Dinamica

DP. Dinamica del punto

Integrale generale e integrali particolari del moto

L'equazione fondamentale della dinamica del punto, riferita ad un *osservatore inerziale:*

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t)$$

quando viene proiettata su un sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$, si presenta come un *sistema differenziale del sesto ordine* che si scrive, nella sua forma più generale:

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = f_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\,\ddot{y} = f_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\,\ddot{z} = f_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases} \tag{DP.1}$$

Questo sistema prende il nome di *sistema delle equazioni differenziali del moto del punto.* Il problema è ben posto, come accade per le forze di natura fisica conosciute, quando la forza è una funzione lipschitziana.

— Si dice *integrale generale del moto* l'integrale generale del sistema delle equazioni del moto, ovvero la *famiglia delle* ∞^6 *soluzioni del sistema (*DP.1), caratterizzata da sei parametri, tanti quanto è l'ordine del sistema differenziale. L'integrale generale, dunque si può rappresentare come l'insieme di funzioni del tempo e di sei costanti:

$$\begin{cases} x = x(t, c_1, c_2, \cdots, c_6) \\ y = y(t, c_1, c_2, \cdots, c_6) \\ z = z(t, c_1, c_2, \cdots, c_6) \end{cases} \tag{DP.2}$$

Dal punto di vista fisico questo risultato, ben noto dall'analisi, significa che la stessa forza $\boldsymbol{f}$, applicata al punto P di massa m, può realizzare non un solo moto, ma tutti i moti corrispondenti alle soluzioni (DP.2).

— Si dice *integrale particolare del moto* un integrale particolare del sistema differenziale del moto, cioè *una* delle soluzioni che si ottiene assegnando un valore particolare a ciascuna delle sei costanti $c_1, c_2, \cdots, c_6$.

Un integrale particolare rappresenta uno dei possibili moti che la forza $\boldsymbol{f}$ può realizzare quando è applicata al punto P di massa m.

Il valore delle costanti $c_1, c_2, \cdots, c_6$ è correlato con le *condizioni iniziali,* cioè con il valori che le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ e le loro derivate temporali prime, assumono all'istante iniziale del moto, generalmente fatto coincidere con $t = 0$, attraverso il *sistema algebrico:*

$$\begin{cases} x(0, c_1, c_2, \cdots, c_6) = x_0 \\ y(0, c_1, c_2, \cdots, c_6) = y_0 \\ z(0, c_1, c_2, \cdots, c_6) = z_0 \\ \dot{x}(0, c_1, c_2, \cdots, c_6) = \dot{x}_0 \\ \dot{y}(0, c_1, c_2, \cdots, c_6) = \dot{y}_0 \\ \dot{z}(0, c_1, c_2, \cdots, c_6) = \dot{z}_0 \end{cases} \tag{DP.3}$$

Il teorema di unicità della soluzione garantisce che il sistema delle sei equazioni (DP.3) per le sei incognite $c_1, c_2, \cdots, c_6$ ammette una e una sola soluzione in corrispondenza di ogni insieme di valori iniziali assegnati $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Risolto il sistema (DP.3) si ottengono le costanti:

$$c_k = c_k(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \qquad k = 1, 2, \cdots, 6$$

in termini delle condizioni iniziali.

Integrali primi del moto

Una funzione:

$$\psi = \psi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

si dice *integrale primo del moto* di un punto, governato dal sistema (DP.1), quando, sostituendo in essa alle variabili $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, le funzioni $x(t), y(t), z(t)$ che rappresentano un integrale particolare del moto e le loro derivate temporali, assume un valore costante nel tempo:

$$\psi(x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t)\,, \dot{x}\,(t)\,, \dot{y}\,(t)\,, \dot{z}\,(t)\,, t) = C, \qquad \forall t$$

Si può quindi dire che un integrale primo del moto è una grandezza che si mantiene costante durante il moto, o anche che si conserva durante il moto.

• Notiamo che per un dato sistema di equazioni del moto possono non esistere integrali primi del moto.

Il valore della costante C, che dipende dall'integrale particolare considerato, e quindi dalle condizioni iniziali, può essere calcolato in maniera rapida, tenendo conto che, dal momento che ψ si mantiene costante durante il moto, essa mantiene in ogni istante il valore iniziale. Allora si ha:

$$C = \psi(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, 0)$$

Teorema dell'energia cinetica

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione fondamentale della dinamica del punto, scalarmente per lo spostamento dP che il punto mobile compie nell'intervallo di tempo dt (spostamento fisico) otteniamo:

$$m\,\boldsymbol{a} \times dP = \boldsymbol{f} \times dP$$

Riconosciamo subito, a secondo membro il lavoro della forza $\boldsymbol{f}$:

$$dL = \boldsymbol{f} \times dP$$

Il primo membro lo possiamo riscrivere:

$$m\,\boldsymbol{a} \times dP = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \times \boldsymbol{v}\,dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}^2\right)\,dt = \frac{dT}{dt}\,dt = dT$$

essendo:

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}^2$$

l'energia cinetica del punto. Si giunge così al teorema dell'energia cinetica:

$$\boxed{dT = dL} \tag{DP.4}$$

Considerazioni analitiche

Vale la pena fare una considerazione di carattere analitico. Il teorema dell'energia cinetica non fornisce un' *identità* tra forme differenziali, come si ha invece nel caso della relazione tra lavoro e potenziale di una forza conservativa, ma un'uguaglianza valida solamente durante il moto. Infatti:

$$dL = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

è una forma differenziale nelle variabili x, y, z, mentre:

$$dT = m\, v_x\; dv_x + m\, v_y\; dv_y + m\, v_z\; dv_z$$

è una forma differenziale nelle componenti della velocità. L'uguaglianza (DP.4) non può quindi sussistere per qualunque spostamento del punto dP, non essendo un'identità, ma sussiste solamente in corrispondenza dello spostamento $dP = \boldsymbol{v}(t)\, dt$ che il punto compie effettivamente durante il moto, spostandosi lungo la traiettoria fisica del moto. In altri termini x, y, z non sono qui variabili indipendenti e neppure lo sono v_x, v_y, v_z, ma sono delle funzioni del tempo, che è l'unica variabile indipendente durante il moto. Le due forme differenziali così calcolate vengono allora a identificarsi. Il lavoro calcolato lungo un elemento di traiettoria si può esprimere:

$$dL = \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v}\, dt = W\, dt$$

dove:

$$W = \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v}$$

rappresenta la potenza sviluppata dalla forza, durante il moto. La (DP.4) si può allora scrivere anche nella forma:

$$\frac{dT}{dt} = W \tag{DP.5}$$

Integrale primo dell'energia

Quando la forza $\boldsymbol{f}$ applicata al punto $P \equiv (x_i)$ è *conservativa* è possibile, esprimerla come il gradiente del potenziale $U = U(x_i)$:

$$\boldsymbol{f} = \nabla U$$

Introducendo l'informazione che la forza è conservativa nel teorema dell'energia cinetica, per esempio utilizzando la forma (DP.5), otteniamo:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt} \times \nabla U = \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{dU}{dt}$$

pensando $U(x_i(t))$ come funzione composta del tempo tramite x_i. Di conseguenza si è ottenuto:

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0$$

Segue:

$$T - U = costante$$

La quantità $T - U$ assume valore costante durante il moto del punto. Per il moto del punto soggetto a una forza conservativa si introduce allora la funzione:

$$E = T - U \tag{DP.6}$$

che prende il nome di *energia meccanica* la quale risulta essere un integrale primo del moto. Ad esso si dà il nome di *integrale primo dell'energia.*

Scritta per esteso l'energia meccanica di un punto si presenta come:

$$E = \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

Essa è una funzione delle coordinate del punto e delle componenti della velocità che assume valore costante quando alle variabili si sostituisce un'integrale particolare del moto.

Spesso in fisica si preferisce introdurre *l'energia potenziale*:

$$V = -U$$

in modo da esprimere l'energia meccanica sotto forma di somma di due contributi energetici, anzichè come differenza:

$$E = T + V$$

Integrale primo delle aree

Un altro esempio di integrale primo del moto si ha nei moti centrali, che avvengono quando un punto si muove in un campo di forze centrali. In questo caso, infatti, per definizione di forza centrale, la forza $\boldsymbol{f}$ è parallela al vettore OP, essendo O il centro delle forze:

$$OP \wedge \boldsymbol{f} = 0$$

Di conseguenza, essendo supposto che l'osservatore del moto sia inerziale, per l'equazione fondamentale della dinamica del punto, si ha:

$$OP \wedge m\,\boldsymbol{a} = 0$$

Supposta evidentemente non nulla la massa del punto segue che il moto è centrale, cioè:

$$OP \wedge \boldsymbol{a} = 0$$

Ma questa condizione, come si è visto in cinematica comporta:

$$\frac{d}{dt}\left(OP \wedge \boldsymbol{v}\right) = 0$$

ovvero:

$$OP \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$$

con $\boldsymbol{c}$ vettore costante. Dunque la funzione vettoriale $OP \wedge \boldsymbol{v}$ si mantiene costante durante il moto, cioè quando al posto di OP si sostituisce un integrale particolare $OP(t)$ del moto e al posto di $\boldsymbol{v}$ la derivata temporale di $OP(t)$: Si conclude, allora, che si tratta di un integrale primo del moto. Esso prende il nome di *integrale primo delle aree* in quanto esprime la costanza della velocità areale durante il moto. Notiamo anche che la quantità:

$$\boldsymbol{K}_O = OP \wedge m\,\boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{c}$$

che rappresenta il momento della quantità di moto del punto P rispetto al polo O è esso pure costante durante il moto, e rappresenta un integrale primo dipendente da quello delle aree. Si può quindi anche dire che in un moto centrale l'integrale primo delle aree è equivalente alla legge di conservazione del momento della quantità di moto del punto mobile, calcolato rispetto al centro delle forze, preso come polo.

Dinamica del punto materiale libero

Moto di un grave

Iniziamo con la dinamica di un grave in assenza di resistenza del mezzo. Un grave è un corpo soggetto alla forza peso: in prima approssimazione, quando non si tiene conto della struttura del corpo, si schematizza il grave con un punto, coincidente con il suo baricentro, al quale è applicata la forza peso. In tal modo il problema viene ricondotto ad un problema di dinamica del punto materiale libero. L'equazione differenziale del moto si scrive, rispetto ad un osservatore inerziale:

$$m\,\boldsymbol{a} = m\,\boldsymbol{g}$$

Supposta la massa non nulla segue:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{g}$$

Questa può essere integrata immediatamente, mantenendo la forma vettoriale, ottenendo:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t \qquad \text{(DP.7)}$$

essendo:

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$$

le condizioni iniziali sulla velocità. Riscrivendo la (DP.7) come equazione differenziale per il vettore incognito OP abbiamo:

$$\frac{d}{dt} OP = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{g}t$$

Integrando una seconda volta abbiamo finalmente:

$$OP(t) = OP_0 + \boldsymbol{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}t^2$$

Ovvero:

$$P_0P(t) = \boldsymbol{v}_0\, t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}t^2 \tag{DP.8}$$

essendo:

$$OP(0) = OP_0$$

le condizioni iniziali per la posizione del grave. Si osserva immediatamente nella (DP.8) che il vettore $P_0P(t)$ è una combinazione lineare dei vettori $\boldsymbol{v}_0$ e $\boldsymbol{g}$: dunque il moto avviene nel piano di questi vettori, passante per la posizione iniziale P_0. Per proiettare le equazioni del moto (DP.8) e ottenere le equazioni *parametriche* della traiettoria riferita ad un sistema cartesiano, è conveniente scegliere l'origine degli assi $O \equiv P_0$, il piano xy coincidente con il piano del moto e l'asse y verticale, per esempio, orientato in senso discorde rispetto a $\boldsymbol{g}$. I vettori sono così rappresentati:

$$OP \equiv (x, y), \qquad \boldsymbol{g} \equiv (0, -g), \qquad \boldsymbol{v}_0 \equiv (v_0\, cos\, \alpha, v_0\, sen\, \alpha)$$

essendo α l'angolo che la velocità iniziale forma con l'orientazione positiva delle ascisse.

Si hanno allora le equazioni della traiettoria nel parametro t:

$$\begin{cases} x = v_0\, t\, cos\, \alpha \\ \\ y = v_0\, t\, sen\, \alpha - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases} \tag{DP.9}$$

Eliminando il parametro t si ottiene l'equazione *cartesiana* della traiettoria:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\, cos^2\alpha}\, x^2 + (tan\, \alpha)\, x \tag{DP.10}$$

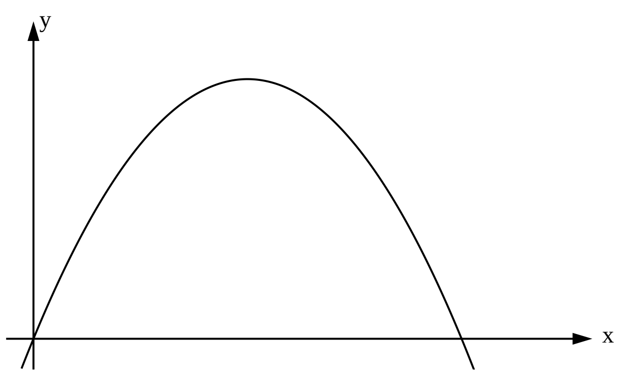

Figura DP. 1: traiettoria di un grave in assenza di resistenza del mezzo

parabola di sicurezza

Immaginando un problema balistico nel quale si vuole colpire un bersaglio avente coordinate (x^*, y^*), dobbiamo imporre che le coordinate del bersaglio soddisfino l'equazione della traiettoria di un proiettile o di un missile, schematizzato con il grave puntiforme e cioè:

$$y^* = -\frac{g}{2v_0^2\, cos^2\alpha}\, x^{*2} + (tan\,\alpha)\, x^* \qquad \text{(DP.11)}$$

Supposta conosciuta la velocità iniziale del proiettile v_0, l'incognita è rappresentata ora dall'angolo α con il quale il lancio deve essere effettuato per colpire il bersaglio. Tenendo conto che:

$$cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tan^2\alpha}$$

possiamo riscrivere e riordinare l'equazione (DP.11) rispetto a $tan\,\alpha$:

$$gx^{*2}tan^2\alpha - 2v_0^2\, x^* tan\,\alpha + 2v_0^2\, y^* + g\, x^{*2} = 0$$

Il discriminante ridotto di questa equazione di secondo grado in $tan\,\alpha$ vale:

$$\frac{\Delta}{4} = x^{*2}\left(v_0^4 - 2v_0^2\, g\, y^* - g^2 x^{*2}\right)$$

Si hanno allora le seguenti tre possibilità:

i) $\frac{\Delta}{4} < 0$

In questo caso le radici sono complesse coniugate, e quindi non si hanno soluzioni reali: il bersaglio è troppo alto per poter essere raggiunto;

ii) $\frac{\Delta}{4} = 0$

Le radici sono reali e coincidenti: il bersaglio può essere colpito in un solo modo, puntando con un angolo la cui tangente vale:

$$tan\,\alpha = \frac{v_0^2}{g\, x^*}$$

iii) $\frac{\Delta}{4} > 0$

Si hanno due radici reali distinte: il bersaglio può essere raggiunto scegliendo tra due possibili puntamenti:

$$tan\,\alpha = \frac{v_0^{*2} x^* \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{g\, x^{*2}}$$

L'angolo minore corrisponde a un *tiro diretto* e l'angolo maggiore a un *tiro indiretto*. La parabola di equazione:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}\, x^{*2} + \frac{v_0^2}{2g}$$

luogo geometrico dei bersagli per i quali il discriminante si annulla (oltre all'origine che non è significativa dal punto di vista balistico, perchè coincide con il punto di partenza del proiettile) prende il nome di *parabola di sicurezza* in quanto rappresenta la curva al di sopra della quale il bersaglio non può venire colpito.

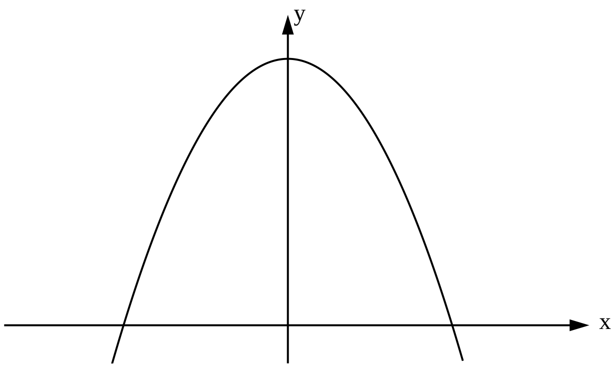

Figura DP. 2: parabola di sicurezza

Moto di un punto in presenza di resistenza del mezzo

Esaminiamo ora il problema del moto di un punto in presenza di resistenza del mezzo. Anzitutto forniamo le informazioni sperimentali che ci servono per determinare la forza di resistenza dell'aria o, più in generale del mezzo, attraverso il quale un corpo si sta muovendo.

Quando un corpo trasla attraverso un mezzo resistente, il risultante della forza di resistenza del mezzo $\boldsymbol{F}_r$, pensato applicato nel suo baricentro, è dato dalla seguente legge sperimentale:

$$\boldsymbol{F}_r = -\,A\,\alpha\,\mu\,f(v)\,\boldsymbol{u} \tag{DP.12}$$

— A è l'*area investita,* cioè l'area della proiezione del corpo sul piano ortogonale alla velocità di traslazione, pari alla velocità del baricentro del corpo;

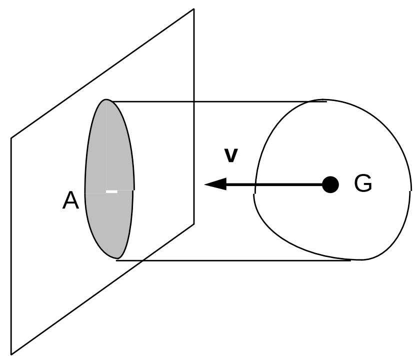

Figura DP. 3: area investita

— α è un numero puro positivo, ed è detto *fattore di forma,* in quanto dipende dalla forma del corpo e si può determinare sperimentalmente;

— μ è la densità del mezzo resistente;

— $f(v)$ è una funzione positiva che dipende dal modulo della velocità di traslazione del corpo v.

Sperimentalmente, fino a velocità non superiori a $2\,m/sec$ essa è approssimabile con una funzione lineare:

$$f(v) \propto v$$

Si parla in questo caso di *resistenza viscosa.*

Quando la velocità è superiore, fino ad un massimo di $200\,m/sec$ la funzione $f(v)$ si approssima ad una funzione quadratica:

$$f(v) \propto v^2$$

Si parla in questo caso di *resistenza idraulica.*

— $\boldsymbol{u}$ è il versore della velocità di traslazione del corpo.

Problema del paracadute

Esaminiamo il moto di un grave in caduta libera e in presenza di resistenza del mezzo. Il problema viene denominato anche *problema del paracadute.* Le velocità in caduta libera, per un corpo di densità e di dimensioni ordinarie, come nel caso del sistema uomo-paracadute, sono tali da determinare una resistenza di tipo idraulico. Schematizzando il sistema meccanico con un punto, coincidente con il suo baricentro, si ha così l'equazione differenziale del moto:

$$m\,\boldsymbol{a} = m\,\boldsymbol{g} - A\,\alpha\,\mu\,c\,v^2\,\boldsymbol{u} \tag{DP.13}$$

essendo:

$$f(v) = c\,v^2, \qquad c > 0$$

Le condizioni iniziali, per il moto in caduta libera sono:

$$OP(0) = 0, \qquad \boldsymbol{v}(0) = 0$$

Il problema si presenta unidimensionale e quindi possiamo proiettare la (DP.13) su un asse verticale y avente origine nella posizione iniziale e verso concorde con il peso:

$$m\,\dot{v} = m\,g - A\,\alpha\,\mu\,c\,v^2$$

essendo $v = \dot{y}$. Possiamo riscrivere l'equazione differenziale per la velocità nella forma più comoda:

$$\dot{v} = \left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) g \tag{DP.14}$$

avendo introdotto la costante:

$$V = \sqrt{\frac{m\,g}{A\,\alpha\,\mu\,c}} \tag{DP.15}$$

che ha chiaramente le dimensioni di una velocità. La (DP.14) è un'equazione a variabili separabili e si integra con la condizione iniziale $v(0) = 0$, ottenendo:

$$t = \frac{1}{g}\int_0^v \frac{d\hat{v}}{1 - \frac{\hat{v}^2}{V^2}} \tag{DP.16}$$

La decomposizione:

$$\frac{1}{1-\frac{\hat{v}^2}{V^2}} = \frac{1}{2\left(1+\frac{\hat{v}}{V}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\frac{\hat{v}}{V}\right)}$$

consente di ottenere:

$$\int_0^v \frac{d\hat{v}}{1-\frac{\hat{v}^2}{V^2}} = \frac{1}{2}\int_0^v \frac{d\hat{v}}{1+\frac{\hat{v}}{V}} + \frac{1}{2}\int_0^v \frac{d\hat{v}}{1-\frac{\hat{v}}{V}} =$$

$$= \frac{V}{2}\log\left(1+\frac{v}{V}\right) - \frac{V}{2}\log\left(1-\frac{v}{V}\right) = \frac{V}{2}\log\left(\frac{1+\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}}\right)$$

Dunque nella (DP.16) segue:

$$g\,t = \frac{V}{2}\log\left(\frac{1+\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}}\right)$$

E quindi risolvendo per v:

$$v(t) = V\,\frac{1-e^{-\frac{2g\,t}{V}}}{1+e^{-\frac{2g\,t}{V}}} \tag{DP.17}$$

Il significato della costante V risulta adesso comprensibile considerando che dal risultato precedente si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = V$$

Allora V è la velocità limite che il corpo tende a raggiungere asintoticamente. Da un punto di vista fisico, in realtà, dopo un tempo finito la velocità del paracadute diviene indistinguibile da tale velocità limite, a causa degli errori di misura. Quando la resistenza dell'aria è divenuta in modulo uguale alla forza peso, il moto di caduta tende a divenire uniforme con velocità V e la caduta procede con velocità costante fino all'impatto con il suolo.

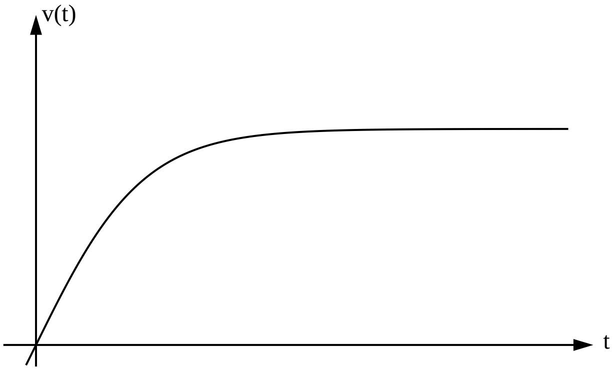

Figura DP. 4: andamento asintotico della velocità del paracadute

Si può integrare anche la legge oraria del moto tenendo conto che:

$$\frac{1 - e^{-\frac{2g\,t}{V}}}{1 + e^{-\frac{2g\,t}{V}}} = \frac{e^{\frac{g\,t}{V}} - e^{-\frac{g\,t}{V}}}{e^{\frac{g\,t}{V}} + e^{-\frac{g\,t}{V}}} = tanh\left(\frac{g\,t}{V}\right)$$

e quindi la (DP.17) fornisce l'equazione differenziale per y:

$$\dot{y} = V\,tanh\left(\frac{g\,t}{V}\right)$$

con la condizione iniziale $y(0) = 0$.

Abbiamo allora:

$$y(t) = \int_0^t V\,tanh\left(\frac{g\,\hat{t}}{V}\right)\,d\hat{t}$$

E quindi:

$$y(t) = \frac{V^2}{g} \log \left\{ cosh \left(\frac{g\,t}{V} \right) \right\} \tag{DP.18}$$

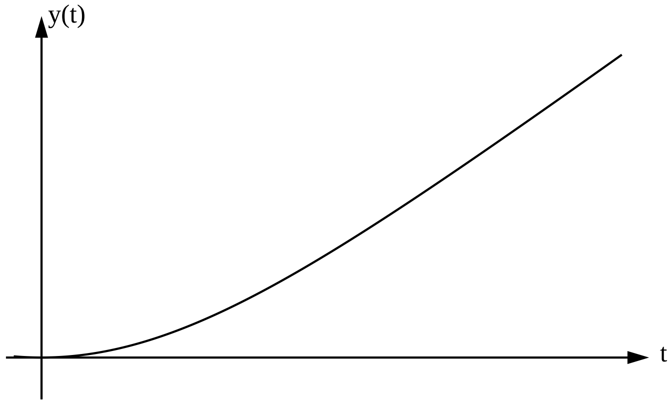

Figura DP. 5: legge oraria del moto del paracadute

Moto di un punto soggetto a una forza elastica

Consideriamo un punto materiale P di massa m soggetto ad una forza elastica:

$$\boldsymbol{F} = k^2 PO$$

che lo richiama verso il centro O delle forze; k^2 rappresenta la costante elastica. La forza è di tipo centrale e l'equazione differenziale del moto:

$$m\,\boldsymbol{a} = k^2 PO \tag{DP.19}$$

proiettata sugli assi cartesiani di un sistema di riferimento $Oxyz$ fornisce il sistema di equazioni disaccoppiate:

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} + k^2 x = 0 \\ \\ m\,\ddot{y} + k^2 y = 0 \\ \\ m\,\ddot{z} + k^2 z = 0 \end{cases} \tag{DP.20}$$

La risoluzione del problema tridimensionale si riconduce allora, come si vede dal fatto che le tre equazioni del sistema sono disaccoppiate, alla risoluzione del problema unidimensionale relativo ad ogni componente, noto come problema dell'*oscillatore armonico semplice.*

Oscillatore armonico semplice

Esaminiamo allora il problema dell'oscillatore armonico in una dimensione, che è governato da un'equazione differenziale del tipo:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{DP.21}$$

avendo denotato:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{m} \tag{DP.22}$$

La (DP.21) è un'equazione differenziale del secondo ordine, *lineare* e *omogenea,* a coefficienti costanti. Il suo *integrale generale* si ottiene come combinazione lineare di *due* (tanti quanto è l'ordine dell'equazione) *integrali particolari* indipendenti di tipo esponenziale:

$$x_p(t) = C\,e^{\lambda\,t} \tag{DP.23}$$

Sostituendo la funzione test (DP.23) si ottiene che, affinchè una funzione di questo tipo sia una soluzione dell'equazione differenziale (DP.21), deve essere soddisfatta l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

che fornisce:

$$\lambda_1 = -i\,\omega, \qquad \lambda_2 = i\,\omega$$

Dunque l'integrale generale:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

risulta dato da:

$$x(t) = c_1 e^{-i\,\omega\,t} + c_2 e^{i\,\omega\,t} \tag{DP.24}$$

caratterizzato dalle due costanti arbitrarie c_1, c_2, il cui valore può essere determinato in funzione delle condizioni iniziali. Per identificare un integrale particolare basterà allora assegnare un valore alle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \tag{DP.25}$$

Imponendo le (DP.25) otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0 \\ \\ -i\,\omega\,c_1 + i\,\omega\,c_2 = v_0 \end{cases}$$

che ammette la soluzione unica:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + i\,\frac{v_0}{\omega}\right) \\ \\ c_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\,\frac{v_0}{\omega}\right) \end{cases} \tag{DP.26}$$

Sostituendo questo risultato nell'integrale generale (DP.24) otteniamo:

$$x(t) = x_0\,\frac{e^{i\,\omega\,t} + e^{-i\,\omega\,t}}{2} + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\,\frac{e^{i\,\omega\,t} - e^{-i\,\omega\,t}}{2i}$$

ovvero:

$$x(t) = x_0\,cos\,\omega\,t + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)\,sen\,\omega\,t$$

essendo:

$$cos\,\omega\,t = \frac{e^{i\,\omega\,t} + e^{-i\,\omega\,t}}{2}, \qquad sen\,\omega\,t = \frac{e^{i\,\omega\,t} - e^{-i\,\omega\,t}}{2i}$$

E' a questo punto conveniente introdurre l'*ampiezza di oscillazione:*

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \tag{DP.27}$$

e l'angolo di *fase iniziale* γ, caratterizzabile come:

$$\gamma = -arctan\,\frac{v_0}{\omega\,x_0}, \qquad \Longrightarrow \qquad cos\,\gamma = \frac{x_0}{A}, \qquad sen\,\gamma = -\,\frac{v_0}{\omega A}$$

In questo modo l'integrale generale si può scrivere:

$$x(t) = A\,(cos\,\omega\,t\,cos\,\gamma - sen\,\omega\,t\,sen\,\gamma)$$

e quindi nella forma finale:

$$x(t) = A\,cos\,(\omega\,t + \gamma) \qquad \text{(DP.28)}$$

Appare chiaro il significato della costante, *positiva* per definizione:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^2}{m}} = 2\pi\,\nu \qquad \text{(DP.29)}$$

essendo legata alla frequenza ν delle oscillazioni. Essa è detta *pulsazione* del moto oscillatorio, anche se spesso nel linguaggio abituale, viene detta essa stessa impropriamente *frequenza,* dal momento che differisce da quest'ultima soltanto per un fattore di scala, ed è la quantità che ricorre di fatto nelle formule. Infine l'angolo:

$$\varphi = \omega\,t + \gamma$$

è detto angolo di fase attuale del moto.

Composizione di moti armonici nel piano

Un risultato interessante si ottiene quando si compongono, nel piano, due moti armonici rispondenti ad un sistema del tipo:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \\ \ddot{y} + (p\,\omega)^2 y = 0 \end{cases}$$

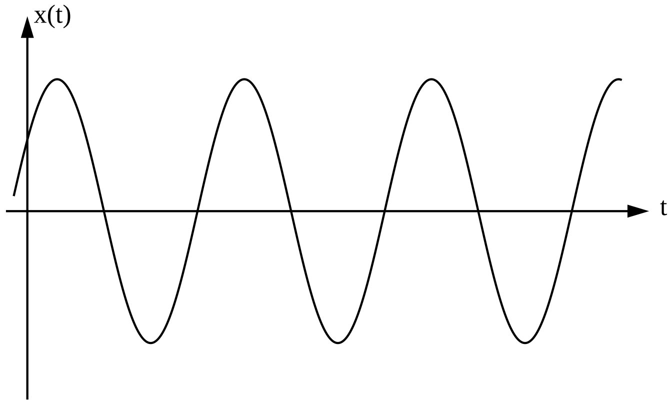

Figura DP. 6: legge oraria dell'oscillatore armonico semplice

dove p è il rapporto fra le frequenze. Un moto di questo tipo si può pensare realizzato da due forze elastiche, di differenti costanti elastiche, che si mantengono ciascuna parallela a un asse cartesiano, agendo sullo stesso punto P.

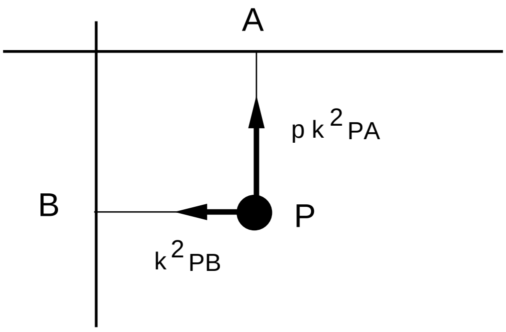

Figura DP. 7: composizione di moti armonici nel piano

Le traiettorie che il punto percorre prendono il nome di *figure di Lissajous* e variano al variare del rapporto p tra le frequenze dei moti armonici e in

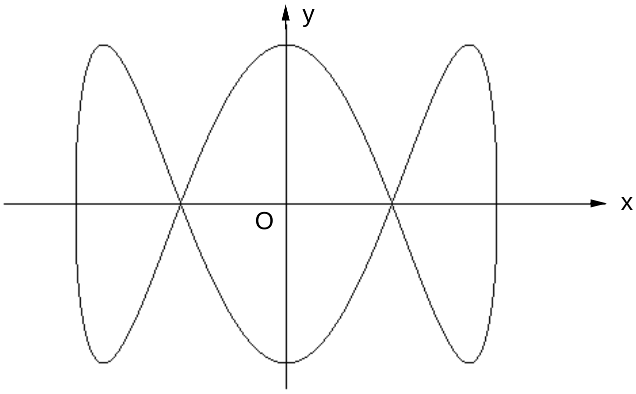

Figura DP. 8: figura di Lissajous; $p = 3$.

corrispondenza delle condizioni iniziali del moto. Il moto risulta periodico in corrispondenza di valori razionali di p, che sono gli unici fisicamente realizzabili.

Moto di un punto soggetto a forza elastica e resistenza viscosa

Aggiungiamo una resistenza viscosa alla forza elastica che sollecita il moto di un punto P nello spazio. L'equazione differenziale del moto, in forma vettoriale, si scrive:

$$m\,\boldsymbol{a} = k^2 PO - \, h\boldsymbol{v} \tag{DP.30}$$

Il termine aggiuntivo che rappresenta la forza viscosa è:

$$\boldsymbol{F}_r = -\,h\boldsymbol{v}, \qquad h > 0$$

Proiettando la (DP.30) sugli assi cartesiani si ottiene il sistema di equazioni disaccoppiate:

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} + h\,\dot{x} + k^2 x = 0 \\ m\,\ddot{y} + h\,\dot{y} + k^2 y = 0 \\ m\,\ddot{z} + h\,\dot{z} + k^2 z = 0 \end{cases} \tag{DP.31}$$

Notiamo che a causa della linearità della resistenza viscosa il sistema continua ad essere disaccoppiato, come nel caso in cui è presente la sola forza elastica. Per cui il problema tridimensionale si risolve, anche in questo caso risolvendo separatamente i tre problemi unidimensionali.

Problema unidimensionale

Consideriamo il problema unidimensionale riscritto nella forma più comoda:

$$\ddot{x} + 2p\,\dot{x} + \omega^2\,x = 0 \tag{DP.32}$$

dove abbiamo introdotto la nuova costante positiva:

$$2p = \frac{h}{m} \tag{DP.33}$$

oltre alla ω già definita. L'equazione differenziale del secondo ordine è lineare, omogenea, a coefficienti costanti; e la sua equazione caratteristica è data da:

$$\lambda^2 + 2p\,\lambda + \omega^2 = 0$$

Il coefficiente 2 di comodo, che è stato inserito, ci consente di introdurre il discriminante ridotto dell'equazione caratteristica:

$$\frac{\Delta}{4} = p^2 - \omega^2$$

Il comportamento del discriminante permette di distinguere tre casi, corrispondenti a tre tipi di moto del punto:

i) *moto aperiodico:* $p > \omega$

Questa situazione si verifica quando il termine p, che regola la resistenza, prevale sul termine elastico ω, e cioè quando la resistenza del mezzo è elevata, mentre la molla è "debole" nei suoi confronti. In questo caso l'equazione caratteristica ha *due radici reali distinte.* Tali radici risultano sempre entrambe negative, come si deduce facendo uso della regola dei segni di Cartesio, avendo due permanenze di segno nei coefficienti: $+, +, +$. Le radici sono date da:

$$\lambda_1 = -p - \sqrt{p^2 - \omega^2}, \qquad \lambda_2 = -p + \sqrt{p^2 - \omega^2}$$

Di conseguenza l'integrale generale del moto risulta dalla combinazione lineare di due esponenziali decrescenti:

$$x(t) = c_1 e^{-p - \sqrt{p^2 - \omega^2}\, t} + c_2 e^{-p + \sqrt{p^2 - \omega^2}\, t}$$

Le costanti, espresse in termini delle condizioni iniziali, sono date da:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0 + p\, x_0}{\sqrt{p^2 - \omega^2}}\right) \\[2ex] c_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0 + p\, x_0}{\sqrt{p^2 - \omega^2}}\right) \end{cases}$$

Il moto è detto, in questo caso, *aperiodico* in quanto la resistenza del mezzo è così elevata da non permettere al punto di compiere alcuna oscillazione completa attorno alla posizione di riposo. Il moto è detto anche *asintotico,* perchè:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

e quindi il punto tende asintoticamente alla posizione di riposo.

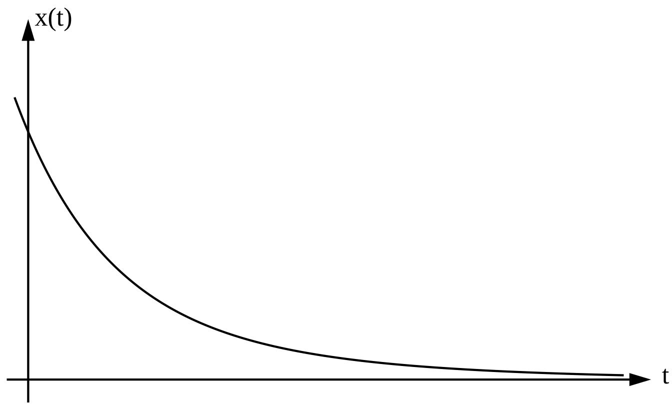

Figura DP. 9: andamento asintotico della legge oraria nel caso $p > \omega$

ii) *moto oscillatorio smorzato:* $p < \omega$

In questo caso il termine elastico prevale su quello di resistenza e il moto risulta essere oscillatorio, con ampiezza che si riduce asintoticamente a zero (*smorzamento*), a causa della dissipazione dell'energia meccanica dovuta alla resistenza del mezzo. Le radici dell'equazione caratteristica sono *complesse coniugate:*

$$\lambda_1 = -p - i\sqrt{\omega^2 - p^2}, \qquad \lambda_2 = -p + i\sqrt{\omega^2 - p^2}$$

Di conseguenza l'integrale generale del moto risulta dalla combinazione lineare di due esponenziali complessi:

$$x(t) = e^{-p\,t}\left(c_1 e^{-i\sqrt{\omega^2-p^2}\,t} + c_2 e^{+i\sqrt{\omega^2-p^2}\,t}\right)$$

I coefficienti c_1, c_2 in termini delle condizioni iniziali risultano dati da:

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + i\,\frac{v_0+p\,x_0}{\sqrt{\omega^2-p^2}}\right) \\ \\ c_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - i\,\frac{v_0+p\,x_0}{\sqrt{\omega^2-p^2}}\right) \end{cases}$$

Di conseguenza l'integrale generale si può riscrivere procedendo in modo analogo a quello illustrato nel caso dell'oscillatore armonico semplice:

$$x(t) = A e^{-p\,t}\,cos\left(\sqrt{\omega^2-p^2}\,t + \gamma\right)$$

Dove:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0+p\,x_0)^2}{\omega^2-p^2}}$$

e la fase iniziale è definita:

$$\gamma = -arctan\left(\frac{v_0+p\,x_0}{x_0\sqrt{\omega^2-p^2}}\right)$$

risultato che ci mostra come, a causa della resistenza del mezzo, le oscillazioni del moto riducono la loro ampiezza esponenzialmente e si compiono con una pulsazione:

$$\sqrt{\omega^2 - p^2} < \omega$$

Il punto P tende asintoticamente alla posizione di equilibrio, in quanto:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

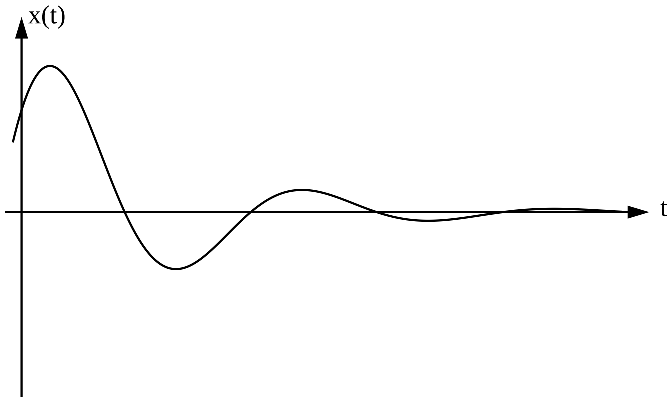

Figura DP. 10: oscillazioni smorzate

iii) *moto critico:* $p = \omega$

E' il caso limite tra i due precedenti. In questo caso le radici dell'equazione caratteristica sono reali coincidenti:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\,p$$

e l'integrale generale del moto è:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\,p\,t}$$

I coefficienti espressi in termini delle condizioni iniziali sono dati da:

$$\begin{cases} c_1 = x_0 \\ \\ c_2 = v_0 + p\,x_0 \end{cases}$$

• Il moto critico tende a zero più rapidamente del moto aperiodico; infatti:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x_{critico}}{x_{aperiodico}} = 0$$

in quanto il rapporto si comporta come il rapporto tra una funzione lineare e un esponenziale. Questa situazione viene sfruttata negli strumenti di misura con un indice meccanico nei quali l'indice deve raggiungere rapidamente la posizione di lettura.

Notiamo che nel moto critico (come anche in quello aperiodico), se i coefficienti c_1, c_2 hanno segni opposti esiste un valore del tempo positivo, cioè nel futuro, nel quale il punto passa per la posizione di riposo e che vale, nel caso del moto critico:

$$\tau = -\,\frac{c_1}{c_2} = -\,\frac{x_0}{v_0 + \,p\,x_0}$$

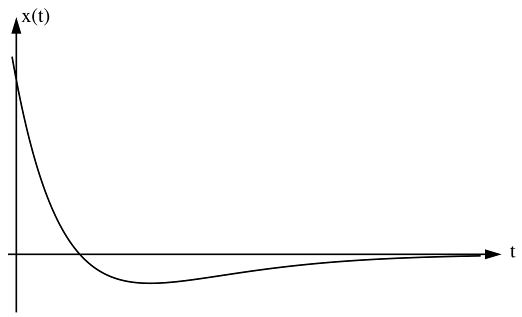

Figura DP. 11: legge oraria del moto critico

Oscillazioni forzate e risonanza

Lo studio delle oscillazioni forzate nasce dall'idea di fornire, ad un oscillatore soggetto a resistenza viscosa, la quantità di energia dissipata, in modo da ristabilire un regime di oscillazioni non smorzate, che si mantengono, nel tempo, fino a che si fornisce energia dall'esterno. Per fare questo si applica all'oscillatore smorzato una forza, oscillante con una frequenza controllabile Ω (*frequenza forzante*), diretta lungo l'asse x del moto:

$$F(t) = C\, sen\, \Omega\, t$$

In questo modo l'equazione differenziale del moto diviene:

$$\ddot{x} + 2p\, \dot{x} + \omega^2 x = c\, sen\, \Omega\, t \tag{DP.34}$$

avendo introdotto il coefficiente:

$$c = \frac{C}{m}$$

L'equazione da integrare (DP.34) è un'equazione differenziale del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, *non omogenea.* Il suo integrale generale si ottiene come somma dell'integrale generale $\hat{x}(t)$ dell'equazione *omogenea associata:*

$$\ddot{x} + 2p\, \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

e di un integrale particolare $x_1(t)$ dell'equazione non omogenea (DP.34):

$$x(t) = \hat{x}(t) + x_1(t)$$

Osserviamo che l'equazione omogenea associata non è altro che l'equazione differenziale che abbiamo appena studiato; e, dal momento che stiamo supponendo di lavorare con un oscillatore smorzato, ci veniamo a trovare nel caso in cui $p < \omega$. Di conseguenza è conosciuto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata, che ha la forma:

$$\hat{x}(t) = A\, e^{-p\,t} cos\left(\sqrt{\omega^2 - p^2}\, t + \gamma\right)$$

Per determinare poi un integrale particolare dell'equazione non omogenea facciamo uso di una funzione test, oscillante con la *frequenza forzante* Ω:

$$x_1(t) = S\, cos\, (\Omega\, t + \alpha) \qquad \text{(DP.35)}$$

dove S e α sono quantità indipendenti dal tempo, da determinare.

Sostituendo la funzione test (DP.35) nell'equazione non omogenea (DP.34) si ottiene che essa è soluzione a condizione che:

$$S\, cos\, \Omega\, t \left\{(\omega^2 - \Omega^2) cos\, \alpha - \, 2p\, \Omega\, sen\, \alpha\right\} -$$

$$- \, sen\, \Omega\, t \left\{S\, (\omega^2 - \Omega^2) sen\, \alpha + \, 2p\, \Omega\, S\, cos\, \alpha + c\right\} = 0, \qquad \forall t$$

Data l'arbitrarietà di t questa condizione può essere soddisfatta se e solo se si annullano i coefficienti di $cos\, \Omega\, t$ e di $sen\, \Omega\, t$, cioè quando:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \Omega^2)\, cos\, \alpha - \, 2p\, \Omega\, sen\, \alpha = 0 \\ \\ S\, \{(\omega^2 - \Omega^2)\, sen\, \alpha + \, 2p\, \Omega\, cos\, \alpha\} = -c \end{cases}$$

Dalla prima equazione possiamo ricavare:

$$tan\,\alpha = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{2p\,\Omega}$$

escludendo che Ω possa annullarsi; e allora la seconda equazione, dopo aver eliminato α ci dà l'espressione dell'ampiezza S dell'integrale particolare:

$$S = \frac{c}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4p^2\Omega^2}} \tag{DP.36}$$

Sono stati così determinati S, α in maniera che la funzione test $x_1(t)$ sia un integrale particolare dell'equazione non omogenea (DP.34).

• Osserviamo che l'integrale generale $x(t)$ della (DP.34) risulta dalla somma di due contributi: la soluzione $x_1(t)$ che *oscilla* con ampiezza S indipendente dal tempo, e il contributo $\hat{x}(t)$ che tende asintoticamente a zero per $t \to +\infty$. Ciò significa che dopo un tempo sufficientemente grande la $\hat{x}(t)$ tende a scomparire, perciò viene detta *transiente,* mentre la $x_1(t)$ rimane l'unica soluzione a regime. La soluzione $x_1(t)$, inoltre, non dipende dai dati iniziali.

La relazione (DP.36) permette di studiare la *risposta* del sistema oscillante sotto l'azione della forza oscillante, in quanto dà l'andamento dell'ampiezza in termini della frequenza forzante Ω. L'ampiezza presenta un punto di massimo, come si può verificare analizzando la funzione:

$$f(\Omega^2) = (\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4p^2\,\Omega^2$$

Allora a un minimo di $f(\Omega^2)$ corrisponde un massimo di S, essendo:

$$S = \frac{c}{\sqrt{f(\Omega^2)}}$$

Considerando Ω^2 come variabile abbiamo:

$$f'(\Omega^2) = -\,2(\omega^2 - \Omega^2) + 4p^2$$

che si annulla per:

$$\Omega^{*2} = \omega^2 - 2p^2 \tag{DP.37}$$

Allora se accade che $\Omega^{*2} > 0$ esiterà una frequenza reale che rende nulla la derivata di f. Inoltre, per la derivata seconda si ha:

$$f''(\Omega^2) = 2 > 0$$

Dunque f è minima e quindi S è massima in corrispondenza della frequenza (DP.37) e vale:

$$S^* = \frac{c}{2p\,\sqrt{\omega^2 - p^2}} \tag{DP.38}$$

Va sottolineato il fatto che S^* può assumere anche valori molto più grandi dell'ampiezza massima del transiente A, grazie al fatto che l'energia viene fornita al sistema con il ritmo giusto per accrescere l'entità del moto, e che, se non vi fosse resistenza, l'ampiezza diventerebbe infinita, in quanto:

$$\lim_{p \to 0} S^* = +\infty$$

Quando sussiste la condizione per cui l'ampiezza diviene massima si dice che il sistema è entrato in *risonanza* e si dice che la frequenza (DP.37) rappresenta la *frequenza di risonanza* del sistema. La curva che descrive l'andamento della funzione $S(\Omega^2)$ prende il nome di *curva di risonanza.* Notiamo che quando la resistenza tende allo zero, la frequenza di risonanza tende alla frequenza ω dell'oscillatore armonico semplice associato al sistema.

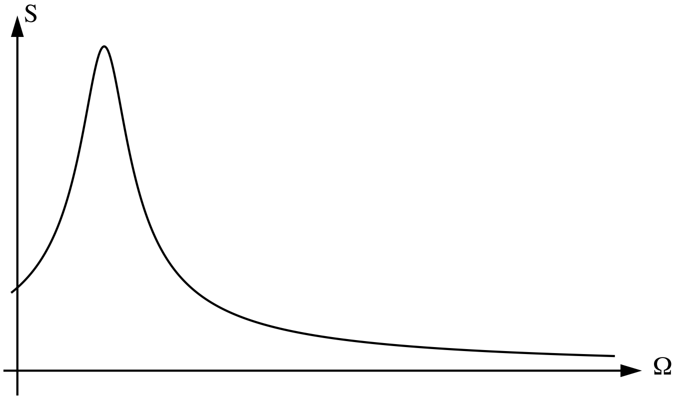

Figura DP. 12: curva di risonanza

Dinamica del punto materiale vincolato

Moto di un punto su una superficie priva di attrito

Finora abbiamo considerato la dinamica del punto materiale *libero.* Ora passiamo alla dinamica del punto materiale *vincolato.*

Il primo caso che esaminiamo è il moto di un punto su una superficie priva di attrito, di equazione cartesiana:

$$f(x, y, z) = 0$$

riferito alla terna cartesiana ortogonale $Oxyz$ di un osservatore inerziale.

Poichè la superficie è priva di attrito, sappiamo, dalla legge dell'attrito dinamico, che la reazione vincolare che compare nell'equazione fondamentale della dinamica, scritta per il punto vincolato:

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi}$$

è normale alla superficie. Perciò, come accade anche nel caso statico, si può stabilire un legame tra la reazione vincolare e la funzione che descrive la superficie:

$$\boldsymbol{\Phi} = \lambda\,\nabla f$$

Quindi l'equazione fondamentale si specializza nella:

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \lambda\,\nabla f$$

Proiettandola sugli assi cartesiani otteniamo il sistema differenziale del sesto ordine delle equazioni del moto, che completiamo con la condizione di vincolo che impone al punto di appartenere alla superficie:

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\,\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\,\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial z} \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases} \tag{DP.39}$$

Il sistema fornisce quattro equazioni per le quattro funzioni incognite:

$$x(t), y(t), z(t), \lambda(t)$$

che in linea di principio sono determinate. Restano allora caratterizzati il moto e la reazione vincolare in regime dinamico. Come casi particolari notevoli esaminiamo il caso in cui la forza attiva è conservativa e il caso in cui la forza attiva è nulla.

i) *forza attiva conservativa*

Notiamo che se la *forza attiva* è *conservativa* sussiste l'integrale primo dell'energia e in esso entra in gioco solamente il *potenziale della forza attiva,* in quanto la reazione vincolare non compie lavoro, essendo normale agli spostamenti consentiti dal vincolo.

Infatti abbiamo:

$$\boldsymbol{F} = \nabla U$$

Inoltre, moltiplicando scalarmente l'equazione fondamentale del moto del punto vincolato, per la velocità si ha:

$$m\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = \nabla U \times \boldsymbol{v}$$

E quindi, seguendo la stessa procedura adottata per il punto libero:

$$\frac{d}{dt}(T - U) = 0$$

da cui:

$$T - U = costante$$

La potenza sviluppata dalla reazione vincolare risulta nulla; infatti:

$$\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{v} = \lambda\,\nabla f \times \boldsymbol{v}$$

Ma durante il moto $f = 0$ identicamente e quindi anche la sua derivata temporale è nulla:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{x_i}\,\dot{x}_i = \nabla f \times \boldsymbol{v} = 0$$

che equivale a dire che la reazione vincolare e la velocità, quando non si annullano, sono sempre tra loro normali.

ii) *forza attiva nulla*

Un altro caso di interesse è quello che si verifica quando il punto vincolato sulla superficie non è soggetto ad alcuna forza attiva (*moto per inerzia*):

$$\boldsymbol{F} = 0$$

L'unica forza agente è la reazione vincolare e l'equazione differenziale del moto si scrive:

$$m\,\boldsymbol{a} = \lambda\,\nabla f$$

Ma ∇f ha la direzione della normale alla superficie sulla quale è vincolato a muoversi il punto, per cui abbiamo l'informazione che l'accelerazione del punto è diretta lungo la normale $\boldsymbol{n}$ alla superficie, o è nulla. Possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{n}$$

Ora se rappresentiamo l'accelerazione sul triedro di Frenet della traiettoria (rappresentazione intrinseca) abbiamo:

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\,\boldsymbol{T} + \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{N}$$

dove $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{N}$ sono rispettivamente il versore tangente e il versore normale principale della traiettoria. Ponendo a confronto le due espressioni dell'accelerazione si ottiene:

$$\alpha\,\boldsymbol{n} = \ddot{s}\,\boldsymbol{T} + \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{N} \qquad \text{(DP.40)}$$

Ora la traiettoria deve appartenere alla superficie sulla quale il punto è vincolato a muoversi, quindi il versore tangente alla curva appartiene a un piano tangente anche alla superficie, e come tale risulta ortogonale al versore normale alla superficie; cioè:

$$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{n} = 0$$

Possiamo sfruttare questa condizione considerando il prodotto scalare per $\boldsymbol{T}$ della (DP.40) da cui otteniamo:

$$m\,\ddot{s} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ddot{s} = 0$$

supposta la massa non nulla. Di qui abbiamo l'informazione che la legge oraria è quella di un moto uniforme lungo la traiettoria:

$$s(t) = s_0 + v_0 t$$

Nella (DP.40) rimane allora:

$$\alpha\,\boldsymbol{n} = \frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{N}$$

E cioè la condizione di parallelismo tra $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{n}$. La traiettoria deve essere allora una curva della superficie per la quale la normale principale è diretta come la normale alla superficie, e cioè una *geodetica.*

Per quanto riguarda l'integrale dell'energia, essendo la forza attiva nulla, essa ha un potenziale costante (che si può assumere nullo) e quindi l'energia cinetica risulta essere un integrale primo del moto:

$$T = \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$$

in accordo con il risultato prima ottenuto che il moto lungo la traiettoria avviene con velocità costante. L'effetto della reazione vincolare, che è l'unica forza agente, è quello di modificare la direzione del vettore velocità del punto, senza alterare il suo modulo.

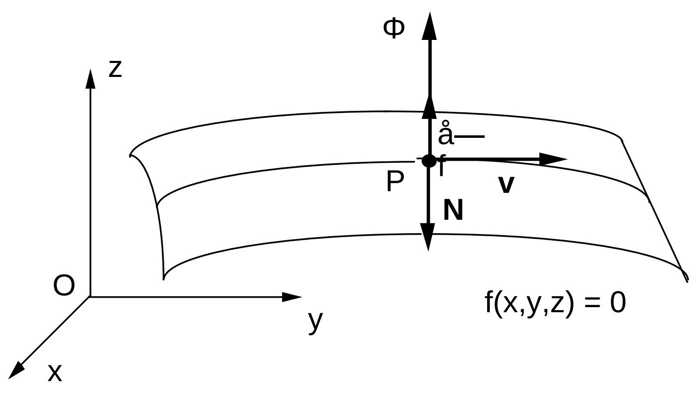

Figura DP. 13: geodetica

Moto di un punto su una curva priva di attrito

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si può applicare, analogamente a come si è fatto in statica, anche per lo studio del moto di un punto su una curva assegnata, priva di attrito. In questo caso, assegnato il sistema delle equazioni cartesiane della curva:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

la reazione vincolare si esprime come combinazione lineare dei gradienti delle funzioni f, g:

$$\boldsymbol{\Phi} = \lambda \nabla f + \mu \nabla g$$

L'equazione fondamentale della dinamica viene specializzata come:

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \lambda \nabla f + \mu \nabla g$$

Proiettando sugli assi e aggiungendo le due equazioni del vincolo otteniamo il sistema che determina le funzioni che caratterizzano il moto e i due moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} m\,\ddot{x} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial g}{\partial x} \\ m\,\ddot{y} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y} + \mu\,\frac{\partial g}{\partial y} \\ m\,\ddot{z} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\,\frac{\partial g}{\partial z} \\ f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso quando la forza è conservativa l'integrale primo dell'energia coinvolge solamente il potenziale della forza attiva. Se poi il moto avviene in assenza di forza attiva l'energia cinetica è un integrale primo del moto e il moto è quindi uniforme lungo la traiettoria.

Moto di un punto su una curva qualunque

Quando la curva sulla quale il punto è vincolato a muoversi è dotata di attrito, occorre fare uso della legge di Coulomb–Morin per l'attrito dinamico. In questo caso il problema va trattato ricorrendo alla formulazione intrinseca, cioè proiettando l'equazione differenziale del moto:

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\Phi}$$

sul triedro di Frenet della curva sulla quale il punto è vincolato a muoversi. E questo perchè la legge dell'attrito chiama in causa le componenti tangente, normale e binormale della reazione vincolare. Il sistema differenziale che otteniamo risulta determinato se si tiene conto della legge dell'attrito dinamico.

Si ha allora:

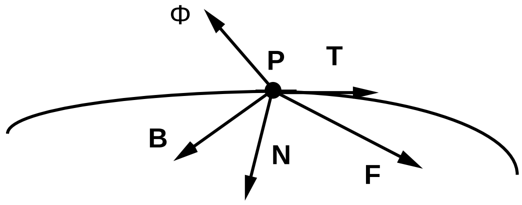

Figura DP. 14: moto di un punto lungo una curva assegnata

$$\begin{cases} m\,\ddot{s} = F_T(s,\dot{s},t) + \Phi_T \\ m\,\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_N(s,\dot{s},t) + \Phi_N \\ 0 = F_B(s,\dot{s},t) + \Phi_B \\ |\Phi_T| = f_d\sqrt{\Phi_N^2 + \Phi_B^2} \end{cases} \tag{DP.41}$$

i) *caso generale*

Il sistema è così costituito da quattro equazioni per le quattro incognite $s(t)$ che determina il moto lungo la traiettoria assegnata (problema a un solo grado di libertà) e Φ_T, Φ_N, Φ_B. Eliminando le componenti della reazione vincolare nella legge dell'attrito, mediante le prime tre equazioni, si ottiene l'equazione pura del moto, nella sola incognita s; determinato il moto si possono determinare le componenti della reazione vincolare in regime dinamico.

ii) *curva priva di attrito*

Il metodo delle equazioni intrinseche del moto si può utilizzare convenientemente anche quando la curva sulla quale il punto è vincolato a muoversi risulta priva di attrito. Si tratta di un caso particolare di quello precedente. In questo caso $f_d = 0$ e la legge dell'attrito fornisce l'informazione $\Phi_T = 0$. Il sistema delle equazioni del moto si riduce allora a:

$$\begin{cases} m\,\ddot{s} = F_T(s, \dot{s}, t) \\ \\ m\,\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_N(s, \dot{s}, t) + \Phi_N \\ \\ 0 = F_B(s, \dot{s}, t) + \Phi_B \end{cases} \tag{DP.42}$$

Queste sono tre equazioni per le tre incognite $s(t), \phi_N, \phi_B$. Notiamo che, in questo caso la prima equazione non contiene la reazione vincolare, ed è, perciò, l'equazione pura del moto, per la funzione incognita $s(t)$. Determinata la legge oraria del moto, mediante le restanti equazioni del sistema si determinano le componenti della reazione vincolare in regime dinamico. Questo metodo si può utilizzare in alternativa al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

iii) *forza attiva posizionale: metodo delle quadrature*

Quando poi, oltre a non essere presente l'attrito sulla curva, la forza attiva non è qualunque, ma è posizionale, abbiamo una classe notevole di problemi di moto del punto lungo una traiettoria prestabilita. Il sistema delle equazioni differenziali del moto si scrive:

$$\begin{cases} m\,\ddot{s} = F_T(s) \\ \\ m\,\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_N(s) + \Phi_N \\ \\ 0 = F_B(s) + \Phi_B \end{cases} \tag{DP.43}$$

Anche in questo caso il problema ha tre sole incognite, che come nel caso precedente sono $s(t), \phi_N, \phi_B$. In più, però, in questo caso la forza, essendo funzione di una sola variabile, avendo a disposizione una sola curva lungo la quale il punto può muoversi, risulta essere conservativa. Sottolineiamo il fatto che una forza posizionale, in generale non è conservativa, ma lo diviene quando il punto è vincolato a muoversi lungo una curva fissata. Infatti, in questo caso la forma differenziale del lavoro vale:

$$dL = \boldsymbol{F}(s) \times dP = \boldsymbol{F}(s) \times \boldsymbol{T}\, ds = F_T(s)\, ds = d \int_{s_0}^{s} F_T(\hat{s})\, d\hat{s}$$

Si tratta di una forma differenziale esatta il cui potenziale vale:

$$U(s) = \int_{s_0}^{s} F_T(\hat{s})\, d\hat{s}$$

Notiamo che, ai fini dell'esistenza del potenziale ciò che è essenziale è che la componente tangente della forza dipenda solo da s; le altre componenti possono dipendere anche dalla velocità e dal tempo.

Ora, se la forza è conservativa, ne consegue per la dinamica del punto, che esiste l'integrale primo dell'energia:

$$\frac{1}{2}\, m\, \dot{s}^2 - U(s) = E$$

La costante dell'energia si può determinare mediante le condizioni iniziali del moto e vale:

$$E = \frac{1}{2}\, m\, \dot{s}_0^2 - U(s_0)$$

Quando si ha un sistema a un solo grado di libertà, come in questo caso, l'esistenza e la conoscenza dell'integrale primo dell'energia è sufficiente a determinare la derivata temporale del parametro lagrangiano:

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,[E + U(s)]} \tag{DP.44}$$

In altri termini, per $\dot{s} \neq 0$ l'equazione fornita dall'integrale primo rappresenta un'equazione differenziale del primo ordine e si può partire da questa per determinare la funzione incognita $s(t)$, anzichè dall'equazione del moto che è del secondo ordine. L'equazione fornita dall'integrale primo dell'energia è un'equazione a variabili separabili e può essere portata a *quadrature* quando si sa calcolare l'integrale:

$$t = \pm\int_{s_0}^{s} \frac{d\hat{s}}{\sqrt{\frac{2}{m}\,[E + U(\hat{s})]}} \tag{DP.45}$$

Il risultato dell'integrazione è una funzione che esprime il tempo in termini di s:

$$t = t(s)$$

Si ottiene così la funzione inversa della funzione oraria del moto; si dice allora che il problema è stato portato a quadrature. Per ottenere la legge oraria bisogna invertire la funzione ottenuta, nei tratti del suo dominio in cui risulta essere monotona.

• Osserviamo che nella (DP.44) deve sussistere la condizione di realtà della radice quadrata e perciò deve essere soddisfatta la condizione:

$$E + U(s) \geq 0$$

Questa condizione identifica gli intervalli permessi per la variabile s e cioè quelle posizioni del punto che sono permesse durante il moto, compatibilmente con le condizioni iniziali assegnate.

Pendolo semplice

Come esempio esaminiamo il moto del pendolo semplice: un pendolo semplice è un punto materiale di massa m soggetto alla forza attiva peso, vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio ℓ priva di attrito, appartenente a un piano verticale.

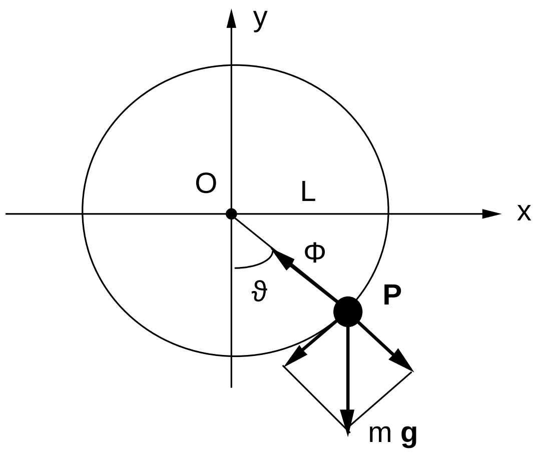

Figura DP. 15: pendolo semplice

i) *moto in assenza di resistenza del mezzo*

L'equazione differenziale del moto in forma vettoriale si scrive:

$$m\,\boldsymbol{a} = m\,\boldsymbol{g} + \boldsymbol{\Phi}$$

E' conveniente proiettare tale equazione sul triedro di Frenet, ottenendo, dopo qualche semplificazione, il sistema differenziale seguente:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell}\, sen\, \vartheta \\ \\ m\,\ell\,\dot{\vartheta}^2 = -\,m\,g\,cos\,\vartheta + \Phi_N \\ \\ \Phi_B = 0 \end{cases} \qquad \text{(DP.46)}$$

avendo introdotto il legame tra l'angolo ϑ, che il filo del pendolo forma con la verticale, e l'ascissa curvilinea:

$$s = \ell\,\vartheta$$

Dal momento che la forza è conservativa e il suo potenziale vale:

$$U = -\,m\,g\,y_P = m\,g\,\ell\,cos\,\vartheta$$

esiste anche l'integrale primo dell'energia:

$$\frac{1}{2}\,m\,\ell^2\,\dot{\vartheta}^2 -\; m\,g\,\ell\,cos\,\vartheta = E$$

Se assegnamo, per esempio, le condizioni iniziali:

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \qquad \dot{\vartheta}(0) = 0$$

possiamo determinare la costante dell'energia:

$$E = -\,m\,g\,\ell\,cos\,\vartheta_0$$

Il problema può essere portato a quadrature ottenendo:

$$t = \pm \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\hat{\vartheta}}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}(cos\,\hat{\vartheta} - cos\,\vartheta_0)}}$$

Gli intervalli permessi per il moto si ottengono imponendo la condizione di realtà della radice quadrata:

$$cos\,\vartheta - cos\,\vartheta_0 \geq 0$$

che si può anche scrivere:

$$cos\,|\vartheta| - cos\,|\vartheta_0| \geq 0 \qquad \text{(DP.47)}$$

dal momento che il coseno non dipende dal segno del suo argomento. Ora le configurazioni fisicamente distinte del pendolo sono identificabili tutte nell'intervallo $0 \leq |\vartheta| \leq \pi$, a causa della periodicità del coseno; ma in questo intervallo il coseno è una funzione decrescente di $|\vartheta|$, per cui la condizione (DP.47) si traduce nella condizione sugli angoli:

$$|\vartheta| \leq |\vartheta_0|$$

Il moto dunque, con le condizioni iniziali assegnate, può avvenire solo in modo tale che non venga oltrepassata l'ordinata della posizione iniziale del pendolo.

m

Quando si considerano le piccole oscillazioni del pendolo, nell'equazione pura del moto è lecito asumere l'approssimazione:

$$sen\,\vartheta \approx \vartheta$$

In questo caso l'equazione del moto diviene semplicemente:

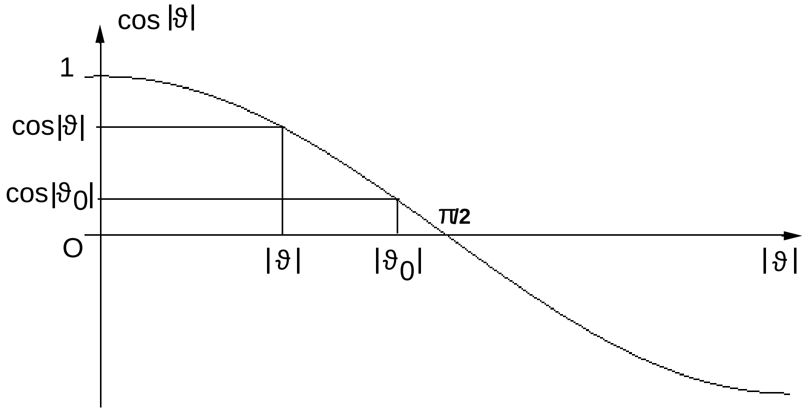

Figura DP. 16: intervallo permesso per il moto del pendolo semplice

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell}\,\vartheta = 0$$

cioè l'equazione di un oscillatore armonico semplice caratterizzato dalla pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

ii) *moto in presenza di resistenza viscosa*

Quando è presente anche una resistenza viscosa, dovuta al mezzo in cui il pendolo si trova immerso, l'equazione differenziale del moto in forma vettoriale si scrive:

$$m\,\boldsymbol{a} = m\,\boldsymbol{g} - h\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Phi} \qquad \text{(DP.48)}$$

Proiettando tale equazione sul triedro di Frenet, otteniamo il sistema differenziale:

$$\begin{cases} m\,\ddot{\vartheta} = -\,m\,\frac{g}{\ell}\,sen\,\vartheta - h\,\dot{\vartheta} \\ m\,\ell\,\dot{\vartheta}^2 = -\,m\,g\,cos\,\vartheta + \Phi_N \\ \Phi_B = 0 \end{cases} \tag{DP.49}$$

In questo caso solo la forza peso è conservativa e ammette potenziale, mentre la forza viscosa non è conservativa, per cui non esiste l'integrale primo dell'energia. Tuttavia possiamo avere delle informazioni utili sul bilancio dell'energia mediante il teorema dell'energia cinetica, che ci dice che:

$$\frac{dT}{dt} = W$$

Ora W si compone di due contributi: una dovuto alla forza peso, che è conservativa e quindi è dato dalla derivata temporale del suo potenziale; l'altro che è dato dalla potenza dissipata dalla forza viscosa. Abbiamo così:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} - h\,v^2$$

Ma:

$$E = T - U$$

rappresenta l'energia meccanica del sistema, che non è un integrale primo in questo caso, e la velocità del pendolo è data da:

$$v = \ell\,\dot{\vartheta}$$

Di conseguenza si può scrivere la legge di bilancio dell'energia nella forma:

$$\frac{dE}{dt} = -h\,\ell^2\,\dot{\vartheta}^2 \leq 0$$

Come si vede la presenza della forza viscosa provoca una dissipazione di energia, in quanto l'energia meccanica, avendo derivata temporale non positiva, risulta essere una funzione decrescente del tempo.

Una forza come la forza viscosa, dipendente linearmente dalla velocità e che compie lavoro non positivo durante il moto viene detta *forza dissipativa* e la quantità:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\,h\,v^2$$

viene chiamata *funzione di dissipazione.* Una forza dissipativa non è esprimibile come gradiente di un potenziale rispetto alle coordinate, ma in termini del gradiente della sua funzione di dissipazione rispetto alle componenti delle velocità:

$$\boldsymbol{F}^{(diss)} = -\,\nabla_{\boldsymbol{v}}\mathcal{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_i^{(diss)} = -\,\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial v_i} \tag{DP.50}$$

Il sistema delle equazioni del moto, nella sua generalità non si integra analiticamente, mentre nel caso delle piccole oscillazioni, l'equazione pura del moto si riconduce a quella di un oscillatore soggetto a forza viscosa:

$$\ddot{\vartheta} + 2p\,\dot{\vartheta} + \frac{g}{\ell}\,\vartheta = 0, \qquad 2p = \frac{h}{m}$$