

MECCANICA DEI CONTINUI



MC. Meccanica dei continui deformabili

Cinematica

Un sistema di punti materiali in numero sufficientemente elevato da non essere macroscopicamente distinguibili l'uno dall'altro, per rapporto ai mezzi strumentali che si impiegano o all'interesse dell'indagine che si conduce, può essere, in molti casi, descritto adeguatamente come una distribuzione di punti che ha la potenza del continuo. In questo caso se non si sottomette il sistema al vincolo di rigidità, si ha un sistema *continuo deformabile*.

La descrizione cinematica del continuo si può realizzare assegnando, istante per istante, le coordinate dei suoi punti in funzione di una variabile di evoluzione che, solitamente, è il tempo t . Si distinguono allora una *configurazione di riferimento*, che descrive il continuo per un valore fissato di t (generalmente l'istante iniziale $t = 0$) e una *configurazione attuale*, corrispondente al valore *attuale* t del tempo.

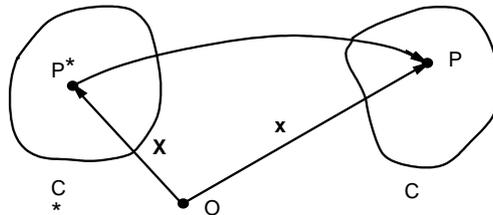


Figura MC. 1: configurazione di riferimento e configurazione attuale

Scelta un'origine O si possono identificare i punti della configurazione di riferimento C^* , mediante il loro vettore posizione:

$$\mathbf{X} = OP^*$$

e i punti della configurazione attuale C mediante i corrispondenti vettori posizione:

$$\mathbf{x} = OP(t)$$

Le variabili *attuali* \mathbf{x} verranno a dipendere sia dal punto P considerato, che mantiene durante il moto la sua individualità fisica, sia dall'istante considerato. Dunque si può scrivere:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \tag{MC.1}$$

Punto di vista lagrangiano

Se si considera un punto particolare del continuo, cioè si fissa un valore $\hat{\mathbf{X}}$, allora la:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\hat{\mathbf{X}}, t)$$

rappresenta una curva nello spazio, che è la *traiettoria* del punto $\hat{\mathbf{X}}$. Al variare di $\hat{\mathbf{X}}$ si ha la famiglia di tutte le traiettorie dei punti del continuo. Stiamo descrivendo l'evoluzione del continuo dal *punto di vista lagrangiano*.

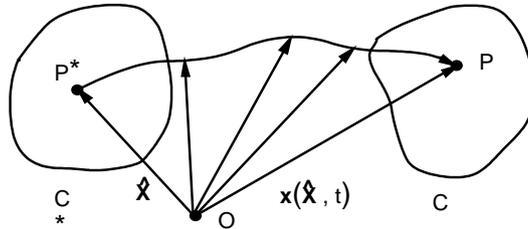


Figura MC. 2: punto di vista lagrangiano

Punto di vista euleriano

Se invece fissiamo l'istante di tempo a un valore assegnato \hat{t} , la funzione:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, \hat{t})$$

rappresenta una legge di corrispondenza geometrica tra i punti della configurazione di riferimento e quelli della configurazione attuale. Stiamo adottando il *punto di vista euleriano*, dal momento che assegnamo la *legge di distribuzione* dei punti del continuo nella configurazione attuale, corrispondenti ai punti della configurazione di riferimento, assunta come uno spazio di controllo.

- La condizione che garantisce che i punti mantengano la propria individualità si traduce nella richiesta che la legge di trasformazione che permette di passare dalla configurazione di riferimento alla configurazione attuale sia biunivoca.

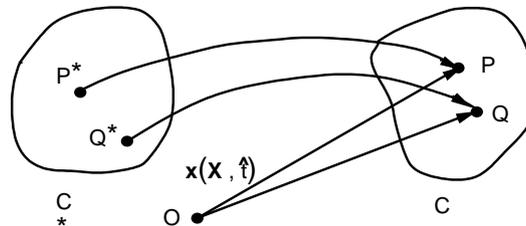


Figura MC. 3: punto di vista euleriano

Deformazione

Adottando il punto di vista euleriano possiamo mettere in evidenza i mutamenti geometrici intercorsi nel passaggio dalla configurazione di riferimento alla configurazione attuale. In particolare se è possibile trovare un operatore di rotazione propria \underline{R} tale che:

$$\mathbf{x} = \underline{R} \mathbf{X} \quad (\text{MC.2})$$

diremo che il corpo ha compiuto una rotazione rigida; in caso contrario diremo che esso ha subito una *deformazione*. In quest'ultimo caso la legge:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (\text{MC.3})$$

sarà la *legge di deformazione globale* del corpo. Omettiamo la variabile t che dal punto di vista euleriano è fissata. Facendo l'ipotesi che tale legge sia rappresentata mediante una funzione differenziabile e passando ai differenziali, otteniamo la *legge di deformazione locale*:

$$d\mathbf{x} = \underline{F} d\mathbf{X} \quad (\text{MC.4})$$

La matrice $\underline{\underline{F}}$ che rappresenta la matrice jacobiana della trasformazione prende il nome di *gradiente di deformazione*. Si usa anche la notazione equivalente:

$$dP = \underline{\underline{F}} dP^* \quad (\text{MC.5})$$

Poichè la legge di deformazione, in forma globale, è supposta biunivoca, segue che la matrice $\underline{\underline{F}}$ è non singolare:

$$\det(\underline{\underline{F}}) \neq 0 \quad (\text{MC.6})$$

Infatti, scelti due punti vicini $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ in C^* segue che:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \underline{\underline{F}} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + \mathcal{O}(2)$$

Dovendo essere:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = 0 \quad \iff \quad \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = 0$$

si ha, trascurando gli infinitesimi del secondo ordine, che:

$$\underline{\underline{F}} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = 0 \quad \iff \quad \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = 0$$

Quindi $\underline{\underline{F}}$ non può avere autovettori corrispondenti ad autovalori nulli, e dunque non può avere determinante nullo.

La deformazione del corpo viene caratterizzata dalla violazione della condizione di rigidità, cioè, in termini locali, dal legame tra $|dP^*|^2$ e $|dP|^2$. Abbiamo:

$$|dP|^2 = \underline{\underline{F}} dP^* \times \underline{\underline{F}} dP^* = dP^* \times \left(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} dP^* \right)$$

Matrice di deformazione di Green

Risulta naturale allora introdurre la *matrice di deformazione di Green*:

$$\underline{B} = \underline{F}^T \underline{F} \quad (\text{MC.7})$$

dalla quale effettivamente dipende la deformazione, e riscrivere:

$$|dP|^2 = dP^* \times \underline{B} dP^* \quad (\text{MC.8})$$

La matrice \underline{B} è evidentemente non singolare, in quanto \underline{F} è non singolare, e gode delle seguenti due proprietà:

i) è *simmetrica*. Infatti:

$$\underline{B}^T = \left(\underline{F}^T \underline{F} \right)^T = \underline{F}^T \underline{F} = \underline{B}$$

ii) è *definita positiva*. Infatti si ha:

$$\mathbf{v} \times \underline{B} \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \underline{F}^T \underline{F} \mathbf{v} = \underline{F} \mathbf{v} \times \underline{F} \mathbf{v} = |\underline{F} \mathbf{v}|^2 > 0, \quad \forall \mathbf{v} \neq 0$$

Osserviamo che se $\underline{B} = \underline{I}$ si ha la condizione di rigidità:

$$|dP|^2 = |dP^*|^2$$

cioè non c'è deformazione. Questa condizione si traduce, per il gradiente di deformazione, nella condizione:

$$\underline{F}^T \underline{F} = \underline{I} \quad \implies \quad \det(\underline{F}) = \pm 1$$

Ovvero la matrice \tilde{F} deve essere unitaria (ortogonale). Se il determinante vale $+1$ la matrice rappresenta una rotazione propria; se vale -1 la rotazione viene ad essere composta con una inversione spaziale. Dunque le matrici di rotazione sono quelle che realizzano gli *spostamenti rigidi* del continuo.

• Ricordiamo che ogni matrice \tilde{F} non singolare si può rappresentare nella forma *polare*, cioè come prodotto di una matrice di rotazione e di una matrice simmetrica e definita positiva $\tilde{F} = \tilde{R} \tilde{A}$, dove $\tilde{A}^2 = \tilde{F}^T \tilde{F}$. Allora la matrice di deformazione di Green descrive l'effettiva parte di deformazione del gradiente di deformazione, l'altra parte essendo una rotazione rigida del corpo.

Matrice di deformazione di Cauchy

Si introduce anche la *matrice di deformazione di Cauchy*:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\tilde{B} - \tilde{I}) \quad (\text{MC.9})$$

Questa matrice è *simmetrica*, ma non è definita positiva. Si ha allora la seguente scrittura per la legge di deformazione locale:

$$|dP|^2 = |dP^*|^2 + 2 dP^* \times \tilde{\varepsilon} dP^* \quad (\text{MC.10})$$

L'introduzione di questa matrice permette di separare il contributo dovuto alla deformazione come addendo rispetto al contributo dovuto alla rotazione rigida del continuo.

Scelta delle basi di riferimento: rappresentazione indiciale

Le equazioni espresse in forma assoluta possono essere opportunamente proiettate, scegliendo le basi degli spazi ai quali riferire i vettori e gli operatori. E' opportuno considerare come distinti gli spazi della

configurazione di riferimento e della configurazione attuale, scegliendo le basi per ciascuno di essi. Abitualmente si denota con $\{e_i\}$ la base dello spazio della configurazione attuale e con $\{e_I\}$ la base dello spazio della configurazione di riferimento. Si ha allora, se le basi sono ortonormali:

$$e_i \times e_k = \delta_{ik}, \quad e_I \times e_K = \delta_{IK} \quad (\text{MC.11})$$

Si assume come regola che gli indici minuscoli si riferiscono alle componenti relative alla base dello spazio della configurazione attuale, e le lettere maiuscole si riferiscono alle componenti relative alla base dello spazio della configurazione di riferimento. Le grandezze dotate di indici maiuscoli prendono il nome di variabili *lagrangiane*, mentre quelle dotate di indici minuscoli prendono il nome di variabili *euleriane*. Grandezze a più indici possono presentarsi anche in forma mista lagrangiana ed euleriana, quando possiedono indici maiuscoli e minuscoli.

Scelte le basi nello spazio possiamo rappresentare il gradiente di deformazione \underline{F} . Abbiamo la rappresentazione indiciale della (MC.5):

$$dx_i = F_{iK} dX_K$$

Ma:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} dX_K$$

Quindi risulta:

$$F_{iK} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \quad (\text{MC.12})$$

Si ha allora anche la rappresentazione relativa della matrice di deformazione di Green:

$$B_{IK} = F_{Ij}^T F_{jK} = F_{jI} F_{jK} \quad (\text{MC.13})$$

Notiamo come la matrice di deformazione sia lagrangiana, mentre il gradiente di deformazione presenta una forma mista, in quanto lega le due rappresentazioni.

Per la matrice di deformazione di Cauchy si ha:

$$\varepsilon_{IK} = \frac{1}{2} (B_{IK} - \delta_{IK}) \quad (\text{MC.14})$$

Coefficiente di dilatazione lineare

Consideriamo un vettore dP^* , di versore \mathbf{u}^* , nella configurazione di riferimento C^* e il corrispondente vettore dP nella configurazione attuale C . Si definisce *coefficiente di dilatazione lineare* nella direzione \mathbf{u}^* la quantità adimensionale:

$$\delta_{\mathbf{u}^*} = \frac{d\ell}{d\ell^*} - 1 \quad (\text{MC.15})$$

dove:

$$d\ell = |dP|, \quad d\ell^* = |dP^*|$$

Tenendo presente la (MC.8) si ha:

$$d\ell = \sqrt{\mathbf{u}^* \times \underline{\mathcal{B}} \mathbf{u}^*} d\ell^*$$

E quindi segue l'espressione del coefficiente di dilatazione lineare:

$$\delta \mathbf{u}^* = \sqrt{\mathbf{u}^* \times \underline{\underline{B}} \mathbf{u}^*} - 1 \quad (\text{MC.16})$$

Notiamo che la radice è sempre definita in quanto la matrice $\underline{\underline{B}}$ è definita positiva.

In termini della matrice di deformazione di Cauchy si ha poi:

$$\delta \mathbf{u}^* = \sqrt{1 + 2 \mathbf{u}^* \times \underline{\underline{\varepsilon}} \mathbf{u}^*} - 1 \quad (\text{MC.17})$$

Il coefficiente di dilatazione lineare dipende generalmente dalla scelta del versore \mathbf{u}^* . In particolare la scelta di \mathbf{u}^* coincidente con uno dei versori degli assi cartesiani fornisce i tre coefficienti:

$$\delta_1 = \sqrt{B_{11}} - 1, \quad \delta_2 = \sqrt{B_{22}} - 1, \quad \delta_3 = \sqrt{B_{33}} - 1$$

Questo risultato permette di interpretare il significato degli elementi della diagonale principale della matrice di deformazione di Green, in quanto legati ai coefficienti di dilatazione lineare in direzione degli assi:

$$B_{11} = (1 + \delta_1)^2, \quad B_{22} = (1 + \delta_2)^2, \quad B_{33} = (1 + \delta_3)^2$$

Se i tre coefficienti sono uguali si ha una dilatazione lineare isotropa; se solo due coefficienti sono uguali l'isotropia è limitata al piano dei versori degli assi corrispondenti.

Per la matrice di Cauchy si ha poi:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} [(1 + \delta_1)^2 - 1] = \delta_1 + \frac{1}{2} \delta_1^2$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} [(1 + \delta_2)^2 - 1] = \delta_2 + \frac{1}{2} \delta_2^2$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} [(1 + \delta_3)^2 - 1] = \delta_3 + \frac{1}{2} \delta_3^2$$

• Notiamo che per piccole deformazioni (teoria linearizzata), trascurando i termini quadratici, i coefficienti di dilatazione lineare coincidono con gli elementi della diagonale principale della matrice di deformazione di Cauchy.

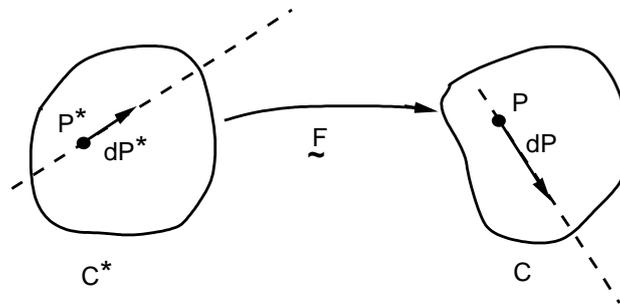


Figura MC. 4: dilatazione lineare

Deformazione angolare

La *deformazione angolare* di un continuo viene caratterizzata considerando l'angolo fra due vettori dP^* e dP'^* , di versori rispettivi \mathbf{u}^* e \mathbf{u}'^* , prima e dopo la deformazione.

Si ha allora:

$$dP \times dP' = \underline{F} dP^* \times \underline{F} dP'^* = dP^* \times \underline{B} dP'^* = |dP^*| |dP'^*| \mathbf{u}^* \times \underline{B} \mathbf{u}'^*$$

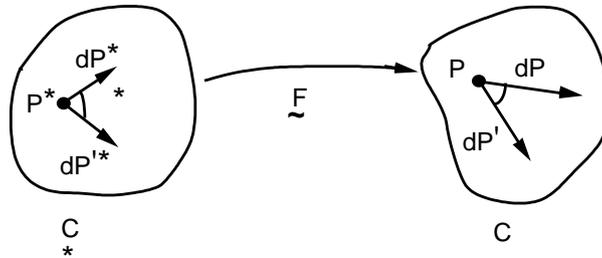


Figura MC. 5: deformazione angolare

Ma grazie ai risultati precedenti:

$$dP \times dP' = |dP| |dP'| \cos \vartheta = |dP^*| |dP'^*| \sqrt{\mathbf{u}^* \times \underline{\underline{B}} \mathbf{u}^*} \sqrt{\mathbf{u}'^* \times \underline{\underline{B}} \mathbf{u}'^*} \cos \vartheta$$

Di conseguenza rimane determinato il coseno dell'angolo tra i vettori dopo la deformazione:

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{u}^* \times \underline{\underline{B}} \mathbf{u}'^*}{\sqrt{\mathbf{u}^* \times \underline{\underline{B}} \mathbf{u}^*} \sqrt{\mathbf{u}'^* \times \underline{\underline{B}} \mathbf{u}'^*}} \quad (\text{MC.18})$$

che si può riscrivere, mediante i coefficienti di dilatazione lineare, nella forma più semplice:

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{u}^* \times \underline{\underline{B}} \mathbf{u}'^*}{(1 + \delta \mathbf{u}^*)(1 + \delta \mathbf{u}'^*)} \quad (\text{MC.19})$$

L'introduzione della matrice $\underline{\underline{\varepsilon}}$ consente di far comparire $\cos \vartheta^*$, ottenendo una relazione che lega direttamente gli angoli nelle due configurazioni:

$$\cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta^* + 2 \mathbf{u}^* \times \underline{\varepsilon} \mathbf{u}'^*}{(1 + \delta_{\mathbf{u}^*})(1 + \delta_{\mathbf{u}'^*})} \quad (\text{MC.20})$$

Si nota che se i due versori coincidono non c'è deformazione angolare, in quanto i versori sovrapposti prima della deformazione rimangono tali anche dopo la deformazione.

Se si scelgono i versori degli assi e_I si ottengono i seguenti risultati:

$$\cos \vartheta_{IK} = \frac{B_{IK}}{(1 + \delta_I)(1 + \delta_K)}$$

$$\cos \vartheta_{IK} = \frac{\delta_{IK} + 2\varepsilon_{IK}}{(1 + \delta_I)(1 + \delta_K)}$$

essendo δ_I i coefficienti di dilatazione lineare relativi ai versori degli assi cartesiani e non essendoci somma sugli indici. Solo se $I \neq K$ si ha deformazione angolare; dunque gli elementi che non appartengono alla diagonale principale delle matrici \underline{B} e $\underline{\varepsilon}$ sono responsabili della deformazione angolare:

$$B_{IK} = (1 + \delta_I)(1 + \delta_K) \cos \vartheta_{IK}$$

$$\varepsilon_{IK} = \frac{1}{2} B_{IK}, \quad I \neq K$$

Le direzioni degli autovettori della matrice \underline{B} , che sono anche autovettori della matrice $\underline{\varepsilon}$, si dicono *direzioni principali di deformazione*. Se le matrici di deformazione si presentano in forma diagonale i versori degli assi, essendo autovettori, rimangono inalterati dopo la deformazione e non si ha deformazione angolare relativamente alle loro direzioni.

Coefficiente di dilatazione superficiale

L'analisi della deformazione di un elemento di superficie si può realizzare considerando la trasformazione di un elemento $d\sigma^*$ di C^* legato al prodotto vettoriale di due vettori dP^* e dP'^* aventi origine comune in un punto P^* del continuo.

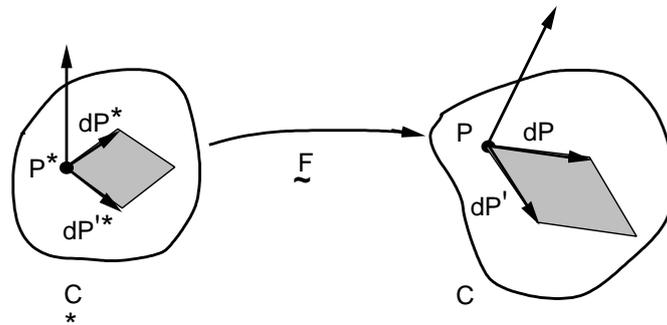


Figura MC. 6: dilatazione superficiale

Si può allora scrivere:

$$dP^* \wedge dP'^* = \mathbf{n}^* d\sigma^*, \quad dP \wedge dP' = \mathbf{N} d\sigma$$

essendo \mathbf{n}^* , \mathbf{N} i versori normali ai parallelogrammi dei vettori in C^* e in C .

Si definisce *coefficiente di dilatazione superficiale* la quantità adimensionale:

$$\delta_\sigma = \left| \frac{d\sigma}{d\sigma^*} \right| - 1 \tag{MC.21}$$

Ora dall'algebra delle matrici sappiamo che:

$$\underline{A} \mathbf{a} \wedge \underline{A} \mathbf{b} = \underline{A}^C (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

Quindi:

$$dP \wedge dP' = \underline{F} dP^* \wedge \underline{F} dP'^* = \underline{F}^C (dP^* \wedge dP'^*)$$

Segue allora:

$$\mathbf{N} d\sigma = \underline{F}^C \mathbf{n}^* d\sigma^*$$

Notiamo che \mathbf{N} differisce normalmente da $\mathbf{n} = \underline{F} \mathbf{n}^*$.

Possiamo eliminare \mathbf{N} e risolvere per $d\sigma$ elevando al quadrato entrambi i membri della relazione appena ottenuta, tenendo conto che \mathbf{N} è un versore. Abbiamo in tal modo:

$$(d\sigma)^2 = (d\sigma^*)^2 \underline{F}^C \mathbf{n}^* \times \underline{F}^C \mathbf{n}^* = (d\sigma^*)^2 \mathbf{n}^* \times \left(\underline{F}^C \right)^T \underline{F}^C \mathbf{n}^*$$

Ora:

$$\left(\underline{F}^C \right)^T = \det(\underline{F}) \underline{F}^{-1}$$

Per cui si ha:

$$\left(\underline{F}^C \right)^T \underline{F}^C = [\det(\underline{F})]^2 \underline{F}^{-1} \left(\underline{F}^{-1} \right)^T = \underline{B}^{-1}$$

In conclusione:

$$(d\sigma)^2 = (d\sigma^*)^2 [\det(\underline{F})]^2 \mathbf{n}^* \times \underline{B}^{-1} \mathbf{n}^*$$

Da cui, tenendo conto delle relazioni tra i determinanti:

$$|d\sigma| = |d\sigma^*| \sqrt{\det(\underline{B}) \mathbf{n}^* \times \underline{B}^{-1} \mathbf{n}^*} \quad (\text{MC.22})$$

Si ha allora il coefficiente di dilatazione superficiale:

$$\delta_\sigma = \sqrt{\det(\underline{B}) \mathbf{n}^* \times \underline{B}^{-1} \mathbf{n}^*} - 1 \quad (\text{MC.23})$$

Si noti, come anche in questo caso non compare direttamente la matrice \underline{F} , ma la matrice \underline{B} che contiene le sole informazioni sulla deformazione e non è influenzata dalle eventuali rotazioni rigide.

Coefficiente di dilatazione cubica

Le deformazioni dei volumi sono le più semplici da ottenere, in quanto sappiamo che gli elementi di volume centrati in P, P^* si trasformano secondo la legge:

$$dC = \det(\underline{F}) dC^*$$

Di conseguenza il *coefficiente di dilatazione cubica* definito come:

$$\delta_c = \left| \frac{dC}{dC^*} \right| - 1 \quad (\text{MC.24})$$

è dato semplicemente da:

$$\delta_c = |\det(\underline{F})| - 1 \quad (\text{MC.25})$$

• Notiamo che $\delta_c = 0$ non solo per i corpi rigidi, ma più in generale per i continui per i quali $|\det(\underline{F})| = 1$, condizione molto più debole della unitarietà della matrice. Tali continui si dicono *incomprimibili*.

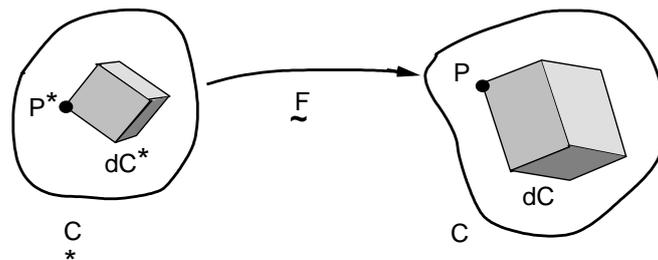


Figura MC. 7: dilatazione cubica

Problema inverso

Finora ci siamo preoccupati di ottenere informazioni sulla configurazione attuale di un continuo supponendo di conoscere la configurazione di riferimento (*problema diretto*). Ci chiediamo ora come si può ottenere la configurazione di riferimento quando sia nota la configurazione attuale (*problema inverso*).

Nel problema diretto tutte le deformazioni dipendono dalla matrice $\underline{B} = \underline{F}^T \underline{F}$. Ci chiediamo ora da quale matrice di deformazione dipendono le deformazioni nel problema inverso.

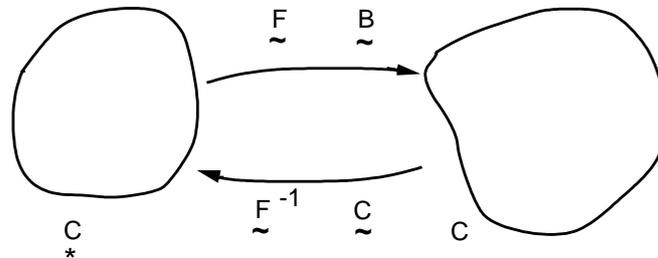


Figura MC. 8: problema diretto e problema inverso

Per rispondere partiamo dalla relazione:

$$dP = \underline{F} dP^*$$

che risolviamo ora per dP^* :

$$dP^* = \underline{F}^{-1} dP$$

Elevando al quadrato entrambi i membri otteniamo:

$$(dP^*)^2 = \underline{F}^{-1} dP \times \underline{F}^{-1} dP = dP \times \left(\underline{F}^{-1} \right)^T \underline{F}^{-1} dP = dP \times \underline{C} dP$$

Calcoliamo esplicitamente la nuova matrice di deformazione:

$$\underline{C} = \left(\underline{F}^{-1} \right)^T \underline{F}^{-1} = \left(\underline{F} \underline{F}^T \right)^{-1}$$

Osserviamo che:

$$\underline{\mathcal{C}} = \left(\underline{F} \underline{F}^T \right)^{-1} \quad (\text{MC.26})$$

non coincide con \underline{B}^{-1} come ci si sarebbe a prima vista potuti aspettare. Introducendo:

$$\underline{\mathcal{D}} = \underline{\mathcal{C}}^{-1} = \underline{F} \underline{F}^T \quad (\text{MC.27})$$

possiamo confrontare $\underline{\mathcal{D}}$ e \underline{B} . Rappresentando \underline{F} in forma polare possiamo scrivere:

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{A}, \quad \underline{A}^2 = \underline{B}, \quad \underline{A}^T = \underline{A}$$

essendo \underline{R} una rotazione rigida. Allora si può scrivere:

$$\underline{\mathcal{D}} = \underline{F} \underline{F}^T = \underline{R} \underline{A} \left(\underline{R} \underline{A} \right)^T = \underline{R} \underline{A}^2 \underline{R}^T$$

Quindi:

$$\underline{\mathcal{D}} = \underline{R} \underline{B} \underline{R}^T \iff \underline{B} = \underline{R}^T \underline{\mathcal{D}} \underline{R} \quad (\text{MC.28})$$

Le due matrici risultano legate tra loro da una trasformazione di similitudine che chiama in causa la rotazione rigida conglobata nel gradiente di deformazione. Se \underline{F} è una deformazione pura, cioè se $\underline{R} = \underline{I}$, le matrici $\underline{\mathcal{D}}$ e \underline{B} coincidono.

Statica

Dopo l'analisi geometrica e cinematica delle deformazioni, per passare alla statica e alla dinamica dei continui occorre introdurre una classificazione

delle forze agenti sul continuo. Classifichiamo le forze in *forze esterne* e *forze interne* al continuo o al tratto di continuo in esame.

Forze esterne

Le forze esterne possono agire su ogni *elemento di volume* del continuo (come ad esempio il peso) e in questo caso vengono chiamate *forze di massa*, e descritte mediante una legge di distribuzione del tipo:

$$d\mathbf{F}_{massa} = \mu \mathbf{F} dC \quad (\text{MC.29})$$

essendo μ la densità di massa per unità di volume, e \mathbf{F} la densità di forza per unità di massa, cosicchè $\mu \mathbf{F}$ rappresenta la densità di forza per unità di volume; $\mu \mathbf{F} dC$ fornisce allora l'elemento di forza nella configurazione attuale.

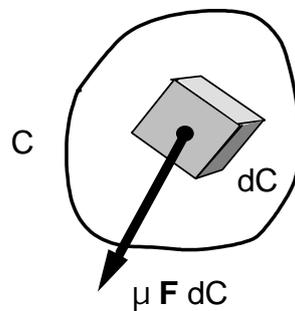


Figura MC. 9: forze di massa agenti su un continuo

Un'altra classe di forze esterne è rappresentata dalle *forze di superficie* le quali sono presenti solo sulla superficie esterna del continuo (o del tratto di continuo considerato). Queste si descrivono mediante una legge di distribuzione alla superficie, del tipo:

$$d\mathbf{F}_{sup} = \mathbf{f} d\Sigma \quad (\text{MC.30})$$

essendo $d\Sigma$ l'elemento della superficie esterna del continuo, e \mathbf{f} la densità di forza per unità di superficie. (Si escludono forze concentrate se si vuole mantenere la continuità per passare dalla formulazione integrale alla formulazione differenziale).

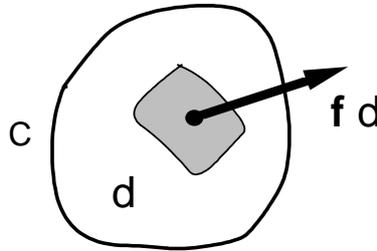


Figura MC. 10: forze di superficie in un continuo

Forze interne

Vi sono poi le forze interne che nascono come *sforzi* ai quali il materiale è sottoposto, in reazione alle forze esterne, per realizzare l'equilibrio. Poiché gli sforzi sono di natura interna, per evidenziarli occorre considerare un sottosistema costituito da una parte interna al continuo. Tale tratto di continuo sarà contenuto da una superficie che lo delimita. In ogni punto della superficie consideriamo il piano tangente e il versore \mathbf{u} , normale ad esso, uscente dalla superficie, che è opposto alla normale geometrica \mathbf{n} che, convenzionalmente è scelta rivolta verso l'interno.

Denotiamo con $d\sigma$ l'elemento d'area nel piano tangente e con:

$$d\mathbf{F}_{cont} = \mathbf{t}_u d\sigma \quad (\text{MC.31})$$

la legge di distribuzione che dà l'elemento della forza interna, denominata anche *forza di contatto*. In generale \mathbf{t}_u non avrà la direzione di \mathbf{u} , ma una direzione diversa che varia al variare di \mathbf{u} , cioè della scelta della superficie, che delimita il tratto di continuo che si prende in esame, e del punto considerato. Il vettore \mathbf{t}_u prende il nome di *sforzo specifico* nella direzione \mathbf{u} .

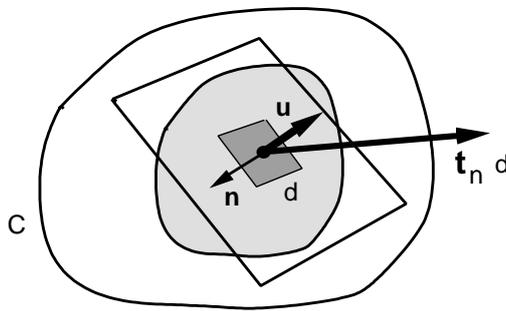


Figura MC. 11: forze di contatto in un continuo

Formula di Cauchy

Supposto l'equilibrio del continuo sussiste, come condizione necessaria, la prima equazione cardinale della statica:

$$\mathbf{R}^{(e)} = 0$$

Sappiamo, infatti, che le equazioni cardinali sono condizioni sempre necessarie per l'equilibrio di un corpo, e divengono sufficienti solamente se il corpo è rigido. Su ogni tratto interno al continuo devono, perciò farsi equilibrio le forze di massa e le forze di contatto. Le forze di superficie, presenti sulla superficie esterna del continuo, non sono qui chiamate in causa, perchè stiamo esaminando una parte interna del continuo, che non è delimitata dalla superficie esterna.

Sono dunque presenti solamente le forze di massa e le forze di contatto.

La condizione di equilibrio del continuo è perciò data, in forma globale, integrando sul dominio interno $\Delta\mathcal{C}$, che rappresenta un sottosistema rispetto a tutto il continuo \mathcal{C} .

Abbiamo:

$$\int_{\Delta\sigma} \mathbf{t}_n d\sigma + \int_{\Delta\mathcal{C}} \mu \mathbf{F} dC = 0 \quad (\text{MC.32})$$

essendo $\Delta\sigma = \partial\Delta\mathcal{C}$ la superficie di frontiera del dominio $\Delta\mathcal{C}$.

Questa relazione specializza la prima equazione cardinale della statica per il tratto interno al continuo $\Delta\mathcal{C}$.

In particolare, utilizzando il teorema della media, si può scrivere:

$$\int_{\Delta\mathcal{C}} \mu \mathbf{F} dC = \hat{\mu} \mathbf{F} \Delta\mathcal{C}$$

da cui segue, nella (MC.32):

$$\int_{\Delta\sigma} \mathbf{t}_n d\sigma = -\hat{\mu} \mathbf{F} \Delta\mathcal{C}$$

essendo $\hat{\mu} \mathbf{F}$ il valore della funzione $\mu \mathbf{F}$ calcolata in un punto opportuno del dominio $\Delta\mathcal{C}$ e:

$$\Delta\mathcal{C} = \int_{\Delta\mathcal{C}} dC$$

la misura (volume) del dominio stesso.

Di conseguenza in ogni punto P del dominio si ha, passando al limite:

$$\lim_{\Delta C \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta C} \int_{\Delta \sigma} \mathbf{t}_n d\sigma = -\mu \mathbf{F} \quad (\text{MC.33})$$

Questo risultato ci consente di stabilire il legame tra lo sforzo specifico in una direzione qualunque e gli sforzi specifici nella direzione dei versori degli assi \mathbf{t}_i . Infatti se consideriamo un dominio ΔC costituito da un tetraedro che ha il vertice in un punto P scelto come origine di un sistema di assi cartesiani $Px_1x_2x_3$ e la faccia obliqua rispetto agli assi normale al versore \mathbf{u} nella direzione del quale vogliamo calcolare lo sforzo specifico, avremo:

$$\Delta \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma$$

essendo σ_i le facce del tetraedro giacenti sui piani coordinati e σ la faccia obliqua.

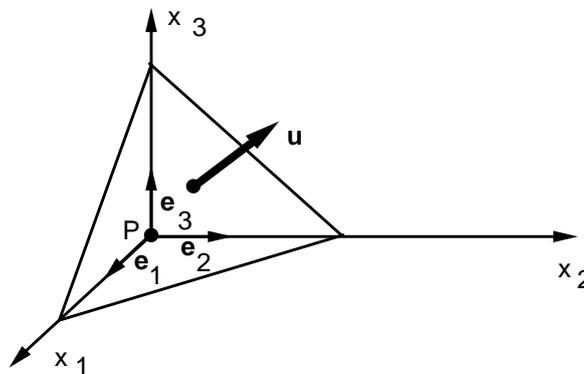


Figura MC. 12: tetraedro di Cauchy

Allora si ha:

$$\int_{\Delta \sigma} \mathbf{t}_n d\sigma = \int_{\sigma_1} \mathbf{t}_1 d\sigma + \int_{\sigma_2} \mathbf{t}_2 d\sigma + \int_{\sigma_3} \mathbf{t}_3 d\sigma - \int_{\sigma} \mathbf{t}_u d\sigma$$

avendo tenuto conto che il versore \mathbf{u} è rivolto verso l'esterno della superficie, mentre i versori \mathbf{e}_i sono diretti verso l'interno; questo spiega il segno negativo nell'ultimo integrale. Allora la relazione (MC.33) si specializza nella:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{Ah} \left(\int_{\sigma_1} \mathbf{t}_1 d\sigma + \int_{\sigma_2} \mathbf{t}_2 d\sigma + \int_{\sigma_3} \mathbf{t}_3 d\sigma - \int_{\sigma} \mathbf{t}_u d\sigma \right) = -\mu \mathbf{F}$$

dove $\Delta C = \frac{1}{3} Ah$ è il volume del tetraedro che ha base A e altezza h . Dal momento che la quantità a secondo membro $-\mu \mathbf{F}$ è limitata, mentre $\frac{1}{h} \rightarrow \infty$ necessariamente deve essere zero il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{A} \left(\int_{\sigma_1} \mathbf{t}_1 d\sigma + \int_{\sigma_2} \mathbf{t}_2 d\sigma + \int_{\sigma_3} \mathbf{t}_3 d\sigma - \int_{\sigma} \mathbf{t}_u d\sigma \right) = 0$$

Applicando il teorema della media ai vari integrali possiamo ottenere:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{A} (A_i \mathbf{t}_i - A \mathbf{t}_u) = 0$$

essendo $\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_u$ i valori medi degli sforzi sulle rispettive superfici e A_i, A le aree delle rispettive facce del tetraedro. E' facile verificare che, essendo σ_i le proiezioni di σ sui piani coordinati, risulta:

$$A_i = A u_i$$

dove le u_i sono le componenti di \mathbf{u} , cioè i coseni direttori della retta di versore \mathbf{u} . Allora si può riscrivere:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\mathbf{t}_i u_i - \mathbf{t}_u) = 0$$

Da cui:

$$\mathbf{t}_u = t_i u_i \quad (\text{MC.34})$$

Per esteso:

$$\mathbf{t}_u = t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3 \quad (\text{MC.35})$$

Questo risultato è noto come *formula di Cauchy*. Osserviamo che, dal momento che gli sforzi in direzione degli assi non dipendono da \mathbf{u} , la formula di Cauchy viene a stabilire una dipendenza lineare dello sforzo specifico \mathbf{t}_u dalle componenti di \mathbf{u} . Utilizzando la rappresentazione indiciale possiamo legare, allora, le componenti di \mathbf{t}_u alle componenti di \mathbf{u} mediante la relazione lineare:

$$t_{iu} = t_{ik} u_k \quad (\text{MC.36})$$

relazione che evidenzia il carattere matriciale della distribuzione degli sforzi nel continuo. Introducendo la *matrice degli sforzi*:

$$\underline{t} \equiv \|t_{ik}\| \quad (\text{MC.37})$$

si può scrivere la relazione in termini simbolici, come:

$$\mathbf{t}_u = \underline{t} \mathbf{u} \quad (\text{MC.38})$$

Principio di Pascal

Come applicazione della formula di Cauchy consideriamo il *principio di Pascal* nei fluidi: tale principio afferma che *in un fluido la pressione è identica in tutte le direzioni*.

La deduzione del principio di Pascal si può realizzare considerando, come fece Cauchy, che la pressione in un fluido è uno sforzo che è sempre parallelo al versore \mathbf{u} , cioè:

$$\mathbf{t}_u = p_u \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}$$

In particolare nella direzione degli assi si ha:

$$\mathbf{t}_1 = p_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{t}_2 = p_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{t}_3 = p_3 \mathbf{e}_3$$

Di conseguenza la formula di Cauchy diventa:

$$p_u \mathbf{u} = p_1 \mathbf{e}_1 u_1 + p_2 \mathbf{e}_2 u_2 + p_3 \mathbf{e}_3 u_3$$

Proiettando sui versori della base si ottiene:

$$p_u = p_1, \quad p_u = p_2, \quad p_u = p_3$$

Dunque la pressione in direzione degli assi è la stessa e si può indicare semplicemente con p e uguaglia la pressione in qualsiasi direzione \mathbf{u} . La matrice degli sforzi, in un fluido, risulta allora essere una dilatazione isotropa:

$$\underline{\underline{t}} = p \underline{\underline{I}} \quad (\text{MC.39})$$

Il risultato è ovvio dal punto di vista dell'algebra delle matrici, dal momento che la condizione imposta da Cauchy che lo sforzo sia sempre parallelo ad \mathbf{u} si traduce nella richiesta per la matrice $\underline{\underline{t}}$ che il problema agli autovalori:

$$(\underline{\underline{t}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \mathbf{u} = 0$$

sia soddisfatto da qualunque vettore dello spazio. Ma questo significa che la matrice è necessariamente proporzionale all'identità e i suoi autovalori sono quindi coincidenti.

- Un continuo la cui matrice degli sforzi ha la forma (MC.39) con $p > 0$ prende il nome di *fluido perfetto*.

Condizioni al contorno

Finora abbiamo esaminato il comportamento degli sforzi all'interno del continuo. Ora coinvolgiamo anche la superficie esterna, occupandoci delle *condizioni al contorno*. A questo scopo esaminiamo il bilancio delle forze su un tratto del continuo, una faccia della cui superficie si trova adiacente alla superficie esterna del continuo stesso. Consideriamo un cilindretto le cui basi sono infinitesime, l'una delle quali, denotata con $d\Sigma$, appartiene alla frontiera del continuo; mentre l'altra, denotata con $d\sigma$, è interna al continuo stesso. L'elemento di volume del cilindretto elementare di base $d\sigma$ e altezza $d\xi$ si può allora scrivere:

$$dC = d\sigma d\xi$$

Quindi l'elemento della forza di massa agente sul cilindretto elementare è dato da:

$$\mu \mathbf{F} dC = \mu \mathbf{F} d\sigma d\xi$$

Per cui integrando lungo l'altezza del cilindro di altezza finita ℓ , si ottiene il contributo delle forze di massa agenti su questo cilindro:

$$d\mathcal{F}_{massa} = \left(\int_0^\ell \mu \mathbf{F} d\xi \right) d\sigma$$

dove abbiamo identificato con $\xi = 0, \xi = \ell$ le ascisse dei centri delle due basi lungo un asse ξ diretto come l'asse di simmetria del cilindro. Sulla superficie laterale del cilindro agiscono solo le forze di contatto il cui elemento vale:

$$\mathbf{t}_{n'} d\sigma' = 2\pi \mathbf{t}_{n'} dr d\xi$$

essendo:

$$d\sigma' = 2\pi dr d\xi$$

l'elemento della superficie laterale del cilindro di raggio elementare dr ; e avendo denotato con \mathbf{n}' la normale alla superficie laterale. Integrando lungo l'altezza abbiamo il contributo delle forze di contatto agenti sulla superficie laterale del cilindro di altezza ℓ :

$$d\mathcal{F}_{lat} = 2\pi \left(\int_0^\ell \mathbf{t}_{n'} d\xi \right) dr$$

Rimane ancora il contributo delle forze di contatto sulla base interna, la cui normale è \mathbf{N} :

$$d\mathcal{F}_{int} = \mathbf{t}_N d\sigma$$

Il contributo della forze di superficie agenti sulla base esterna è dato invece dall'espressione:

$$d\mathcal{F}_{sup} = \mathbf{f} d\Sigma$$

Imponendo allora la prima equazione cardinale della statica, specializzata per il cilindro considerato, otteniamo la condizione:

$$\left(\int_0^\ell \mu \mathbf{F} d\xi \right) d\sigma + 2\pi \left(\int_0^\ell \mathbf{t}_{n'} d\xi \right) dr + \mathbf{t}_N d\sigma + \mathbf{f} d\Sigma = 0$$

Applicando il teorema della media ai due integrali otteniamo:

$$\hat{\mu} \mathbf{F} \ell d\sigma + 2\pi \ell \mathbf{t}_{n'} dr + \mathbf{t}_N d\sigma + \mathbf{f} d\Sigma = 0$$

Passando al limite per $\ell \rightarrow 0$ verso la superficie esterna rimane:

$$(\mathbf{t}_N + \mathbf{f}) d\Sigma = 0$$

dove abbiamo raccolto l'elemento di superficie comune che si identifica con quello della superficie esterna. Si ottiene quindi:

$$\mathbf{t}_N + \mathbf{f} = 0$$

Per quanto riguarda le normali abbiamo evidentemente:

$$\mathbf{N} = -\mathbf{n}$$

in quanto le due normali puntano verso l'interno del cilindro partendo dai centri delle basi opposte. Si ottiene dunque la *condizione al contorno*:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{f} \quad (\text{MC.40})$$

Mediante la formula di Cauchy questa condizione si esprime anche nella forma:

$$t_i n_i = f \quad (\text{MC.41})$$

ovvero in termini della matrice degli sforzi:

$$\underline{t} \cdot \underline{n} = \underline{f} \quad (\text{MC.42})$$

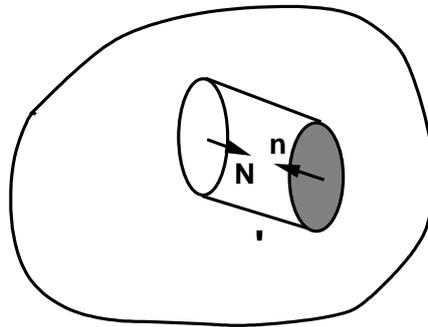


Figura MC. 13: condizioni al contorno

Principio di indifferenza materiale

E' noto che il lavoro delle forze interne in un corpo rigido è nullo, grazie al principio di azione e reazione e alla legge di distribuzione degli spostamenti rigidi. Si ritiene del tutto ragionevole, perciò, assumere che anche in un corpo non rigido, qualora esso venga assoggettato a spostamenti rigidi, il lavoro delle forze interne risulti nullo.

Condizioni di equilibrio di un continuo

Per determinare l'equilibrio del continuo assumeremo che:

i) i vincoli siano *lisci*, in modo che il principio dei lavori virtuali costituisca una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio;

ii) i vincoli siano *bilaterali*, in modo da avere solo spostamenti reversibili e ottenere delle equazioni e non delle disequazioni. Questo è necessario perchè le condizioni di equilibrio sono, per il continuo, delle equazioni differenziali per le funzioni incognite e occorre escludere le configurazioni di confine dove possono verificarsi delle discontinuità;

iii) valga il *principio di indifferenza materiale* per poter determinare il lavoro delle forze interne.

Sotto queste ipotesi il principio dei lavori virtuali fornisce la seguente condizione di equilibrio:

$$\delta L^{(e,a)} + \delta L^{(i,a)} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{x}$$

Dal momento che il corpo non è rigido si avrà in generale:

$$\delta L^{(i,a)} \neq 0$$

Mentre per un corpo rigido sappiamo che le forze interne sono tutte di natura vincolare e compiono lavoro nullo, di conseguenza non c'è lavoro delle forze interne attive perchè queste sono nulle.

Uno spostamento virtuale porta la configurazione attuale C nella configurazione variata $C + \delta C$, agendo sulle variabili euleriane \mathbf{x} . Per cui, introdotte le variabili relative:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad \Longleftrightarrow \quad u_i = x_i - \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_I X_I \quad (\text{MC.43})$$

si ha, essendo le \mathbf{X} e le basi, fissate:

$$\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{u}$$

E' conveniente, per semplicità, scegliere le basi in modo che $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_I = \delta_{iI}$.

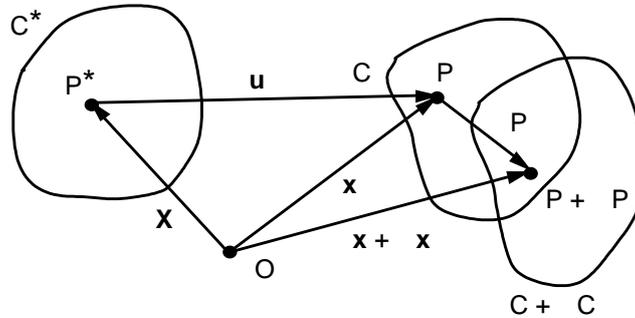


Figura MC. 14: spostamento virtuale del continuo

Allora per il calcolo dei lavori virtuali abbiamo, integrando su un dominio \mathcal{C} che identifica un tratto del continuo:

—per le *forze di massa*:

$$\int_{\mathcal{C}} \mu \mathbf{F} \times \delta \mathbf{x} dC = \int_{\mathcal{C}} \mu \mathbf{F} \times \delta \mathbf{u} dC$$

—per le *forze di superficie*:

$$\int_{\partial \mathcal{C}} \mathbf{f} \times \delta \mathbf{x} d\Sigma = \int_{\partial \mathcal{C}} \mathbf{f} \times \delta \mathbf{u} d\Sigma$$

essendo $\partial \mathcal{C}$ la superficie di frontiera del dominio \mathcal{C} . D'altra parte le condizioni al contorno ci forniscono l'informazione:

$$\mathbf{f} = \underline{t} \mathbf{n}$$

e dunque:

$$\int_{\partial \mathcal{C}} \mathbf{f} \times \delta \mathbf{x} d\Sigma = \int_{\partial \mathcal{C}} (\underline{t} \mathbf{n}) \times \delta \mathbf{u} d\Sigma$$

Ma:

$$(\underline{t} \mathbf{n}) \times \delta \mathbf{u} = t_{ik} n_k \delta u_i = (\delta \mathbf{u} \underline{t}) \times \mathbf{n}$$

Inoltre grazie al teorema di Gauss si ha:

$$- \int_{\partial C} (\delta \mathbf{u} \underline{t}) \times \mathbf{n} d\Sigma = \int_C \nabla \times (\delta \mathbf{u} \underline{t}) dC$$

Il segno negativo è dovuto al fatto che la normale è rivolta verso l'interno del continuo, mentre la normale rispetto alla quale si calcola il flusso di Gauss è uscente. In conclusione il lavoro delle forze di superficie è stato ricondotto da un integrale di superficie a un integrale di volume:

$$\int_{\partial C} \mathbf{f} \times \delta \mathbf{x} d\Sigma = \int_C \nabla \times (\delta \mathbf{u} \underline{t}) dC$$

Infine conviene esprimere anche il lavoro incognito delle forze interne attive mediante un integrale di volume, introducendo la densità di tale lavoro $\delta \ell^{(i,a)}$:

$$\delta L^{(i,a)} = \int_C \delta \ell^{(i,a)} dC$$

Dunque la condizione di equilibrio che richiede che il lavoro virtuale delle forze attive sia nullo risulta essere, raccogliendo sotto un unico segno di integrale:

$$\int_C [\mu \mathbf{F} \times \delta \mathbf{u} - \nabla \times (\delta \mathbf{u} \underline{t}) + \delta \ell^{(i,a)}] dC = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (\text{MC.44})$$

Tale condizione deve essere soddisfatta su qualunque tratto del continuo, in quanto il continuo risulta essere in equilibrio se ogni suo tratto è in equilibrio. Perciò dovrà risultare nulla la funzione integranda:

$$\mu \mathbf{F} \times \delta \mathbf{u} - \nabla \times (\delta \mathbf{u} \underline{t}) + \delta \ell^{(i,a)} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (\text{MC.45})$$

Svolgendo la divergenza otteniamo:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\delta \mathbf{u} \underline{t}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta u_i t_{ik}) = \delta u_i \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} + t_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} = \\ &= \delta u_i \frac{\partial t_{ki}^T}{\partial x_k} + t_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} = \delta \mathbf{u} \times (\nabla \underline{t}^T) + (\underline{t} \nabla) \times \delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

E quindi la condizione di equilibrio si riscrive:

$$(\mu \mathbf{F} - \nabla \underline{t}^T) \times \delta \mathbf{u} - (\underline{t} \nabla) \times \delta \mathbf{u} + \delta \ell^{(i,a)} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (\text{MC.46})$$

Ovvero, in termini indiciali:

$$\delta u_i \left(\mu F_i - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} \right) - t_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \delta \ell^{(i,a)} = 0 \quad (\text{MC.47})$$

Il significato della scrittura simbolica è chiarito dalla scrittura indiciale.

Spostamenti rigidi

A questo punto occorre fare intervenire il principio di indifferenza materiale; se la condizione di equilibrio deve essere soddisfatta per ogni spostamento virtuale, essa deve sussistere anche per spostamenti rigidi del continuo, in corrispondenza dei quali il lavoro virtuale delle forze interne attive è nullo.

—In particolare cominciamo effettuando uno *spostamento rigido traslatorio* arbitrario. In questo caso, per definizione di spostamento rigido traslatorio, tutti i punti compiono lo stesso spostamento $\delta \mathbf{u}$.

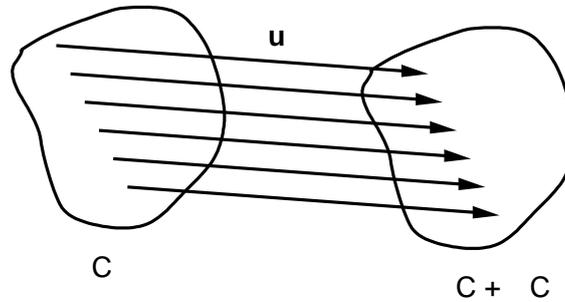


Figura MC. 15: spostamento rigido traslatorio

Dunque $\delta \mathbf{u}$ è indipendente dal punto \mathbf{x} , e quindi si ha:

$$(\underline{t} \nabla) \times \delta \mathbf{u} = t_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} = 0$$

Per cui rimane nella condizione di equilibrio:

$$\delta \mathbf{u} \times \left(\mu \mathbf{F} - \nabla \underline{t}^T \right) = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \text{ rigido traslatorio}$$

E quindi segue l'equazione di equilibrio:

$$\mu \mathbf{F} - \nabla \underline{t}^T = 0 \quad \iff \quad \mu F_i - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{MC.48})$$

—Ora consideriamo uno spostamento rigido rotatorio, che rappresentiamo nella forma:

$$\delta \mathbf{u} = \delta \psi \wedge \mathbf{x} = \underline{A} \mathbf{x}$$

essendo $\underline{\underline{A}}$ la matrice antisimmetrica di cui $\delta\psi$ rappresenta il vettore duale. I suoi elementi di matrice sono dati, allora, da:

$$A_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \delta\psi_k$$

Ora:

$$\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (A_{ij}x_j) = A_{ik}$$

in quanto $\underline{\underline{A}}$ non dipende da \mathbf{x} . Dunque si ha:

$$(\underline{\underline{t}} \nabla) \times \delta\mathbf{u} = t_{ik} \frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k} = t_{ik} A_{ik} = -tr(\underline{\underline{t}} \underline{\underline{A}})$$

Tenendo conto della (MC.48), la cui validità ai fini dell'equilibrio non dipende dal tipo di spostamento che si effettua, nella (MC.46) rimane allora:

$$(\underline{\underline{t}} \nabla) \times \delta\mathbf{u} = -tr(\underline{\underline{t}} \underline{\underline{A}}) = 0, \quad \forall \underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{A}}^T$$

Risultato che conduce a concludere che la matrice euleriana degli sforzi $\underline{\underline{t}}$ deve essere simmetrica.

In conclusione abbiamo ottenuto le due equazioni fondamentali della statica dei continui:

$$\mu \mathbf{F} - \nabla \underline{\underline{t}} = 0, \quad \underline{\underline{t}}^T = \underline{\underline{t}} \quad (\text{MC.49})$$

avendo riscritto la prima tenendo conto della seconda.

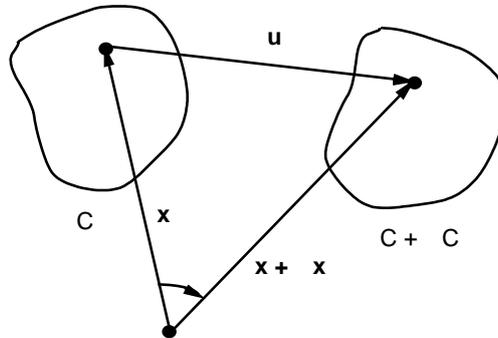


Figura MC. 16: spostamento rigido rotatorio

Dal momento che queste condizioni di equilibrio sono indipendenti dal tipo di spostamento che si effettua esse devono sussistere anche se si compiono spostamenti non rigidi. Di conseguenza, in tal caso, essendo il lavoro delle forze interne non nullo, dalla condizione (MC.47) resta determinato anche il lavoro delle forze interne attive, che assume l'espressione:

$$\delta \ell^{(i,a)} = \frac{1}{2} t_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) \quad (\text{MC.50})$$

avendo tenuto conto della simmetria della matrice degli sforzi e quindi del fatto che la parte antisimmetrica del gradiente dello spostamento non contribuisce al lavoro.

Dinamica

Il passaggio dalla statica alla dinamica si può realizzare, in modo diretto, tramite il *principio di D'Alembert*. Basta sostituire, nella condizione di

equilibrio (MC.46), il lavoro virtuale delle forze perdute a quello delle forze attive, cioè aggiungere la quantità:

$$- \int_C \mu \mathbf{a} \times \delta \mathbf{u} dC$$

che si congloba con la prima equazione fondamentale, che si ottiene imponendo uno spostamento rigido traslatorio. Si ottiene allora, in luogo della condizione di equilibrio, la prima equazione fondamentale della dinamica dei continui, mentre la seconda equazione rimane inalterata. Si hanno allora le due equazioni fondamentali della dinamica dei continui nella forma:

$$\mu \mathbf{a} = \mu \mathbf{F} - \nabla t_{\sim}, \quad t_{\sim}^T = t_{\sim} \quad (\text{MC.51})$$

L'accelerazione è definita mediante la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Equazioni di bilancio

- Le equazioni della meccanica dei continui si possono esprimere, in forma integrale, come *equazioni di bilancio*, cioè equazioni che esprimono una *legge di conservazione*.

- Si assume, in accordo con l'esperienza, che le equazioni di bilancio valgano *localmente* oltre che *globalmente*. Ciò significa che esse devono essere verificate in ogni tratto del continuo e non solo sull'intero sistema. Dunque esse devono essere soddisfatte in qualunque dominio \mathcal{C} di integrazione.

Bilancio della massa

Il primo bilancio di cui ci occupiamo è quello della massa: *la massa si conserva durante il moto e la deformazione.*

—Dal *punto di vista lagrangiano* si dovrà avere che, per qualsiasi dominio, la massa di un certo tratto di continuo resti inalterata nel passaggio dalla configurazione di riferimento ad una configurazione attuale (deformata).

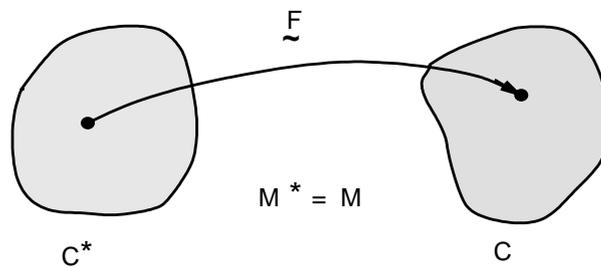


Figura MC. 17: conservazione della massa dal punto di vista lagrangiano

Ora nella configurazione di riferimento C^* si ha il valore della massa di un tratto di continuo C^* :

$$M^* = \int_{C^*} \mu^* dC^*$$

Mentre nella configurazione attuale si avrà:

$$M = \int_C \mu dC$$

Ora il legame tra gli elementi di volume è dato da:

$$dC = D dC^*, \quad D = |\det(\tilde{F})|$$

Per cui effettuando un cambio di variabili si può scrivere in termini delle variabili lagrangiane:

$$M = \int_{C^*} \mu D dC^*$$

La conservazione della massa impone che le masse prima e dopo la deformazione siano immutate e quindi, identificando i rispettivi integrali si ha:

$$\int_{C^*} (\mu^* - \mu D) dC^* = 0, \quad \forall C^*$$

Perciò si ha la legge di bilancio della massa in forma lagrangiana:

$$\mu^* = \mu D$$

(MC.52)

—Dal *punto di vista euleriano* il bilancio della massa si studia esaminando la massa che entra e quella che esce da un certo dominio C della configurazione attuale, assunto come *spazio di controllo*.

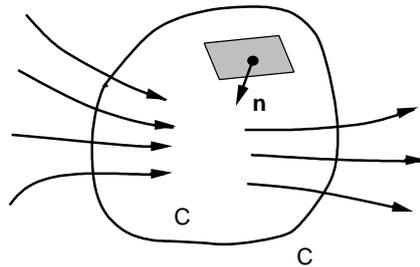


Figura MC. 18: bilancio della massa dal punto di vista euleriano

Possiamo stabilire l'uguaglianza tra la variazione della massa al variare del tempo e il flusso di massa attraverso la superficie di frontiera di \mathcal{C} :

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \Phi \quad (\text{MC.53})$$

Dove:

$$M = \int_{\mathcal{C}} \mu dC$$

Mentre il flusso entrante è:

$$\Phi = \int_{\partial \mathcal{C}} \mu \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma$$

essendo \mathbf{n} la normale rivolta verso l'interno del dominio.

Come si vede facilmente $\mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma$ è il volume attraversato, nell'unità di tempo, dalle particelle del continuo che transitano attraverso la superficie $d\sigma$.

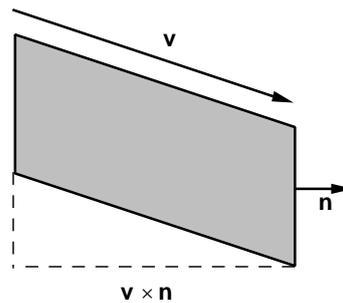


Figura MC. 19: volume attraversato nell'unità di tempo

Per il teorema di Gauss si ha:

$$\int_{\partial C} \mu \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = - \int_C \nabla \times (\mu \mathbf{v}) dC$$

Quindi sostituendo nella legge di bilancio (MC.53) si ottiene:

$$\int_C \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \times (\mu \mathbf{v}) \right] dC = 0, \quad \forall C$$

Di conseguenza si ottiene la legge di bilancio della massa (*equazione di continuità*) in forma euleriana:

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \nabla \times (\mu \mathbf{v}) = 0} \quad (\text{MC.54})$$

che si può anche riscrivere:

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad (\text{MC.55})$$

avendo denotato con:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \times \nabla$$

la *derivata lagrangiana* o *totale* rispetto al tempo.

Notiamo che la conservazione della massa si può anche formulare richiedendo che la derivata totale della massa sia nulla, e cioè:

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Allora si può scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_C \mu dC &= \frac{d}{dt} \int_{C^*} \mu D dC^* = \int_{C^*} \left(\frac{d\mu}{dt} D + \mu \frac{dD}{dt} \right) dC^* = \\ &= \int_C \left(\frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{D} \mu \frac{dD}{dt} \right) dC \end{aligned}$$

Da cui, per l'arbitrarietà del dominio segue l'equazione di continuità nella forma:

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = 0$$

Il confronto fra le due forme dell'equazione di continuità porta a concludere che sussiste la relazione:

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dt} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (\text{MC.56})$$

Teorema del trasporto

Grazie al risultato precedente possiamo esprimere la derivata totale di qualunque grandezza Ψ :

$$\Psi = \int_C \psi dC$$

nel modo seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_C \psi dC = \int_{C^*} \frac{d(\psi D)}{dt} dC^* = \int_C \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \frac{1}{D} \frac{dD}{dt} \right) dC$$

E grazie alla (MC.56):

$$\frac{d}{dt} \int_C \psi dC = \int_C \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \nabla \times \mathbf{v} \right) dC \quad (\text{MC.57})$$

Questa scrittura prende il nome di *teorema del trasporto*.

Posto che sia presente una sorgente all'interno della superficie:

$$S = - \int_C s dC$$

e un extraflusso attraverso la superficie esterna:

$$\Phi = \int_{\partial C} \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{n} d\sigma = - \int_C \nabla \times \boldsymbol{\phi} dC$$

siamo in grado di scrivere la legge di bilancio di una grandezza qualunque Ψ nella forma:

$$\int_C \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi \nabla \times \mathbf{v} - \nabla \times \boldsymbol{\phi} - s \right) dC = 0$$

Da cui si ha la legge di bilancio locale:

$$\frac{d\psi}{dt} + \psi \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\phi} + s \quad (\text{MC.58})$$

ovvero:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \times (\psi \mathbf{v}) = \nabla \times \boldsymbol{\phi} + s \quad (\text{MC.59})$$

che esprime il bilancio di Ψ .

Bilancio della quantità di moto

La prima equazione fondamentale della dinamica dei continui si può allora rappresentare come legge di bilancio della quantità di moto:

$$\mathbf{Q} = \int_C \mu \mathbf{v} dC$$

Infatti la prima delle (MC.51) si può riscrivere nella forma:

$$\frac{d}{dt} (\mu \mathbf{v}) + \mu (\nabla \times \mathbf{v}) = \mu \mathbf{F} - \nabla \underline{t}$$

che rappresenta la legge di bilancio di \mathbf{Q} essendo $s = \mu \mathbf{F}$ la sorgente di quantità di moto dovuta alle forze di massa e $\underline{\phi} = -\underline{t}$ l'extraflusso di quantità di moto attraverso la frontiera. Si può anche riscrivere la legge di bilancio locale della quantità di moto nella forma equivalente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu \mathbf{v}) + \nabla (\mu \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \underline{t}) = \mu \mathbf{F} \quad (\text{MC.60})$$

Bilancio del momento della quantità di moto

Come conseguenza delle equazioni fondamentali della dinamica dei continui e dell'equazione di continuità della massa, si ottiene anche la legge di bilancio del momento della quantità di moto.

Infatti, partendo da:

$$\mu \mathbf{a} = \mu \mathbf{F} - \nabla \underline{t}$$

e moltiplicando vettorialmente a sinistra per $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, essendo \mathbf{x}_0 le coordinate euleriane di un polo (fisso) di riduzione per il calcolo dei momenti, si ha:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{a}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{F}) - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\nabla t_{\sim})$$

Integrando sul volume \mathcal{C} segue:

$$\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{a}) dC = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{F}) dC - \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\nabla t_{\sim}) dC$$

Esaminiamo questi tre integrali.

—Abbiamo per il primo integrale:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{a}) dC = \\ & = \int_{\mathcal{C}} \left\{ \frac{d}{dt} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{v})] + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{v}) (\nabla \times \mathbf{v}) \right\} dC \end{aligned}$$

come si verifica tenendo conto dell'equazione di continuità della massa. Di conseguenza, per il teorema del trasporto, si ha alla fine:

$$\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{a}) dC = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{v}) dC = \frac{d\mathbf{K}_0}{dt}$$

Il primo termine della relazione da cui siamo partiti rappresenta allora la derivata del momento della quantità di moto.

—Il secondo integrale è il momento risultante delle forze di massa, e nel bilancio, rappresenta una sorgente di momento della quantità di moto:

$$\mathbf{M}_0 = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\mu \mathbf{F}) dC$$

— Per interpretare l'ultimo integrale cominciamo con l'osservare che, per avere il bilancio corretto del momento della quantità di moto, l'ultimo integrale dovrebbe risultare uguale al flusso entrante del momento della quantità di moto attraverso la frontiera del dominio \mathcal{C} :

$$\Phi = \int_{\partial\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{f} \, d\sigma = \int_{\partial\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\underline{t} \, \mathbf{n}) \, d\sigma$$

grazie alle condizioni al contorno. Per il teorema di Gauss si ha:

$$\int_{\partial\mathcal{C}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge (\underline{t} \, \mathbf{n}) \, d\sigma = - \int_{\mathcal{C}} \nabla \times [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \underline{t}] \, dC$$

Ovvero mediante la rappresentazione indiciale:

$$- \int_{\partial\mathcal{C}} \varepsilon_{ijk} (x_i - x_{0i}) t_{j\ell} n_\ell \, d\sigma = \int_{\mathcal{C}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_\ell} [(x_i - x_{0i}) t_{j\ell}] \, dC$$

Rimane dunque da valutare il termine:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_\ell} [(x_i - x_{0i}) t_{j\ell}] &= \varepsilon_{ijk} t_{j\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_i - x_{0i}) + \varepsilon_{ijk} (x_i - x_{0i}) \frac{\partial}{\partial x_\ell} t_{j\ell} = \\ &= \varepsilon_{ijk} (x_i - x_{0i}) \frac{\partial}{\partial x_\ell} t_{j\ell} + \varepsilon_{ijk} t_{ji} \end{aligned}$$

in quanto, essendo x_{0i} costante, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_i - x_{0i}) = \delta_{\ell i}$$

Inoltre, grazie alla seconda equazione fondamentale della dinamica dei continui, la matrice degli sforzi è simmetrica, e questo comporta l'annullarsi

del termine $\varepsilon_{ijk} t_{ji}$. Per cui, in conclusione il bilancio del momento della quantità di moto viene soddisfatto:

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 + \Phi$$

Bilancio dell'energia

Come conseguenza delle equazioni del moto, in un continuo puramente meccanico (cioè nel quale non entrano in gioco le funzioni di stato termodinamiche), partendo dalla prima equazione fondamentale si ottiene anche il bilancio dell'energia meccanica. Infatti, moltiplicando la:

$$\mu \mathbf{a} = \mu \mathbf{F} - \nabla t_{\sim}$$

scalarmente per \mathbf{v} otteniamo:

$$\mu \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \mu \mathbf{F} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times (\nabla t_{\sim})$$

Integrando:

$$\int_C \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dC = \int_C \mu \mathbf{F} \times \mathbf{v} dC - \int_C \mathbf{v} \times (\nabla t_{\sim}) dC$$

—L'integrale a primo membro, tenendo conto che $\mu D = \mu^*$ e $dC = D dC^*$ si riscrive:

$$\int_C \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dC = \int_{C^*} \mu^* \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dC^* =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{C^*} \mu^* \frac{v^2}{2} dC^* = \frac{d}{dt} \int_C \mu \frac{v^2}{2} dC = \frac{dT}{dt}$$

essendo l'energia cinetica del continuo data da:

$$T = \int_C \mu \frac{v^2}{2} dC$$

—L'ultimo integrale a secondo membro si riscrive riaggiustando l'argomento:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\nabla \underline{t}) &= v_i \frac{\partial}{\partial x_j} t_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j} (t_{ji} v_j) - t_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (t_{ji} v_j) - t_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i = \nabla \times (\underline{t} \mathbf{v}) - \text{tr} [\underline{t} (\nabla \otimes \mathbf{v})] \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto della simmetria di \underline{t} .

Dunque:

$$\int_C \mathbf{v} \times (\nabla \underline{t}) dC = \int_C \nabla \times (\underline{t} \mathbf{v}) dC - \int_C \text{tr} [\underline{t} (\nabla \otimes \mathbf{v})] dC$$

—Mediante il teorema di Gauss il primo integrale a secondo membro si scrive poi:

$$\int_C \nabla \times (\underline{t} \mathbf{v}) dC = - \int_{\partial C} \mathbf{v} \times \mathbf{t}_n d\sigma = - \int_{\partial C} \mathbf{f} \times \mathbf{v} d\sigma$$

Introducendo allora la potenza esplicita dalle forze di massa e dalle forze di superficie:

$$P = \int_C \mu \mathbf{F} \times \mathbf{v} dC + \int_{\partial C} \mathbf{f} \times \mathbf{v} d\sigma$$

e la potenza esplicitata dagli sforzi interni:

$$W = \int_C tr [\underline{t} (\nabla \otimes \mathbf{v})] dC$$

si ottiene il bilancio dell'energia meccanica:

$$\frac{dT}{dt} = P + W$$

• Notiamo che per continui che non sono descrivibili in termini puramente meccanici, ma che richiedono una descrizione termodinamica, l'equazione di bilancio dell'energia non include la sola energia meccanica, ma tiene conto anche dell'energia interna del continuo e degli eventuali scambi di calore. In questo caso la legge di conservazione dell'energia non è più una conseguenza delle equazioni della meccanica dei continui, ma è una legge ulteriore che costituisce il primo principio della termodinamica.

Equazioni costitutive

Ora dobbiamo occuparci del *problema fondamentale della meccanica dei continui*, che consiste nella determinazione del moto. Le incognite del problema che caratterizzano l'evoluzione del continuo sono le quattro funzioni:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \mu = \mu(\mathbf{X}, t)$$

Le equazioni a disposizione sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \mathbf{a} = \mu \mathbf{F} - \nabla \cdot \underline{\underline{t}} \\ \underline{\underline{t}}^T = \underline{\underline{T}} \\ \frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{MC.61})$$

Notiamo che si hanno quattro equazioni nelle incognite \mathbf{x}, μ . Il problema può essere risolto a condizione che siano note le forze di massa e sia nota la matrice degli sforzi $\underline{\underline{t}}$. Ora le forze di massa sono forze esterne e si può supporre di riuscire a conoscerle; mentre gli sforzi nascono dalle forze di contatto che sono interne al continuo e sono, perciò, generalmente sconosciute. L'unica informazione che abbiamo relativamente alla matrice degli sforzi è che essa è simmetrica. Una matrice simmetrica ha 6 elementi, dunque ci mancano altre 6 relazioni per determinare il problema.

Per determinare il problema occorre aggiungere un gruppo di 6 condizioni che forniscano il legame tra sforzo e deformazione:

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (\text{MC.62})$$

Queste relazioni prendono il nome di *equazioni costitutive*.

- Dal punto di vista fisico il fatto che la matrice $\underline{\underline{t}}$ non sia automaticamente determinata dalle equazioni fondamentali della meccanica dei continui e dall'equazione di continuità, ma vada assegnata in funzione della matrice di deformazione, rende conto del fatto che i materiali hanno proprietà meccaniche differenti e queste sono caratterizzate dalle equazioni costitutive. Diversamente tutti i materiali avrebbero esattamente lo stesso comportamento, contrariamente a quanto è noto dall'esperienza. Si possono perciò classificare vari tipi di materiali, in ordine alle caratteristiche delle loro equazioni costitutive.

Fluidi

Come si è già visto si dicono *fluidi perfetti* i continui la cui matrice degli sforzi ha la forma:

$$\underline{t} = p \underline{I}$$

essendo $p > 0$ la *pressione*. Le equazioni della dinamica dei fluidi si ottengono, allora, specializzando le equazioni dei continui:

$$\begin{cases} \mu \mathbf{a} = \mu \mathbf{F} - \nabla p \\ \frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla \times \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (\text{MC.63})$$

Si hanno 4 equazioni nelle 5 variabili μ , \mathbf{v} , p . Di conseguenza occorre una relazione costitutiva per determinare il problema. La relazione costitutiva che caratterizza le proprietà del fluido lega la pressione alla densità:

$$p = p(\mu) \quad (\text{MC.64})$$

Fluidi incomprimibili

In alternativa, anzichè assegnare la pressione come funzione costitutiva della densità, si può fissare il valore della densità ad un valore costante, ottenendo, in questo modo la riduzione a 4 del numero delle incognite. Fluidi di questo tipo si dicono *incomprimibili* o *ideali*. Essi sono definiti dalla condizione di incomprimibilità:

$$\mu = \mu^* \quad \Longleftrightarrow \quad D = 1 \quad (\text{MC.65})$$

Per i fluidi incomprimibili le equazioni della dinamica divengono, di conseguenza le seguenti:

$$\begin{cases} \mu^* \mathbf{a} = \mu^* \mathbf{F} - \nabla p \\ \nabla \times \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (\text{MC.66})$$

Si ha così un sistema di 4 equazioni per le 4 incognite \mathbf{v} , p . In questo caso p è una variabile indipendente, mentre la relazione costitutiva è stata imposta alla variabile μ richiedendo che sia una costante del problema, caratteristica del fluido esaminato.

- La condizione di incomprimibilità rappresenta un vincolo interno al fluido. Viene naturale domandarsi, in presenza di un vincolo quale sia la variabile che gioca il ruolo di reazione vincolare. Possiamo rispondere interpretando la prima equazione fondamentale della dinamica come prima equazione cardinale della dinamica:

$$\mu^* \mathbf{a} = \mu^* \mathbf{F} + \phi$$

Si vede allora che:

$$\phi = -\nabla p$$

In sostanza, in un fluido incomprimibile la pressione gioca un ruolo legato alla reazione vincolare che nasce dalla presenza del vincolo di incomprimibilità.

Fluido ideale pesante in quiete

Vediamo un'applicazione di tipo statico: l'equilibrio di un fluido incomprimibile soggetto alla forza peso.

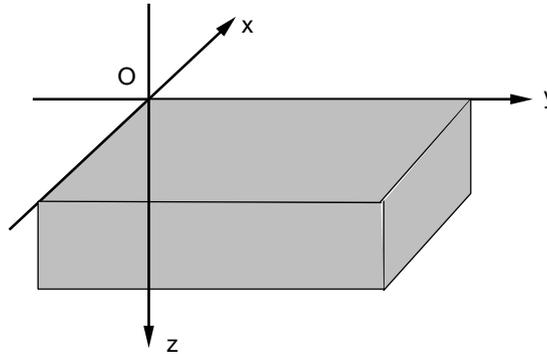


Figura MC. 20: equilibrio di un fluido ideale pesante

Immaginiamo che $z = 0$ rappresenti l'equazione del piano che delimita superiormente il fluido. La distribuzione delle forze di massa è quella delle forze peso:

$$\mu^* \mathbf{F} = \mu^* \mathbf{g}$$

Allora la condizione di equilibrio del fluido:

$$\mu^* \mathbf{F} - \nabla p = 0$$

che si ottiene dalla corrispondente equazione della dinamica del fluido, annullando il termine cinetico, si specializza nella condizione:

$$\mu^* \mathbf{g} - \nabla p = 0 \quad (\text{MC.67})$$

Risulta chiaro che il gradiente della pressione gioca il ruolo di una reazione vincolare che si oppone alla forza attiva (peso). Proiettando sugli assi cartesiani, scelti come in figura (MC. 20), si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu^* g \end{cases}$$

Integrando questo sistema con una condizione al contorno del tipo:

$$p|_{z=0} = p_0$$

dove p_0 si può interpretare, ad esempio, come la pressione atmosferica sulla superficie del fluido, si ottiene che la pressione è indipendente da x, y e dipende dalla quota z secondo la legge:

$$p = p_0 + \mu^* g z \quad (\text{MC.68})$$

relazione che esprime la nota legge della proporzionalità diretta tra la pressione e la profondità.

Teorema delle tre quote

Esaminiamo ora la dinamica del fluido ideale pesante. L'equazione del moto si scrive:

$$\mu^* \mathbf{a} = \mu^* \mathbf{g} - \nabla p$$

Moltiplicandola scalarmente per \mathbf{v} otteniamo il teorema dell'energia:

$$\mu^* \mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mu^* \mathbf{v} \times \mathbf{g} - \mathbf{v} \times \nabla p$$

Ora si ha per ciascun termine:

$$\mu^* \mathbf{v} \times \mathbf{a} = \mu^* \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\mu^* \frac{v^2}{2} \right)$$

$$\mu^* \mathbf{v} \times \mathbf{g} = -g \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} (-g z)$$

avendo scelto, in questo caso l'asse z orientato verso l'alto, in modo che $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_3$.

Nell'ipotesi di *flusso stazionario*, cioè quando si assume che la pressione dipenda dal tempo soltanto tramite il moto delle particelle, cioè che non dipenda esplicitamente dal tempo, si ha anche:

$$p = p(\mathbf{x}) \quad \implies \quad \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \mathbf{v} \times \nabla p$$

Allora il bilancio dell'energia in forma locale si scrive:

$$\frac{d}{dt} \left(\mu^* \frac{v^2}{2} + p + \mu^* g z \right) = 0$$

Da cui si ricava:

$$\frac{1}{2} \mu^* v^2 + p + \mu^* g z = E \quad (\text{MC.69})$$

essendo E la costante dell'energia. Si può riscrivere anche nella forma:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\mu^* g} + z = h_0, \quad h_0 = \frac{E}{\mu^* g} \quad (\text{MC.70})$$

nella quale i singoli addendi hanno le dimensioni di una lunghezza. La (MC.70) prende il nome di *teorema delle tre quote*, dal momento che le tre lunghezze in questione sono interpretabili come *quote* di interesse fisico:

—*quota cinetica*: $\frac{v^2}{2g}$ E' l'altezza dalla quale occorre lasciar cadere, nel vuoto, una massa in caduta libera, perchè raggiunga il suolo con velocità v ;

—*quota piezometrica*: $\frac{p}{\mu^* g}$ E' la quota alla quale il fluido in equilibrio sarebbe soggetto alla pressione p , a causa del suo peso, se la pressione in superficie, alla quota $z = 0$, fosse nulla;

—*quota reale*: z E' la quota reale alla quale viene considerato il fluido soggetto alla pressione p e caratterizzato dalla velocità v delle particelle. Il valore di h_0 viene valutato mediante le condizioni al contorno, cioè per $z = 0$:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\mu^* g}$$

Lavoro delle forze interne

Ci occupiamo ora, per concludere del lavoro delle forze interne attive, espresso dalla (MC.50); espressione che vale in generale per spostamenti qualunque e non solo per gli spostamenti virtuali, e quindi, in particolare vale per gli spostamenti effettuati durante il moto:

$$d\ell^{(i,a)} = \frac{1}{2} t_{ik} \left(\frac{\partial du_i}{\partial x_k} + \frac{\partial du_k}{\partial x_i} \right)$$

del quale cerchiamo un'espressione specializzata per i fluidi e per i solidi.

A) nei fluidi

In un fluido la matrice degli sforzi si caratterizza mediante gli elementi:

$$t_{ik} = p \delta_{ik}$$

Quindi otteniamo la seguente specializzazione del lavoro delle forze interne attive:

$$d\ell^{(i,a)} = p \frac{\partial d u_i}{\partial x_i} = p \nabla \times d \mathbf{u}$$

Tenendo conto che durante il moto si ha:

$$d \mathbf{u} = \mathbf{v} dt$$

si ottiene:

$$d\ell^{(i,a)} = p \nabla \times \mathbf{v} dt$$

Tenendo poi conto dell'equazione di continuità della massa ricaviamo l'espressione finale:

$$d\ell^{(i,a)} = - \frac{p}{\mu} d\mu \quad (\text{MC.71})$$

• Notiamo che se il fluido è incomprimibile abbiamo $d\mu = 0$ e quindi il lavoro delle forze interne risulta nullo come in un corpo rigido.

B) nei solidi

Per il fluido, grazie alla particolare forma isotropa della matrice degli sforzi, è possibile esprimere, come si è visto, il lavoro delle forze interne

in termini delle variabili μ, p , eliminando le variabili cinetiche v . Nel caso di un continuo che non sia un fluido (solido) non si può ottenere lo stesso tipo di risultato mantenendosi dal punto di vista euleriano.

Nell'espressione del lavoro per eliminare la velocità bisogna passare alle variabili lagrangiane. A questo scopo osserviamo che:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial X_J}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial X_J} = F_{Jk}^{-1} \frac{\partial}{\partial X_J} = \frac{1}{D} F_{kJ}^C \frac{\partial}{\partial X_J}$$

Abbiamo così la regola di passaggio da operatori di derivazione euleriani a operatori di derivazione lagrangiani:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{1}{D} F_{kJ}^C \frac{\partial}{\partial X_J} \quad (\text{MC.72})$$

Nell'espressione del lavoro si ha allora:

$$d\ell^{(i,a)} = \frac{1}{D} t_{ik} F_{kJ}^C \frac{\partial du_i}{\partial X_J}$$

Viene allora naturale introdurre la matrice non simmetrica:

$$T_{iJ} = t_{ik} F_{kJ}^C \quad (\text{MC.73})$$

che prende il nome di *matrice non simmetrica di Piola-Kirchhoff*. Si può allora scrivere il lavoro nella forma:

$$d\ell^{(i,a)} = \frac{1}{D} T_{iJ} \frac{\partial du_i}{\partial X_J}$$

in cui compaiono le derivate rispetto alle variabili lagrangiane in luogo di quelle euleriane. Questo è vantaggioso in quanto u_i non dipende dalle

X_J , mentre dipende dalle x_k . Ciò significa che mentre non è possibile scambiare gli operatori d e $\frac{\partial}{\partial x_k}$, è invece possibile scambiare gli operatori d e $\frac{\partial}{\partial X_J}$. Questo è il vantaggio che nasce dall'uso delle variabili lagrangiane. Effettuando lo scambio si ottiene:

$$d\ell^{(i,a)} = \frac{1}{D} T_{iJ} d \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_J} \right)$$

Ricordiamo che:

$$u_i = x_i - \delta_{iI} X_I$$

E quindi:

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_J} = F_{iJ} - \delta_{iJ}$$

Di conseguenza possiamo esprimere il lavoro delle forze interne nella forma in cui non compaiono le velocità:

$$d\ell^{(i,a)} = \frac{1}{D} T_{iJ} dF_{iJ} \quad (\text{MC.74})$$

Questa formulazione ha ancora l'inconveniente di coinvolgere delle matrici in forma mista, con un indice lagrangiano e un indice euleriano; possiamo evitare questo introducendo la matrice degli sforzi completamente lagrangiana e simmetrica:

$$\hat{T}_{IJ} = F_{Ii}^{-1} T_{iJ} = \frac{1}{D} F_{Ii}^C t_{ik} F_{kJ}^C \quad (\text{MC.75})$$

che prende il nome di *matrice simmetrica di Piola-Kirchhoff*. Esprimendo il lavoro delle forze interne attive in termini di questa nuova matrice possiamo scrivere la sua espressione in forma completamente lagrangiana:

$$d\ell^{(i,a)} = \frac{1}{D} F_{kI} \hat{T}_{IJ} dF_{kJ}$$

Ora:

$$\hat{T}_{IJ} F_{kI} dF_{kJ} = \frac{1}{2} (F_{kI} dF_{kJ} + F_{kJ} dF_{kI}) = \frac{1}{2} T_{IJ} d(F_{Ik}^T F_{kJ})$$

grazie alla simmetria di \hat{T}_{IJ} .

Quindi si ottiene la forma completamente lagrangiana del lavoro delle forze interne attive:

$$d\ell^{(i,a)} = \frac{1}{D} \hat{T}_{IJ} dB_{IJ} = \frac{1}{D} \hat{T}_{IJ} d\varepsilon_{IJ} \quad (\text{MC.76})$$