opportunamente:

$$\dot{Q}_k = [Q_k, Q_\ell]_{q,p}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\ell} + [Q_k, P_\ell]_{q,p}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\ell} + \frac{\partial Q_k}{\partial t} \tag{TC.23}$$

$$\dot{P}_k = [P_k, Q_\ell]_{q,p}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\ell} + [P_k, P_\ell]_{q,p}\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\ell} + \frac{\partial P_k}{\partial t} \tag{TC.24}$$

dove con la notazione:

$$[f, g]_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial q_h}\frac{\partial g}{\partial p_h} - \frac{\partial f}{\partial p_h}\frac{\partial g}{\partial q_h} \tag{TC.25}$$

abbiamo indicato le *parentesi di Poisson* per qualunque coppia di funzioni $f,\ g$ delle variabili canoniche e del tempo, relativamente alle variabili hamiltoniane $q_h,\ p_h$. Dalle (TC.23), (TC.24) otteniamo le condizioni di canonicità che cerchiamo. Infatti queste relazioni si identificano con le equazioni di Hamilton per le nuove variabili $Q_k,\ P_k$, relative a una nuova hamiltoniana $\mathcal{H}'$:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_k}, \qquad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_k} \tag{TC.26}$$

se e solo se:

$$[Q_k, Q_\ell]_{q,p} = 0, \qquad [Q_k, P_\ell]_{q,p} = \delta_{k\ell}, \qquad [P_h, P_\ell]_{q,p} = 0 \tag{TC.27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial t} \tag{TC.28}$$

Le relazioni (TC.27) sono le condizioni di canonicità richieste e prendono il nome di *parentesi fondamentali di Poisson.* Le (TC.28), invece, risultano automaticamente soddisfatte. Infatti, sappiamo che le due hamiltoniane sono sempre legate mediante la funzione generatrice F, dalla relazione:

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{TC.29}$$

E quindi le (TC.28) si riscrivono:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Q_k - \frac{\partial F}{\partial P_k}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(P_k + \frac{\partial F}{\partial Q_k}\right) = 0 \tag{TC.30}$$

La prima di queste relazioni è soddisfatta grazie alla (TC.7), o alla (TC.11), quando si scrive F nella forma F_2, o F_4, mentre la seconda lo è, per la (TC.5), o (TC.9), quando si scrive F nella forma F_1 o F_3. D'altra parte le funzioni generatrici nelle varie forme sono legate da opportune trasformazioni di Legendre, per cui è possibile passare dalla forma F_1 ad una qualsiasi delle altre forme.

• Le parentesi fondamentali di Poisson sono invarianti per trasformazioni canoniche (*invarianti canonici*) in quanto sono state dedotte per una trasformazione delle variabili del tutto generale, e non dipendono da una scelta particolare delle Q_k, P_k, nè delle q_h, p_h. Perciò possiamo omettere, in seguito, l'indice $_{p,q}$ al piede.

• Ne consegue che le parentesi di Poisson tra due funzioni qualunque $f,\ g$ sono invarianti canonici.

Infatti si può sempre ricondurre una parentesi di Poisson alle parentesi fondamentali, tenendo conto che:

$$[f,g]_{q,p} = [f,Q_k]_{q,p}\,\frac{\partial g}{\partial Q_k} + [f,P_k]_{q,p}\,\frac{\partial g}{\partial P_k} \tag{TC.31}$$

e, applicando questo stesso risultato a Q_h e P_h, in luogo di g:

$$[f,Q_h]_{q,p} = [Q_h,Q_k]\,\frac{\partial f}{\partial Q_k} + [Q_h,P_k]\,\frac{\partial f}{\partial P_k}$$

$$[f,P_h] = [P_h,Q_k]\,\frac{\partial f}{\partial P_k} + [P_h,P_k]\,\frac{\partial f}{\partial P_k}$$

Tenendo conto delle parentesi fondamentali (TC.27), da queste relazioni si ha il risultato:

$$\frac{\partial f}{\partial Q_k} = [f,P_k]_{q,p}, \qquad \frac{\partial f}{\partial P_k} = -[f,Q_k]_{q,p} \tag{TC.32}$$

che, sostituito nella (TC.31), comporta l'invarianza canonica di qualsiasi parentesi di Poisson:

$$[f,p]_{p,q} = \frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_k} = [f,g]_{Q,P} \tag{TC.33}$$

Si può, inoltre verificare che le parentesi di Poisson godono delle seguenti proprietà:

i) $[f+g,h] = [f,h] + [g,h]$

ii) $[f\,g,h] = f\,[g,h] + g\,[f,h]$

Parentesi di Lagrange e invarianti integrali di Poincaré

Consideriamo una ipersuperficie $2N$-dimensionale dello spazio delle fasi, descritta mediante le equazioni parametriche:

$$q_h = q_h(u_k, v_k), \qquad p_h = p_h(u_k, v_k) \tag{TC.34}$$

essendo $u_k,\ v_k$ i $2N$ parametri che la descrivono.

Si chiamano *parentesi di Lagrange* le seguenti quantità:

$$\{u_k, v_\ell\} = \frac{\partial q_h}{\partial u_k}\frac{\partial p_h}{\partial v_\ell} - \frac{\partial q_h}{\partial v_\ell}\frac{\partial p_h}{\partial u_k} \tag{TC.35}$$

Si può mostrare, con un calcolo diretto, che tra le parentesi di Lagrange e le parentesi di Poisson intercorre la seguente relazione:

$$\{u_h, v_k\}\,[u_h, v_\ell] = \delta_{k\ell} \tag{TC.36}$$

e cioè che la matrice i cui elementi sono le parentesi di Lagrange è la trasposta dell'inversa della matrice i cui elementi sono costituiti dalla corrispondente parentesi di Poisson.

• Di conseguenza anche le parentesi di Lagrange sono degli invarianti canonici.

Introduciamo ora gli integrali sulle ipersuperfici $\mathcal{S}$, a $2n$ dimensioni, dello spazio delle fasi:

$$J_n = \int\!\!\int\cdots\int_{\mathcal{S}_{2n}} d\,q_h d\,p_h d\,q_k d\,p_k \cdots d\,q_\ell d\,p_\ell, \qquad n \leq N \tag{TC.37}$$

che prendono il nome di *invarianti integrali di Poincaré.* Questa scrittura significa che, per $n = 1$ si ha un integrale su una superficie bidimensionale:

$$J_1 = \int\int_{\mathcal{S}_2} dq_h dp_h$$

Se $n = 2$ si ha un integrale su una ipersuperficie a 4 dimensioni:

$$J_2 = \int\int\int\int_{\mathcal{S}_4} d\,q_h d\,p_h d\,q_k d\,p_k$$

e così via. Questi integrali sono detti *invarianti* perchè sono in effetti degli invarianti canonici. Lo si può vedere riconducendosi alle parentesi di Lagrange. Infatti, utilizzando la parametrizzazione (TC.34), l'elemento di ipersuperficie nell'integrale (TC.37), si scrive come prodotto di n somme (su h) di elementi di superficie bidimensionale del tipo:

$$d\,q_h d\,p_h = \frac{\partial\,(q_h,\,p_h)}{\partial\,(u_k,\,v_\ell)}\,d\,u_k d\,v_\ell$$

Ora la somma (su h) dei determinanti jacobiani (bidimensionali), si può anche scrivere:

$$\frac{\partial\,(q_h,\,p_h)}{\partial\,(u_k,\,v_\ell)} = \frac{\partial q_h}{\partial u_k}\frac{\partial p_h}{\partial v_\ell} - \frac{\partial q_h}{\partial v_\ell}\frac{\partial p_h}{\partial v_k} = \{u_k, v_\ell\}$$

Ma le parentesi di Lagrange sono invarianti canonici, dunque anche gli integrali J_n lo sono.

Trasformazioni infinitesime di contatto

Tra tutte le trasformazioni canoniche sono di particolare interesse quelle infinitesime, che vengono dette *trasformazioni infinitesime di contatto.* L'interesse per questa classe di trasformazioni risiede nel fatto che permettono di stabilire un legame fra la funzione generatrice dalla quale esse nascono e gli integrali primi del moto. Una trasformazione infinitesima delle variabili hamiltoniane differisce di una quantità infinitesima dalla trasformazione identica, per cui la sua funzione generatrice può essere scritta, nella forma F_2, incrementando di una quantità infinitesima quella dell'identità (TC.12):

$$F_2(q_h, P_h) = q_h P_h + \varepsilon\, \phi(q_h, P_h, t) \tag{TC.38}$$

dove il parametro di controllo ε va considerato infinitesimo e la funzione ϕ, che usualmente viene detta *funzione generatrice* in luogo della F_2, è arbitraria, supposta regolare. Dalla (TC.38), tenendo conto delle (TC.7), segue la trasformazione infinitesima di contatto:

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = P_h + \varepsilon\, \frac{\partial \phi}{\partial q_h}, \qquad Q_h = \frac{\partial F_2}{\partial P_h} = q_h + \varepsilon\, \frac{\partial \phi}{\partial P_h} \tag{TC.39}$$

Ovvero, esplicitando le nuove variabili canoniche e a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, possiamo scrivere:

$$Q_h = q_h + \varepsilon\, \frac{\partial \phi}{\partial p_h} + \mathcal{O}(2), \qquad P_h = p_h - \varepsilon\, \frac{\partial \phi}{\partial q_h} \tag{TC.40}$$

Ora, data una funzione f delle variabili canoniche ed eventualmente del tempo, dopo la trasformazione (TC.40) essa risulta espressa, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, dallo sviluppo in serie di Taylor:

$$f(Q_h, P_h, t) = f(q_h, p_h, t) + \frac{\partial f}{\partial q_h}\,(Q_h - q_h) + \frac{\partial f}{\partial p_h}\,(P_h - p_h) + \mathcal{O}(2)$$

dove le derivate si intendono calcolate in (q_h, p_h, t); allora si ottiene, grazie alla (TC.40):

$$f(Q_h, P_h, t) = f(q_h, p_h, t) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial q_h} \frac{\partial \phi}{\partial p_h} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial p_h} \frac{\partial \phi}{\partial q_h} + \mathcal{O}(2)$$

Risultato che si può riscrivere introducendo la parentesi di Poisson:

$$f(Q_h, P_h, t) = f(q_h, p_h, t) + \varepsilon \, [f, \phi] + \mathcal{O}(2) \qquad \text{(TC.41)}$$

Dunque si può concludere che:

• In una trasformazione infinitesima di contatto l'incremento di una funzione delle variabili canoniche e del tempo è proporzionale alla parentesi di Poisson della funzione f con la funzione generatrice ϕ della trasformazione e la costante di proporzionalità è il parametro infinitesimo di controllo ε.

• In particolare la funzione generatrice è invariante rispetto alla trasformazione infinitesima di contatto da essa generata, dal momento che la parentesi di Poisson di una funzione con se stessa è nulla.

Inoltre se la funzione f è l'hamiltoniana la (TC.41) diviene:

$$\mathcal{H}'(Q_h, P_h, t) = \mathcal{H}(q_h, p_h, t) + \varepsilon \, [\mathcal{H}, \phi] + \mathcal{O}(2) \qquad \text{(TC.42)}$$

Ora abbiamo visto che se una funzione è un integrale primo del moto la sua parentesi di Poisson con l'hamiltoniana è nulla; dunque:

• se ϕ è anche integrale primo del moto l'hamiltoniana non è modificata dalla trasformazione infinitesima di contatto di cui ϕ è la funzione generatrice.

Esempi

i) *Traslazione degli assi*

Scegliamo come funzione generatrice della trasformazione infinitesima di contatto la funzione:

$$\phi = p_h a_h \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \phi}{\partial p_h} = a_h, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial q_h} = 0 \tag{TC.43}$$

dove le a_h sono le componenti di un vettore costante nello spazio delle configurazioni. La trasformazione infinitesima di contatto che viene generata, grazie alla (TC.40) è allora:

$$Q_h = q_h + \varepsilon\, a_h, \qquad P_h = p_h \tag{TC.44}$$

Dunque si può concludere che:

• la componente del momento nella direzione di un versore è la funzione generatrice di una traslazione infinitesima di contatto nella direzione del versore.

— In particolare, per un punto materiale libero il cui moto è descritto, nello spazio fisico R^3, in coordinate cartesiane (x_i), i momenti coincidono con le componenti della quantità di moto che sono i generatori delle traslazioni infinitesime lungo gli assi cartesiani dello spazio fisico:

$$X_i = x_i + \varepsilon\, a_i, \qquad P_i = p_i \tag{TC.45}$$

e quindi sono invarianti rispetto a tali traslazioni.

ii) *Rotazione degli assi*

Scegliamo questa volta la funzione generatrice come:

$$\phi = (q_k p_\ell - q_\ell p_k)\, a_k b_\ell \tag{TC.46}$$

dove a_ℓ, b_k sono le componenti di due vettori costanti dello spazio delle configurazioni. Abbiamo in conseguenza:

$$\frac{\partial \phi}{\partial p_h} = -(a_h b_k - b_h a_k)\, q_k$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial q_h} = (a_h b_k - b_h a_k)\, p_k$$

Quindi, tramite la (TC.40) si ha la trasformazione infinitesima di contatto:

$$\begin{aligned} Q_h &= q_h - \varepsilon\,(a_h b_k - b_h a_k)\, q_k + \mathcal{O}(2) \\ P_h &= p_h - \varepsilon\,(a_h b_k - b_h a_k)\, p_k \end{aligned} \tag{TC.47}$$

— in particolare nel caso di un punto materiale, in coordinate cartesiane, si ha:

$$\phi = (x_j p_k - p_j x_k)\, a_j b_k = \varepsilon_{ijk} K_i a_j b_k \tag{TC.48}$$

Introducendo il prodotto vettoriale:

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k = |\boldsymbol{c}|\, n_i \tag{TC.49}$$

dove $\boldsymbol{n} = (n_i)$ è il suo versore, si ha:

$$\phi = K_i c_i = |\boldsymbol{c}|\, \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{c}|\, K_n \tag{TC.50}$$

La funzione generatrice risulta, a meno di un fattore di scala, che possiamo prendere anche uguale all'unità, la componente del momento della quantità di moto lungo $\boldsymbol{n}$. Allora otteniamo la trasformazione infinitesima di contatto:

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - \varepsilon\,(a_i b_j - b_i a_j)\,x_j + \mathcal{O}(2), \\ P_i &= p_i - \varepsilon\,(a_i b_j - b_i a_j)\,p_j \end{aligned} \tag{TC.51}$$

che possiamo esprimere, in termini vettoriali come:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} - \varepsilon\,\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(2) = \boldsymbol{x} - \varepsilon\,\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{c} + \boldsymbol{\mathcal{O}}(2)$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} - \varepsilon\,\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{p} - \varepsilon\,\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{c}$$

Possiamo esprimere i termini infinitesimi come:

$$\varepsilon\,\boldsymbol{c} = \varepsilon\,|\boldsymbol{c}|\,\boldsymbol{n} = d\,\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{n}\,d\vartheta \tag{TC.52}$$

In questo modo la trasformazione diventa:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} + d\,\boldsymbol{\psi} \wedge \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mathcal{O}}(2), \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p} + d\,\boldsymbol{\psi} \wedge \boldsymbol{x} \tag{TC.53}$$

che rappresenta una rotazione (rigida) infinitesima del sistema degli assi cartesiani.

Possiamo quindi concludere che:

• la componente del momento della quantità di moto, rispetto all'origine presa come polo, nella direzione di un versore è la funzione generatrice di una rotazione infinitesima di contatto nella direzione del versore. In particolare le componenti cartesiane del momento della quantità di moto sono le funzioni generatrici delle rotazioni infinitesime intorno agli assi.

iii) *Funzione generatrice del moto*

Consideriamo ora il caso interessante in cui la funzione generatrice della trasformazione infinitesima di contatto è l'hamiltoniana.

$$\phi = \mathcal{H} \tag{TC.54}$$

Si ha subito, come prima conseguenza dalla (TC.40):

$$Q_h = q_h + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} + \mathcal{O}(2), \qquad P_h = p_h - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \tag{TC.55}$$

E tenendo conto delle equazioni di Hamilton (TC.1), si può riscrivere:

$$Q_h = q_h + \varepsilon \, \dot{q}_h + \mathcal{O}(2), \qquad P_h = p_h + \varepsilon \, \dot{p}_h \tag{TC.56}$$

Ora possiamo esprimere con un opportuna scelta della scala dei tempi:

$$\varepsilon = d\,t$$

E quindi ottenere:

$$Q_h = q_h + \dot{q}_h \, d\,t + \mathcal{O}(2), \qquad P_h = p_h + \dot{p}_h \, d\,t \tag{TC.57}$$

Notiamo come gli incrementi rappresentano lo spostamento e l'incremento del momento fisicamente realizzati dal sistema durante il moto. Dunque si può concludere che:

- gli spostamenti compiuti dal sistema durante il moto si possono interpretare come una trasformazione infinitesima di contatto generata dall'hamiltoniana.

Inoltre dalla (TC.41) segue anche che per ogni funzione f:

$$f(Q_h, P_h, t) = f_h(q_h, p_h, t) + \varepsilon\,[f, \mathcal{H}] + \mathcal{O}(2) \tag{TC.58}$$

Se si suppone che f sia anche un integrale primo del moto, ne consegue che la sua parentesi di Poisson con l'hamiltoniana è nulla, e quindi f non è modificata dalla trasformazione generata dall'hamiltoniana. E questo è in accordo con il risultato appena ottenuto, perchè la trasformazione generata dall'hamiltoniana rappresenta lo spostamento compiuto durante il moto e un integrale primo si mantiene costante durante il moto.

Teorema di Liouville

Un altro risultato molto importante è costituito dal *teorema di Liouville* che trova particolare applicazione nell'ambito della meccanica statistica.

> *La misura (ipervolume) di qualunque regione $\mathcal{D}$ dello spazio delle fasi si mantiene costante nel tempo durante il moto dei sistemi meccanici rappresentati dai punti di $\mathcal{D}$*

DIMOSTRAZIONE

Supponiamo che $\mathcal{D}$ sia un dominio rettangolare: il suo ipervolume D è un prodotto di invarianti integrali di Poincaré con $n = 1$, associati ad ogni singolo grado di libertà:

$$D = \int_{\mathcal{D}} d\,C, \qquad d\,C = d\,q_1 d\,p_1 d\,q_2 d\,p_2 \cdots d\,q_N d\,p_N$$

Quindi è un invariante canonico. In particolare possiamo considerare una trasformazione infinitesima di contatto che al valore $q_h(t), p_h(t)$ delle variabili canoniche fa corrispondere il valore incrementato $q_h(t+d\,t), p_h(t+d\,t)$ che le variabili assumono durante il moto, per ciascun punto del dominio $\mathcal{D}$. Anche rispetto a questa trasformazione canonica l'integrale si mantiene invariante; dunque la misura del dominio non varia nel tempo durante il moto. Inoltre ogni dominio si può pensare come limite dell'unione di domini rettangolari; quindi il teorema risulta dimostrato in generale.

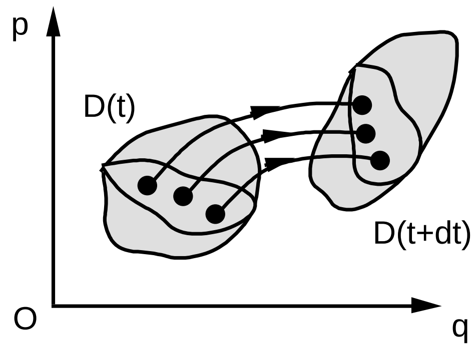

Figura TC. 1: Conservazione del volume nello spazio delle fasi

Teoria di Hamilton-Jacobi

Funzione principale di Hamilton – Equazione di Hamilton-Jacobi

Supponiamo di avere un sistema hamiltoniano ad N gradi di libertà, dotato di 2 N integrali primi del moto tra loro indipendenti:

$$\psi_h(q_k, p_k, t) = \alpha_h, \qquad \chi_h(q_k, p_k, t) = \beta_h \tag{TC.59}$$

dove le costanti α_h, β_h sono legate alle condizioni iniziali del moto:

$$\alpha_h = \psi_h(q_{k0}, p_{k0}, 0), \qquad \beta_h = \chi_h(q_{k0}, p_{k0}, 0) \tag{TC.60}$$

Se gli integrali primi sono indipendenti lo jacobiano:

$$J = \frac{\partial(\psi_h, \chi_k)}{\partial(q_j, p_\ell)} \neq 0 \tag{TC.61}$$

su tutto lo spazio delle fasi. Questo significa che si possono risolvere le (TC.59) rispetto alle variabili q_h, p_h, cioè ottenere l'integrale generale del moto nella forma:

$$\begin{aligned} q_k &= q_k(\psi_h, \chi_h, t) = q_k(\alpha_h, \beta_h, t) \\ p_k &= p_k(\psi_h, \chi_h, t) = p_k(\alpha_h, \beta_h, t) \end{aligned} \tag{TC.62}$$

E quindi ricondurlo in termini delle condizioni iniziali tramite le (TC.60). Osserviamo che le relazioni (TC.59) non costituiscono una situazione eccezionale, come sembrerebbe a prima vista, ma sussistono in ogni problema del moto. Per rendercene conto cominciamo con l'osservare che le relazioni (TC.59) possono essere interpretate anche come una trasformazione canonica nella quale gli integrali primi sono le nuove variabili hamiltoniane; cioè:

$$P_h = \psi_h(q_k, p_k, t) = \alpha_h, \qquad Q_h = \chi_h(q_k, p_k, t) = \beta_h \tag{TC.63}$$

E di conseguenza, durante il moto si avrebbe, per le nuove variabili canoniche:

$$\dot{Q}_h = 0, \qquad \dot{P}_h = 0 \tag{TC.64}$$

con la conseguenza, nelle equazioni di Hamilton:

$$\dot{Q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_h} = 0, \qquad \dot{P}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_h} = 0$$

Quindi la nuova hamiltoniana $\mathcal{H}'$ non deve dipendere dalle variabili canoniche, ma al più è una funzione solo del tempo. Quindi il legame tra le hamiltoniane è dato da:

$$\mathcal{H}'(t) = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Ora, giocando sulla scelta della funzione generatrice F, tra tutte le hamiltoniane $\mathcal{H}'$ possiamo scegliere la più semplice che è quella nulla. Con questa scelta rimane identificata l'equazione differenziale per la funzione generatrice F:

$$\mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{TC.65}$$

A questo punto conviene scegliere la funzione generatrice nella forma $F_2(q_h, P_h, t)$, da cui si ricava, grazie alla (TC.7):

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} \tag{TC.66}$$

E quindi nella (TC.65) segue:

$$\mathcal{H}\left(q_h, \frac{\partial F_2}{\partial q_h}\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \tag{TC.67}$$

Questa è un'equazione alle derivate parziali per la funzione generatrice incognita F_2. Si noti che F_2 è funzione solo delle q_h e del tempo grazie al fatto che le P_h sono degli integrali primi del moto, per cui durante il moto si ha:

$$F_2(q_h, P_h, t) = F_2(q_h, \alpha_h, t)$$

La funzione generatrice F_2 solitamente si indica con S e quindi l'equazione (TC.67) si scrive usualmente come:

$$\boxed{\mathcal{H}\left(q_h, \frac{\partial S}{\partial q_h}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \tag{TC.68}$$

ed è nota come *equazione di Hamilton-Jacobi.* La risoluzione di questa equazione alle derivate parziali è equivalente alla risoluzione del problema del moto, in quanto, una volta nota la funzione generatrice S, grazie alle (TC.7) si ottengono:

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h}(q_k, \alpha_k, t) \tag{TC.69}$$

$$Q_h = \frac{\partial S}{\partial P_h}(q_k, \alpha_k, t) = \beta_h \tag{TC.70}$$

Il problema del moto si può considerare risolto quando nella (TC.70) si possono esplicitare le q_k. D'altra parte questo è assicurato dalla canonicità della trasformazione.

Ai fini della risoluzione del moto è sufficiente conoscere la più generale soluzione che si ottiene fissando i nuovi momenti P_h ai loro valori costanti durante il moto α_h, e cioè quello che si chiama un *integrale completo* dell'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$S = S(q_h, \alpha_h, t) + S_0(\alpha_h)$$

Si noti come l'integrale completo non coincida con l'integrale generale che ha la forma:

$$S = S(q_h, P_h, t, c_h) + S_0(P_h, c_h) + c_0$$

Per quanto riguarda l'integrale completo, la funzione S, come abbiamo già osservato, durante il moto risulta essere funzione solo delle q_h e del tempo, per cui la sua derivata totale rispetto al tempo vale:

$$\frac{d\,S}{d\,t}(q_h(t), t) = \frac{\partial S}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial S}{\partial t}$$

Ma dalla (TC.69) e (TC.68) segue:

$$\frac{d\,S}{d\,t}(q_h(t), t) = p_h \dot{q}_h - \mathcal{H} = \mathcal{L}$$

Dunque, durante il moto si ha:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mathcal{L}(q_h(\hat{t}), \dot{q}_h(\hat{t}), \hat{t})\, d\,\hat{t} \qquad \text{(TC.71)}$$

Questa funzione prende il nome di *funzione principale di Hamilton.* Notiamo come questo risultato non sia utile operativamente ai fini della determinazione del moto in quanto per il calcolo della funzione integrale occorre conoscere le funzioni $q_h(t)$. Tuttavia esso è utile a mostrare l'uguaglianza tra il valore assunto dalla funzione principale di Hamilton e il valore assunto dall'integrale d'azione sulla traiettoria del moto nell'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante iniziale e l'istante generico t.

• Osserviamo ancora come, adottando il formalismo dello spazio degli eventi, possiamo interpretare l'hamiltoniana come il momento $p_0 = -\mathcal{H}$ associato alla coordinata temporale $q_0 = t$. Allora la funzione principale di Hamilton genera anche una trasformazione di $q_0,\, p_0$ nelle nuove coordinate costanti $Q_0 = \beta_0,\; P_0 = -\mathcal{H}'$ e si ha:

$$p_0 = \frac{\partial S}{\partial q_0}, \qquad Q_0 = \frac{\partial S}{\partial P_0} \tag{TC.72}$$

La prima di queste relazioni non è altro che la (TC.65) e la seconda trasforma il tempo in una costante.

Funzione caratteristica di Hamilton

In generale l'equazione di Hamilton-Jacobi è difficilmente integrabile, tuttavia esistono condizioni che rendono possibile l'integrazione grazie alla struttura particolare dell'hamiltoniana e della funzione principale di Hamilton.

Cominciamo a considerare il caso in cui l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo. In questo caso l'equazione di Hamilton-Jacobi si riscrive nella forma:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}\left(q_h, \frac{\partial S}{\partial q_h}\right) = 0 \tag{TC.73}$$

che si integra subito rispetto al tempo dal momento che $\mathcal{H}$ è un integrale primo del moto, ottenendo l'integrale completo:

$$S(q_h, \alpha_h, t) = S^{(0)}(q_h, \alpha_h) + \gamma_0\, t \tag{TC.74}$$

dove:

$$\gamma_0 = -\mathcal{H}\left(q_h, \frac{\partial S}{\partial q_h}\right) \tag{TC.75}$$

Ricordiamo, poi, che quando i vincoli del sistema olonomo sono indipendenti dal tempo e il potenziale è ordinario l'hamiltoniana coincide con l'integrale primo dell'energia, per cui in tale caso $\gamma_0 = -E$. Ora, grazie alla (TC.74), derivando rispetto alla coordinate canoniche si ha:

$$p_h = \frac{\partial S}{\partial q_h} = \frac{\partial S^{(0)}}{\partial q_h} \tag{TC.76}$$

E quindi la (TC.75) diviene:

$$H\left(q_h, \frac{\partial S^{(0)}}{\partial q_h}\right) = -\gamma_0 \tag{TC.77}$$

Abbiamo così un'equazione differenziale indipendente dal tempo per la funzione $S^{(0)}$ che prende il nome di *funzione caratteristica di Hamilton.*

• Dunque, la presenza dell'integrale primo dell'hamiltoniana (energia generalizzata) ci ha consentito, come già altre volte nei problemi di meccanica, di separare la variabile tempo, isolando la parte geometrica del problema rispetto a quella evolutiva.

• Quando si fa uso della funzione caratteristica di Hamilton risulta naturalmente dall'integrazione la costane γ_0 che è uguale al momento P_0 associato alla coordinata costante Q_0 dello spazio degli eventi. Vedremo l'utilità di questa osservazione negli esempi.

Coordinate cicliche

Un risultato analogo a quello appena trovato si ottiene nel caso che l'hamiltoniana possieda una coordinata ciclica, che identificheremo ad esempio con q_1. In questo caso le equazioni di Hamilton, come sappiamo, comportano che il momento canonico p_1 è un integrale primo del moto:

$$p_1 = \gamma_1$$

con γ_1 costante. E quindi dalla (TC.69) abbiamo:

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = \gamma_1$$

Da cui:

$$S(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = S^{(1)}(q_2, \cdots, q_N, t) + \gamma_1 \, q_1 \tag{TC.78}$$

Il procedimento si può iterare nel caso in cui esistano $M \leq N$ coordinate cicliche, ottenendo:

$$S(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = S^{(M)}(q_M, \cdots, q_N, t) + \sum_{k=1}^{M} \gamma_k \, q_k \tag{TC.79}$$

Nel caso in cui l'hamiltoniana risultasse anche indipendente dal tempo si avrebbe:

$$S(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = S^{(M)}(q_M, \cdots, q_N, t) + \sum_{k=0}^{M} \gamma_k \, q_k \tag{TC.80}$$

Nel formalismo dello spazio degli eventi si potrebbe allora interpretare il tempo come una coordinata $q_0 = t$ che è ciclica, il cui momento canonico $p_0 = -\mathcal{H}$ è quindi un integrale primo.

Separazione delle variabili

Il metodo di separazione delle variabili si può applicare quando l'hamiltoniana è indipendente dal tempo (per cui è un integrale primo del moto) e si presenta nella forma:

$$\mathcal{H}(q_h, p_h) = \mathcal{H}(f_1(q_1, p_1), f_2(q_2, p_2), \cdots, f_N(q_N, p_N))$$

Affinchè l'hamiltoniana sia un integrale primo del moto, allora, occorre e basta che ciascuno degli argomenti f_h da cui dipende siano a loro volta degli integrali primi, e quindi, che sussistano le N equazioni differenziali:

$$f_1\left(q_1, \frac{\partial S^{(0)}}{\partial q_1}\right) = \kappa_1, \qquad f_2\left(q_2, \frac{\partial S^{(0)}}{\partial q_2}\right) = \kappa_2, \cdots, f_N\left(q_N, \frac{\partial S^{(0)}}{\partial q_N}\right) = \kappa_N$$

dove le κ_h sono costanti. Supposto che in ciascuna di queste equazioni si possa esplicitare la derivata rispetto alla rispettiva q_h, ottenendo delle equazioni nella forma:

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial q_1} = g_1(q_1, \kappa_1), \qquad \frac{\partial S^{(0)}}{\partial q_2} = g_2(q_2, \kappa_2), \cdots, \qquad \frac{\partial S^{(0)}}{\partial q_N} = g_N(q_N, \kappa_N),$$

l'integrale completo per la funzione caratteristica di Hamilton risulta espresso da:

$$S^{(0)} = \int_{q_{10}}^{q_1} g_1(\xi_1, \kappa_1)\, d\,\xi_1 + \int_{q_{20}}^{q_2} g_2(\xi_2, \kappa_2)\, d\,\xi_2 + \cdots + \int_{q_{N0}}^{q_N} g_N(\xi_N, \kappa_N)\, d\,\xi_N$$

Esempi

Consideriamo ora due esempi di integrazione del moto con il metodo di Hamilton-Jacobi.

i) *Oscillatore armonico*

Il primo esempio è quello dell'oscillatore armonico semplice che è un sistema ad un solo grado di libertà q associato al momento canonico p che rappresenta la quantità di moto del punto oscillante. L'hamiltoniana si scrive immediatamente e ha la forma ben nota:

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 q^2 \tag{TC.81}$$

che è indipendente dal tempo e rappresenta l'integrale primo dell'energia. L'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione principale di Hamilton S si scrive:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} = 0 \tag{TC.82}$$

che diviene:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\,m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 q^2 = 0 \tag{TC.83}$$

Dal momento che l'hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, possiamo separare quest'ultima variabile mediante la sostituzione:

$$S = S^{(0)} + \gamma_0\,t = S^{(0)} - E\,t \tag{TC.84}$$

Otteniamo l'equazione per la funzione caratteristica di Hamilton $S^{(0)}$:

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\partial S^{(0)}}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 q^2 = E \tag{TC.85}$$

Quest'ultima è già un'equazione a variabili separabili dal momento che abbiamo un solo grado di libertà e può essere risolta rispetto alla derivata di $S^{(0)}$:

$$\frac{\partial S^{(0)}}{\partial q} = \pm m\,\omega\sqrt{\frac{2\,E}{m\,\omega^2} - q^2} \tag{TC.86}$$

Integrando abbiamo:

$$S^{(0)} = \pm m\,\omega \int_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{2\,E}{m\,\omega^2} - \hat{q}^2}\, d\,\hat{q} \tag{TC.87}$$

E quindi:

$$S = \pm m\,\omega \int_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{2\,E}{m\,\omega^2} - \hat{q}^2}\, d\,\hat{q} - E\,t \tag{TC.88}$$

Tenendo conto che $P_0 = -E$, possiamo ricavare:

$$Q_0 \equiv \beta = \frac{\partial S}{\partial P_0} = \pm\frac{1}{\omega} \int_{q_0}^{q} \frac{d\,\hat{q}}{\sqrt{\frac{2\,E}{m\,\omega^2} - \hat{q}^2)}}\, d\,\hat{q} + t$$

Di qui si ottiene direttamente:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\,E}{m\,\omega^2}}\, cos\,(\omega\,t - \beta)$$

ii) *moto di un punto materiale in un campo centrale conservativo*

Il secondo esempio che esaminiamo è dato dal moto piano che avviene in un campo di forze centrali conservativo di potenziale $U(r)$. Le variabili sono separabili se si lavora in coordinate polari nel piano del moto: il sistema ha due gradi di libertà $q_1 = \vartheta$, $q_2 = r$. L'hamiltoniana, che è indipendente dal tempo, si scrive:

$$\mathcal{H}(r, p_r, p_\vartheta) = \frac{1}{2\,m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2}\right) - U(r) = E \tag{TC.89}$$

Di conseguenza la coordinata ϑ è ciclica e quindi il momento della quantità di moto p_ϑ, ad essa coniugato, è un integrale primo del moto.

Essendoci una coordinata ciclica, grazie alla (TC.78) la funzione caratteristica di Hamilton si può scrivere:

$$S^{(0)} = S^{(1)}(r) + \alpha_1 \vartheta \tag{TC.90}$$

Allora l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione $S^{(1)}$ diventa:

$$\frac{1}{2\,m}\left[\left(\frac{\partial S^{(1)}}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{r^2}\right] - U(r) = E \tag{TC.91}$$

L'equazione è a variabili separabili e si può isolare la derivata:

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial r} = \pm\sqrt{2\,m\,[E + U(r)] - \frac{\alpha_1^2}{r^2}}$$

Da cui si ricava:

$$S^{(0)} = \pm\int_{r_0}^{r} \sqrt{2\,m\,[E + U(\hat{r})] - \frac{\alpha_1^2}{\hat{r}^2}}\, d\,\hat{r} + \alpha_1 \vartheta \tag{TC.92}$$

E quindi per la (TC.74) si ha la funzione principale di Hamilton:

$$S = \pm\int_{r_0}^{r} \sqrt{2\,m\,[E + U(\hat{r})] - \frac{\alpha_1^2}{\hat{r}^2}}\, d\,\hat{r} + \alpha_1 \vartheta - E\,t \tag{TC.93}$$

Derivando rispetto al parametro $P_1 = \alpha_1$ otteniamo l'equazione della traiettoria in coordinate polari:

$$Q_1 \equiv \beta_1 = \mp\int_{r_0}^{r} \frac{\alpha_1}{r^2\sqrt{2\,m\,[E + U(\hat{r})] - \frac{\alpha_1^2}{\hat{r}^2}}}\, d\,\hat{r} + \vartheta \tag{TC.94}$$

Mentre derivando rispetto a $P_0 = -E$ si ottiene l'equazione oraria per la variabile r:

$$Q_0 \equiv \beta_0 = \mp \int_{r_0}^{r} \frac{m}{\sqrt{2\,m\,[E + U(\hat{r})] - \frac{\alpha_1^2}{\hat{r}^2}}}\, d\,\hat{r} + t \tag{TC.95}$$