

## *EL. Equazioni di Lagrange*

Abbiamo seguito, finora, un certo parallelismo fra il modo di trattare la statica e la dinamica: siamo riusciti a stabilire, per il punto materiale, la condizione di equilibrio e, in corrispondenza, l'equazione fondamentale del moto; per i sistemi di punti materiali, con particolare vantaggio per i corpi rigidi, le equazioni cardinali della statica e le equazioni cardinali della dinamica, equazioni che risultano essere necessarie e sufficienti per l'equilibrio, e rispettivamente, per determinare il moto dei corpi rigidi.

Per la statica dei sistemi a vincoli lisci abbiamo, poi stabilito, come condizione necessaria e sufficiente a determinare l'equilibrio, il principio dei lavori virtuali, che costituisce una metodologia molto potente, richiedendo la sola conoscenza delle forze attive e non coinvolgendo le reazioni vincolari nel problema dell'equilibrio.

- *Problema.* Ora ci domandiamo se è possibile proseguire il parallelismo tra statica e dinamica dando una versione del principio dei lavori virtuali per la dinamica dei sistemi a vincoli lisci, e in particolare, specializzarlo per i sistemi olonomi.

- *Osservazione.* A questo scopo osserviamo che il *principio dei lavori virtuali* può essere stabilito in forza del *principio delle reazioni vincolari* che permette di definire in maniera generale i vincoli lisci. Storicamente tale principio è nato nell'ambito della statica, tuttavia viene comunemente ammesso come valido anche in dinamica, in quanto l'esperienza mostra che esso viene rispettato anche in regime dinamico da quei vincoli che lo soddisfano in regime di equilibrio.

Con questa assunzione si può stabilire l'estensione del principio dei lavori virtuali, in modo del tutto analogo a quanto si è visto in statica, anche nella dinamica.

Possiamo riassumere quanto finora osservato nel seguente schema che mostra il parallelismo tra statica e dinamica per un sistema di punti materiali:

$$\mathcal{S} = \{(P_s, m_s); s = 1, 2, \dots, n\}$$

a vincoli lisci.

<i>Statica</i>	<i>Dinamica</i>
<i>condizioni di equilibrio</i>	<i>equazioni del moto</i>
$\mathbf{F}_s + \Phi_s = 0$	$m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{F}_s + \Phi_s$
<i>vincoli lisci</i>	<i>vincoli lisci</i>
$\delta L^{(v)} \geq 0, \quad \forall \delta P_s$	$\delta L^{(v)} \geq 0, \quad \forall \delta P_s$
<i>principio dei lavori virtuali</i>	
$\delta L^{(a)} \leq 0, \quad \forall \delta P_s$	???

### *Disuguaglianza variazionale della dinamica*

Per ogni punto materiale del sistema vale, in dinamica, supposto che l'osservatore del moto sia inerziale, l'equazione fondamentale:

$$m_s \mathbf{a}_s = \mathbf{F}_s + \Phi_s, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

che possiamo riscrivere esplicitando la reazione vincolare:

$$\Phi_s = -(\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s)$$

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri per  $\delta P_s$  e sommando sull'indice  $s$  otteniamo:

$$\sum_{s=1}^n \Phi_s \times \delta P_s = - \sum_{s=1}^n (\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s) \times \delta P_s$$

A primo membro riconosciamo il lavoro virtuale delle reazioni vincolari; assumendo che i vincoli siano lisci e che il principio delle reazioni vincolari sia valido anche in dinamica abbiamo:

$$\delta L^{(v)} \geq 0, \quad \forall \delta P_s$$

Di conseguenza risulta:

$$\boxed{\sum_{s=1}^n (\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s) \times \delta P_s \leq 0, \quad \forall \delta P_s} \quad (\text{EL.1})$$

Questa condizione rappresenta l'estensione cercata del principio dei lavori virtuali alla dinamica. Essa prende il nome di *disuguaglianza variazionale della dinamica*.

### *Principio di D'Alembert*

Il risultato appena ottenuto ammette un'interpretazione interessante. Infatti si può osservare che il passaggio dal principio dei lavori virtuali alla disuguaglianza variazionale della dinamica si ottiene con una regola molto semplice: dove nella statica sono presenti le forze attive  $\mathbf{F}_s$  in dinamica troviamo le quantità  $\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \textit{Statica} & & \textit{Dinamica} \\
 \mathbf{F}_s & \longrightarrow & \mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s
 \end{array}$$

In particolare, applicando questa regola, l'equazione fondamentale del moto del singolo punto del sistema  $P_s$  si può ottenere partendo dalla corrispondente condizione di equilibrio:

$$\begin{array}{ccc}
 \textit{Statica} & & \textit{Dinamica} \\
 \mathbf{F}_s + \boldsymbol{\Phi}_s = 0 & \longrightarrow & (\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s) + \boldsymbol{\Phi}_s = 0
 \end{array}$$

D'Alembert osservò che l'equazione del moto così scritta si può interpretare come una condizione di equilibrio fra le forze  $\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s$  e le reazioni vincolari e diede il nome di *forze perdute* alle quantità che rimpiazzano le forze attive:

$$\mathbf{F}_s^{(p)} = \mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s$$

*Forze perdute* in quanto vengono spese contro il vincolo e non sviluppano accelerazione; sono quindi perdute ai fini del moto. Si può dunque affermare che:

*Durante il moto le forze perdute e le reazioni vincolari si fanno equilibrio*

Questo enunciato è noto come *principio di D'Alembert* ed equivale alla regola di passaggio dalla statica alla dinamica stabilita in precedenza.

Si può allora riscrivere la disuguaglianza variazionale della dinamica nella forma semplice:

$$\delta L^{(p)} \leq 0, \quad \forall \delta P_s$$

### Equazioni di Lagrange

Ora, per poter utilizzare la disuguaglianza variazionale della dinamica, ed ottenere le equazioni del moto di Lagrange, dobbiamo procedere facendo diverse ipotesi:

- i) *vincoli lisci*
- ii) *vincoli bilaterali*
- iii) *sistema olonomo*

— L'ipotesi che i vincoli siano lisci, come sappiamo, comporta che il principio dei lavori virtuali sia una condizione anche necessaria per l'equilibrio di un sistema meccanico, e permette, quindi, di determinare *tutte* le configurazioni di equilibrio del sistema. Analogamente, dal punto di vista dinamico, la condizione che i vincoli siano lisci comporta che la disuguaglianza variazionale della dinamica sia una condizione necessaria, oltre che sufficiente, ai fini della determinazione del moto di un sistema meccanico, e permette, quindi, di determinare *tutti* i moti del sistema.

— L'ipotesi che i vincoli siano bilaterali garantisce che tutti gli spostamenti siano *reversibili* e quindi comporta che la (EL.1) risulti valida sotto forma di uguaglianza:

$$\sum_{s=1}^n (\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s) \times \delta P_s = 0, \quad \forall \delta P_s \quad (\text{EL.2})$$

A tale condizione si dà il nome di *relazione simbolica della dinamica*. Questa condizione è valida anche in presenza di vincoli unilaterali, fino a che

il sistema si mantiene in configurazioni ordinarie, mentre perde la sua validità nelle configurazioni di confine.

- Dal punto di vista analitico l'esclusione delle configurazioni di confine si rende necessaria per il fatto che in configurazione di confine possono verificarsi gli *urti*, cioè quelle situazioni in cui le grandezze cinematiche possono perdere la continuità; e quindi, essendo la continuità condizione necessaria per la differenziabilità, non è più possibile la formulazione del problema in termini di equazioni differenziali, ma occorre una formulazione in termini di leggi di bilancio integrali.

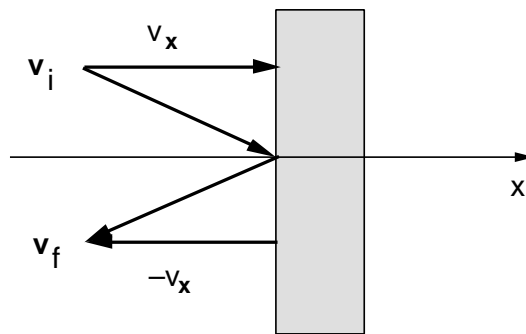


Figura EL. 1: perdita di continuità della velocità in configurazione di confine

Dal momento che noi siamo qui interessati ad una formulazione in termini di equazioni differenziali del moto, questa ipotesi si rende indispensabile.

- Osserviamo che in statica questo problema non sussiste, in quanto le equazioni della statica sono equazioni algebriche e non differenziali; di conseguenza non richiedono alcuna differenziabilità, e quindi, l'equilibrio in configurazioni di confine può essere studiato senza problemi.

— L'ipotesi che il sistema sia olonomo permette di introdurre i parametri lagrangiani e lo spazio delle configurazioni per descrivere il moto del sistema meccanico.

Se il sistema è olonomo, a  $N$  gradi di libertà, possiamo identificare i punti del sistema mediante le relazioni:

$$OP_s = OP_s(q_1, q_2, \dots, q_N, t)$$

ed esprimere gli spostamenti virtuali come:

$$\delta P_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h$$

Questa informazione, introdotta nella (EL.2) comporta:

$$\sum_{s=1}^n \mathbf{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h - \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h = 0, \quad \forall \delta q_h$$

Possiamo introdurre le componenti lagrangiane delle forze attive:

$$Q_h = \sum_{s=1}^n \mathbf{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$

E analogamente le quantità:

$$\tau_h = \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (\text{EL.3})$$

Otteniamo allora la condizione:

$$(Q_h - \tau_h) \delta q_h = 0, \quad \forall \delta q_h$$

Ovvero in termini di vettori nello spazio delle configurazioni:

$$(\mathbf{Q} - \boldsymbol{\tau}) \times \delta \mathbf{q} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (\text{EL.4})$$

essendo:

$$\mathbf{Q} \equiv (Q_h), \quad \boldsymbol{\tau} \equiv (\tau_h)$$

Dal momento che le forze possono dipendere solo dalle posizioni e dalle velocità dei punti e al più dal tempo, ma non dagli spostamenti virtuali, si ha:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

Le quantità  $\boldsymbol{\tau}$  coinvolgendo le accelerazioni dipendono anche dalle derivate seconde, ma comunque non dagli spostamenti virtuali:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$$

Allora il prodotto scalare (EL.4), grazie all'arbitrarietà degli spostamenti virtuali, può annullarsi solo a condizione che:

$$\mathbf{Q} - \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Q_h - \tau_h = 0$$

Scritto per esteso il risultato ottenuto rappresenta un sistema di  $N$  equazioni differenziali per le  $N$  funzioni incognite  $q_h(t)$  che descrivono il moto del sistema olonomo:



$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = Q_1 \\ \tau_2 = Q_2 \\ \dots \\ \tau_N = Q_N \end{array} \right.$$

in cui i termini differenziali compaiono in  $\tau_h$ . Per rendere utilizzabile praticamente questo sistema di equazioni differenziali dobbiamo esprimere  $\tau_h$  mediante una grandezza macroscopica, caratteristica del sistema meccanico e che siamo in grado di calcolare.

Mostriamo che sussiste il seguente legame di  $\tau_h$  con l'energia cinetica del sistema:

$$\tau_h = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \quad (\text{EL.5})$$

#### DIMOSTRAZIONE

Partendo dall'espressione dell'energia cinetica di un sistema particellare:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s v_s^2$$

abbiamo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial v_s^2}{\partial q_h} \right)$$

Bisogna allora dimostrare che:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_s^2}{\partial q_h} = \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (\text{EL.6})$$

Esaminiamo il primo termine a primo membro:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{v}_s \times \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \dot{q}_h} \right) = \mathbf{a}_s \times \frac{\partial v_s}{\partial \dot{q}_h} + \mathbf{v}_s \times \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s}{\partial \dot{q}_h}$$

Ma la velocità in un sistema olonomo si scrive:

$$\mathbf{v}_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

Essendo  $OP_s$  indipendente da  $\dot{q}_h$  derivando rispetto a questa variabile si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$

Quindi sostituendo si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial v_s^2}{\partial \dot{q}_h} = \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} + \mathbf{v}_s \times \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (\text{EL.7})$$

Esaminando ora il secondo termine si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v_s^2}{\partial q_h} = \mathbf{v}_s \times \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{dP_s}{dt} = \mathbf{v}_s \times \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \quad (\text{EL.8})$$

Nella precedente lo scambio dell'ordine di derivazione risulta legittimo in quanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{dP_s}{dt} &= \frac{\partial}{\partial q_h} \left( \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_s}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 P_s}{\partial q_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 P_s}{\partial q_h \partial t} = \\ &= \left( \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial P_s}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \end{aligned}$$

Ma i risultati (EL.7) e (EL.8) comportano proprio la (EL.6).

Dunque le equazioni differenziali del moto di un sistema olonomo a vincoli lisci assumono la forma definitiva:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h} \quad (\text{EL.9})$$

Sono queste *le equazioni di Lagrange*.

#### *Sistemi conservativi: lagrangiana*

Quando il sistema delle forze attive è conservativo le componenti lagrangiane delle forze si possono esprimere come derivate parziali di un potenziale rispetto ai parametri lagrangiani:

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}, \quad U = U(q_k, t)$$

Dal momento che il potenziale non dipende dalle  $\dot{q}_h$  si ha:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} = 0$$

Quindi le equazioni di Lagrange (EL.9) si possono riscrivere:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_h} (T + U) - \frac{\partial}{\partial q_h} (T + U) = 0$$

Quando il sistema delle forze è conservativo, allora, si introduce in maniera naturale la *funzione di Lagrange* o *lagrangiana*:

$$\mathcal{L} = T + U \quad (\text{EL.10})$$

e si scrivono mediante essa le equazioni di Lagrange nella forma:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0} \quad (\text{EL.11})$$

Si osserva che la funzione di Lagrange è definita a meno di una costante additiva a causa del fatto che contiene come addendo il potenziale che è indeterminato a meno di una costante additiva. Inoltre, moltiplicando la lagrangiana per un fattore costante non nullo, si ottengono sempre le stesse equazioni del moto; per cui la lagrangiana risulta definita anche a meno di un fattore di scala.

### *Potenziali generalizzati*

Il caso del sistema conservativo non è l'unico che rende possibile l'introduzione della lagrangiana e la scrittura delle equazioni di Lagrange nella forma (EL.11). Infatti questa scrittura risulta essere compatibile con la scrittura (EL.9) delle stesse equazioni del moto qualora le componenti lagrangiane delle forze attive si possano esprimere nella forma:

$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h} \quad (\text{EL.12})$$

dove la funzione  $U$ , che prende il nome di *potenziale generalizzato*, non rappresenta più, in generale, un potenziale di una forza conservativa, essendo una funzione che può dipendere anche dalle  $\dot{q}_h$ :

$$U = U(q_k, \dot{q}_k, t)$$

Va messo in evidenza il fatto che  $U$  può dipendere solo *linearmente* da  $\dot{q}_k$ , infatti dalla (EL.12) si ha:

$$Q_h(q_k, \dot{q}_k, t) = \frac{\partial U}{\partial q_h} - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_\ell} \ddot{q}_\ell - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial q_\ell} \dot{q}_\ell - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial t}$$

Dal momento che  $Q_h$  non dipende da  $\ddot{q}_k$  è chiaro che deve risultare:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_\ell} = 0$$

Quindi si può scrivere:

$$U = f_h(q_k, t) \dot{q}_h + g(q_k, t)$$

E quindi:

$$Q_h = \left( \frac{\partial f_k}{\partial q_h} - \frac{\partial f_h}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial g}{\partial q_h} - \frac{\partial f_h}{\partial t} = \alpha_{hk} \dot{q}_k + \beta_h$$

dove sussiste evidentemente la condizione di antisimmetria:

$$\alpha_{kh} = -\alpha_{hk}$$

Per distinguere un potenziale generalizzato da un potenziale che caratterizza un sistema di forze conservativo chiameremo, d'ora in poi, quest'ultimo *potenziale ordinario*.

### *Forze giroscopiche*

Un sistema di forze si dice *giroscopico* quando il lavoro di tali forze si mantiene nullo durante il moto.

In particolare si osserva che, quando le forze derivano da un potenziale generalizzato e  $\beta_h = 0$ , il lavoro compiuto dalle forze attive durante il moto risulta essere nullo, ovvero è nulla la potenza sviluppata dalle forze attive:

$$W = Q_h \dot{q}_h = \alpha_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k = 0$$

a causa dell'antisimmetria dei coefficienti e quindi il sistema di forze è giroscopico.

Un esempio fisico ben noto è fornito dalla *forza di Lorentz* agente su di una carica elettrica puntiforme  $e$  che si muove con velocità  $\mathbf{v}$  in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$$

essendo  $\mathbf{A}$  il *potenziale vettore*. Tenendo conto che, grazie alle proprietà dell'operatore  $\nabla$  si ha:

$$\nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \times \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{A}$$

e che in questo caso  $\mathbf{v}$ , essendo la velocità, è una variabile indipendente dalle coordinate della carica, segue:

$$\nabla(\mathbf{v} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{v} \times \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$$

E quindi:

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = e \mathbf{v} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(e \mathbf{v} \times \mathbf{A}) - \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}}(e \mathbf{v} \times \mathbf{A})$$

da cui potenziale generalizzato della forza di Lorentz:

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = e \mathbf{v} \times \mathbf{A}$$

La forza risulta essere giroscopica dal momento che il termine  $\beta_h = 0$ ; infatti la potenza sviluppata durante il moto è chiaramente nulla:

$$W = \mathbf{F} \times \mathbf{v} = e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \times \mathbf{v} = 0$$

### *Forze dissipative*

Un sistema di forze si dice *dissipativo* quando il lavoro compiuto durante il moto si mantiene negativo o al più nullo.

In particolare se le corrispondenti forze generalizzate di Lagrange sono funzioni lineari omogenee di  $\dot{q}_k$ :

$$Q_h = -\gamma_{hk} \dot{q}_k$$

esse risultano dissipative se la matrice  $\|\gamma_{hk}\|$  è semidefinita positiva, in quanto la potenza sviluppata da tali forze è data da:

$$W = Q_h \dot{q}_h = -\gamma_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k \leq 0$$

Si può allora introdurre la *funzione di dissipazione*:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \gamma_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k \quad (\text{EL.13})$$

Di conseguenza le forze dissipative di questo tipo si possono far derivare, anzichè da un potenziale ordinario come le forze conservative o da un potenziale generalizzato come le forze giroscopiche, da una funzione di dissipazione. Risulta allora:

$$Q_h = - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h}$$

Nel caso in cui siano presenti contemporaneamente forze conservative, forze giroscopiche e forze dissipative lineari, allora, le equazioni di Lagrange possono essere scritte nella forma seguente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_h} = 0$$

avendo separato la parte delle forze generalizzate che deriva da un potenziale da quella che deriva da una funzione di dissipazione.

### *Considerazioni analitiche*

Il sistema delle equazioni di Lagrange è un sistema differenziale di ordine  $2N$ , come si vede facilmente sviluppando la derivata rispetto al tempo nella (EL.9), da cui si ottiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_h \partial t} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h$$



In un sistema olonomo l'energia cinetica si scrive come forma quadratica:

$$T = \frac{1}{2} a_{hk}(q_\ell, t) \dot{q}_h \dot{q}_k + b_h(q_\ell, t) \dot{q}_h + d(q_\ell, t)$$

Per cui si ha che la matrice dei coefficienti delle derivate seconde, che sono le derivate di ordine più elevato, è la matrice dell'energia cinetica:

$$\frac{\partial^2 T}{\dot{q}_h \dot{q}_k} = a_{hk}$$

Salvo casi degeneri, questa matrice è definita positiva e quindi è non singolare. Perciò il sistema delle equazioni di Lagrange può essere portato in forma normale risolvendolo rispetto alle derivate di ordine più elevato. Notiamo che la presenza di un potenziale generalizzato, dovendo essere quest'ultimo una funzione lineare delle  $\dot{q}_\ell$  non contribuisce alla formazione dei coefficienti delle  $\ddot{q}_\ell$ .

#### *Integrale generale e integrali particolari del moto*

Si estendono alle equazioni di Lagrange i concetti di *integrale generale del moto* e di *integrale particolare del moto* già noti per la dinamica del punto e dei sistemi.

— Si dice *integrale generale del moto* l'integrale generale del sistema delle equazioni del moto, cioè la *famiglia delle  $\infty^{2N}$  soluzioni del sistema* (EL.9), caratterizzata da  $2N$  costanti, tante quanto è l'ordine del sistema differenziale. L'integrale generale si può rappresentare come:

$$q_h = q_h(t, c_1, c_2, \dots, c_{2N}) \quad (\text{EL.14})$$

— Si dice *integrale particolare del moto* un integrale particolare del sistema differenziale del moto, cioè una delle soluzioni che si ottiene assegnando un valore particolare a ciascuna delle  $2N$  costanti  $c_1, c_2, \dots, c_{2N}$ ,

ovvero assegnando le condizioni iniziali sui parametri lagrangiani e sulle loro derivate prime rispetto al tempo.

### *Integrale primo del moto*

Una funzione:

$$\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$$

si dice *integrale primo del moto* quando, sostituendo in essa alle variabili  $q_h, \dot{q}_h$  le funzioni  $q_h(t)$  che rappresentano un integrale particolare del moto e le loro derivate temporali, la funzione  $\psi$  assume un valore costante nel tempo:

$$\psi(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t), t) = C, \quad \forall t$$

Il valore della costante può essere calcolato facilmente utilizzando le condizioni iniziali, grazie al fatto che  $\psi$  mantiene in ogni istante il valore iniziale.

### *Coordinate cicliche o ignorabili*

Quando il moto di un sistema meccanico è governato da una lagrangiana  $\mathcal{L}$  è possibile dare la definizione di *coordinata ciclica* o *ignorabile*.

Una coordinata lagrangiana  $q_{\bar{h}}$  si dice *coordinata ciclica* o *ignorabile* se non compare direttamente nella lagrangiana, ma solamente attraverso la sua derivata temporale.

Di conseguenza  $\mathcal{L}$  risulta indipendente da  $q_{\bar{h}}$  e si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{\bar{h}}} = 0$$

E perciò la corrispondente equazione di Lagrange diviene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = 0$$

E quindi la funzione:

$$p_h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = \text{costante}$$

è un integrale primo del moto. Ad ogni coordinata ciclica viene quindi a corrispondere un integrale primo del moto; questo risultato rende particolarmente utile la presenza di coordinate cicliche in una lagrangiana.

Un esempio familiare può essere offerto dalla seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k^2 x^2$$

che conduce alle equazioni del moto di un punto materiale soggetto ad una forza elastica parallela all'asse delle ascisse, avente centro nell'origine. I parametri lagrangiani sono qui le coordinate del punto  $x, y, z$  e si osserva che le coordinate  $y, z$  sono cicliche, in quanto non compaiono direttamente nella lagrangiana, ma solamente attraverso le loro derivate temporali. Restano allora individuati i due integrali primi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} = m \dot{y}_0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} = m \dot{z}_0$$

che rappresentano le componenti  $y$  e  $z$  della quantità di moto del punto.

*Osservazioni*

A conclusione facciamo qualche considerazione complementare sul principio di D'Alembert che è stato esaminato sopra. Viene naturale domandarsi se l'interpretazione delle equazioni del moto come condizioni di equilibrio è una formalità matematica oppure ha un senso fisico; in altri termini se esiste un osservatore rispetto al quale, durante il moto il sistema si trova effettivamente in equilibrio. La risposta è immediata, in quanto ogni punto è sempre in equilibrio rispetto ad un osservatore la cui origine si trova in quel punto.

Infatti se scriviamo, per il generico punto  $P_s$  la condizione di equilibrio relativo del punto rispetto ad un osservatore la cui origine  $\Omega$  si trova in  $P_s$  e i cui assi sono comunque orientati, avremo:

$$\mathbf{F}_s + \mathbf{F}_s^{(\tau)} + \mathbf{\Phi}_s = 0$$

essendo:

$$\mathbf{F}_s^{(\tau)} = -m_s \mathbf{a}_s^{(\tau)}$$

la forza di trascinamento. Ma  $P_s \equiv \Omega$  e quindi l'accelerazione di trascinamento vale semplicemente:

$$\mathbf{a}_s^{(\tau)} = \mathbf{a}_s$$

La condizione di equilibrio relativo si scrive, dunque:

$$\mathbf{F}_s - m_s \mathbf{a}_s + \mathbf{\Phi}_s = 0$$

E questa è proprio l'equazione del moto rispetto all'osservatore inerziale (assoluto).

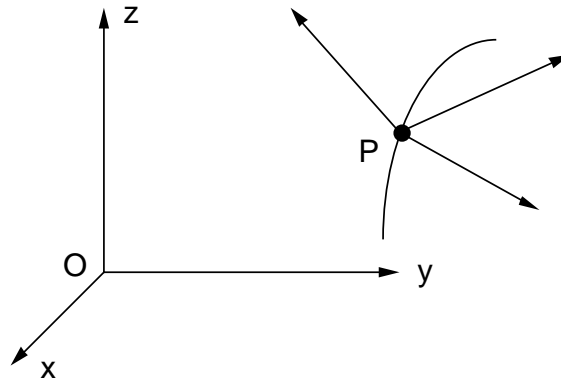


Figura EL. 2: legame fra il moto e l'equilibrio relativo del punto di un sistema

Evidentemente se il sistema materiale è costituito da un solo punto basta individuare un unico osservatore relativo rispetto al quale il punto si trova in equilibrio, mentre se il sistema materiale è costituito da più punti, generalmente non si riesce a trovare uno stesso osservatore relativo rispetto al quale l'intero sistema sia in equilibrio. Tuttavia vale la pena osservare che se il corpo è rigido ogni sistema di assi solidale con il corpo rigido rappresenta un osservatore relativo rispetto al quale *ogni punto* del corpo è sempre in equilibrio. Scrivendo le equazioni cardinali della statica per l'equilibrio relativo del corpo rigido rispetto ad un osservatore solidale abbiamo:

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{(e,a)} + \mathbf{R}^{(\tau)} + \mathbf{R}^{(e,v)} = 0 \\ \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,a)} + \mathbf{M}_{\Omega}^{(\tau)} + \mathbf{M}_{\Omega}^{(e,v)} = 0 \end{cases}$$

Ma:

$$\mathbf{R}^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s^{(\tau)}$$

$$\mathbf{M}_\Omega^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s^{(\tau)}$$

Ma all'equilibrio relativo l'accelerazione relativa e l'accelerazione di Coriolis sono nulle, perciò, per il teorema di Coriolis l'accelerazione di trascinamento e l'accelerazione assoluta coincidono:

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{a}_s^{(\tau)}$$

Dunque:

$$\mathbf{R}^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s = -\dot{\mathbf{Q}}$$

$$\mathbf{M}_\Omega^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n \Omega P_s \wedge m_s \mathbf{a}_s = -\dot{\mathbf{K}}_\Omega - m \mathbf{v}_\Omega \wedge \mathbf{v}_G$$

E le equazioni dell'equilibrio relativo divengono le equazioni cardinali della dinamica.

Nel caso del sistema, olonoma, infine, il sistema si può rappresentare con un punto dello spazio delle configurazioni ed esiste, in questo spazio, la possibilità di scrivere rispetto allo stesso osservatore le condizioni di equilibrio relativo, imponendo l'annullarsi delle componenti lagrangiane delle forze attive alle quali si aggiungono le componenti lagrangiane delle forze di trascinamento:

$$Q_h + Q_h^{(\tau)} = 0$$

Ma in questo caso:

$$Q_h^{(\tau)} = - \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s^{(\tau)} \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} = - \sum_{s=1}^n m_s \mathbf{a}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} = - \tau_h$$

E quindi la condizione di equilibrio relativo conduce alle equazioni di Lagrange. A conclusione vale la pena notare come la sufficienza delle equazioni cardinali della statica per l'equilibrio di un corpo rigido, grazie al principio di D'Alembert si estende automaticamente alla dinamica, garantendo, in questo modo, che le equazioni cardinali della dinamica oltre ad essere condizioni necessariamente verificate durante il moto di qualunque sistema meccanico, divengono condizioni anche sufficienti a determinare tutti i possibili moti di un sistema se questo è rigido.