Lavoro e potenziale

LP. Lavoro e potenziale

Forza

In questa sezione dobbiamo introdurre un nuovo concetto che assumiamo come primitivo dalla fisica: è il concetto di *forza.* Ci occuperemo anzitutto di una singola forza applicata ad un punto e successivamente dei sistemi di forze applicate in più punti.

L'esperienza mostra che i punti materiali non isolati sono capaci di interagire fra loro. Le interazioni fra i punti materiali possono essere di varia natura: gravitazionale, elettromagnetica, ecc. In ogni caso l'azione di uno o più punti materiali su un altro punto materiale si può descrivere adeguatamente mediante un *vettore applicato* che chiamiamo *forza.*

• L'esperienza permette di stabilire che la forza agente su un punto materiale, nella sua caratterizzazione più generale, è una funzione della *posizione* del punto P al quale è applicata, cioè delle sue coordinate, della *velocità* del punto P e del *tempo:*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P, \boldsymbol{v}, t) \tag{LP.1}$$

ovvero indicando con:

$$OP \equiv (x, y, z)$$

le coordinate di P e con:

$$\boldsymbol{v} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

le componenti della velocità, risulta che:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \qquad \text{(LP.2)}$$

e cioè la forza è, nel caso più generale, una funzione di *sette variabili.* Denoteremo, indifferentemente, con $F_i, \;\; i = 1, 2, 3$ o con F_x, F_y, F_z le componenti della forza rispetto al sistema di assi cartesiani prescelto.

In molti problemi fisici le forze non dipendono dal tempo, nè dalla velocità, ma solo dalle coordinate del punto P, cioè dalla *posizione* del punto: in tal caso la forza si dice *posizionale:*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P) = \boldsymbol{F}(x, y, z) \qquad \text{(LP.3)}$$

Lavoro di una forza

Introduciamo ora il concetto di *lavoro* di una forza applicata ad un punto. Consideriamo, anzitutto, i lavori infinitesimi: il lavoro infinitesimo è una *forma differenziale lineare* ottenuta prendendo il prodotto scalare della forza per uno spostamento infinitesimo del suo punto di applicazione. Dal momento che, come abbiamo visto in cinematica dei sistemi (CS), distinguiamo due tipi di spostamenti infinitesimi, di conseguenza distinguiamo due tipi di lavoro infinitesimo:

— il *lavoro possibile* definito come il prodotto scalare della forza per lo spostamento possibile del punto di applicazione:

$$\partial L = \boldsymbol{F} \times \partial P = F_x \partial x + F_y \partial y + F_z \partial z \qquad \text{(LP.4)}$$

— il *lavoro virtuale* definito come il prodotto scalare della forza per lo spostamento virtuale del punto di applicazione:

$$\delta L = \boldsymbol{F} \times \delta P = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \qquad \text{(LP.5)}$$

Nella pratica nei casi in cui non c'è ambiguità di interpretazione si usa generalmente il simbolo d, mentre si ricorre alle altre notazioni quando è necessario distinguere esplicitamente a quale tipo di lavoro si fa riferimento. In particolare, nella dinamica utilizzeremo di regola la scrittura:

$$dL = \boldsymbol{F} \times dP$$

per denotare il lavoro compiuto dalla forza durante il moto, cioè in corrispondenza dello spostamento fisico dP compiuto dal punto sotto l'azione della forza $\boldsymbol{F}$.

Lavoro lungo un cammino finito

Scelta una curva γ di estremi P_1 e P_2 la forma differenziale del lavoro può essere *integrata* per ottenere il *lavoro della forza lungo la curva* γ, cioè lungo il *cammino finito* prescelto per andare da P_1 a P_2.

Ora, la curva γ è nota quando si conosce una sua parametrizzazione:

$$OP = OP(s) \qquad \text{(LP.6)}$$

che equivale a dire, rispetto ad una terna cartesiana ortogonale:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} , \qquad s_1 \leq s \leq s_2 \qquad \text{(LP.7)}$$

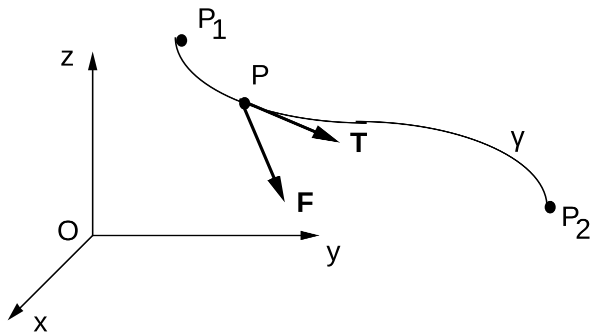

Figura LP. 1: lavoro di una forza lungo un cammino finito

Inoltre il moto del punto P lungo la curva γ risulta completamente noto se si assegna la *legge oraria* con la quale la traiettoria viene percorsa:

$$s = s(t), \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{LP.8}$$

essendo:

$$s_1 = s(t_1), \qquad s_2 = s(t_2)$$

le ascisse curvilinee di partenza e di arrivo agli estremi della curva, corrispondenti agli istanti iniziale e finale t_1 e t_2 del tempo.

Vediamo ora come si calcola, nei vari casi, l'integrale del lavoro lungo un cammino finito:

$$L = \int_\gamma \boldsymbol{F} \times dP = \int_\gamma F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{LP.9}$$

caso generale

Nel caso più generale in cui la forza abbia la struttura espressa dalla (LP.1) l'integrale curvilineo può essere ricondotto ad un integrale di Riemann nel quale la *variabile d'integrazione* è il *tempo.* Infatti la forza contiene *esplicitamente* la variabile t e si può esprimere come *funzione di* t facendo uso delle equazioni della *traiettoria* (LP.6) e della *legge oraria* (LP.8). Allora la forza $\boldsymbol{F}$ in funzione del tempo assume la forma:

$$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}(P(s(t)), \boldsymbol{v}(s(t)), t)$$

dove:

$$\boldsymbol{v}(s(t)) = \frac{dP}{dt}(s(t))$$

Il differenziale dello spostamento dP, che compare nell'integrale del lavoro (LP.9), può essere a sua volta espresso in termini del tempo, osservando che:

$$dP = \boldsymbol{v} dt \tag{LP.10}$$

Allora l'integrale del lavoro lungo il cammino finito γ si riconduce all'integrale di Riemann:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(P(s(t)), \boldsymbol{v}(s(t)), t) \times \boldsymbol{v}(s(t))\, dt$$

Ovvero, più brevemente:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} W(t)\, dt$$

dove la funzione integranda:

$$W(t) = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v} \tag{LP.11}$$

prende il nome di *potenza* sviluppata dalla forza $\boldsymbol{F}$. Osserviamo che la velocità del punto P, in quanto funzione composta del tempo attraverso s si può anche scrivere nel modo seguente:

$$\boldsymbol{v} = \frac{dP}{dt}(s(t)) = \frac{dP}{ds}\,\dot{s} = \boldsymbol{T}\dot{s}$$

come è noto dalla cinematica del punto. Allora la *potenzaÊ* si può anche scrivere:

$$W(t) = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{T}\dot{s} = F_T\dot{s} \tag{LP.12}$$

dove:

$$F_T = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{T} \tag{LP.13}$$

è la componente, tangente alla curva, della forza $\boldsymbol{F}$. Allora risulta che solamente la F_T contribuisce al lavoro e, di conseguenza, il lavoro risulta essere nullo se la forza si mantiene, punto per punto, normale alla curva γ.

• Nel caso più generale il lavoro di una forza lungo un cammino finito dipende dalla forma della *traiettoria* e dalla *legge oraria* con cui si muove il punto di applicazione.

forza posizionale

Analizzato il caso più generale esaminiamo il caso particolare della forza *posizionale* , cioè del tipo (LP.3). In questo caso l'integrale del lavoro può essere ricondotto a un integrale di Riemann nella variabile s, senza coinvolgere il tempo. Infatti: tenendo conto del fatto che il versore tangente alla traiettoria γ è definito come:

$$\boldsymbol{T} = \frac{dP}{ds}$$

segue subito che:

$$dP = \boldsymbol{T}\, ds \tag{LP.14}$$

legame che è puramente *geometrico* e non più *cinematico* come invece è la (LP.10). D'altra parte la $\boldsymbol{F}$ si può esprimere in termini di s con la sola conoscenza della traiettoria. Allora, quando la forza è posizionale, la funzione integranda diviene:

$$F_T(s) = \boldsymbol{F}(P(s)) \times \boldsymbol{T}(s) \tag{LP.15}$$

e l'integrale del lavoro è:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F_T(P(s))\, ds \tag{LP.16}$$

Notiamo che, fissata una certa curva γ, potrebbe anche accadere che solamente la componente tangente F_T di una certa forza $\boldsymbol{F}$ fosse indipendente da $\boldsymbol{v}$ e da t, mentre la componente della forza sul piano normale alla curva potrebbe dipendere da queste variabili: in questo caso il lavoro sarebbe sempre esprimibile mediante la (LP.16) anche se la forza non è posizionale. Naturalmente, però in questo caso, cambiando la curva γ si ritornerebbe al caso generale. Se la forza $\boldsymbol{F}$ è posizionale, invece, il lavoro è espresso dalla (LP.16) qualunque sia la scelta della traiettoria.

• Il lavoro di una forza *posizionale* lungo un cammino finito dipende dalla forma della *traiettoria* ma non dalla *legge oraria* con cui si muove il punto di applicazione.

forza conservativa e potenziale

Introduciamo, anzitutto, la definizione di forza conservativa.

Una forza si dice conservativa quando la forma differenziale del suo lavoro è un differenziale esatto

• Ricordiamo che *una forma differenziale lineare si dice esatta quando esiste una funzione U a un sol valore, regolare, tale che il suo differenziale totale è uguale alla forma differenziale esaminata; la funzione U si dice potenziale.*

Nel nostro caso il lavoro di una forza è una forma differenziale del tipo:

$$dL = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

e risulta essere una forma differenziale esatta se esiste una funzione regolare a un sol valore:

$$U = U(x, y, z)$$

tale che:

$$\boxed{dL = dU} \tag{LP.17}$$

Deve perciò sussistere l'identificazione fra il differenziale della funzione U e la forma differenziale del lavoro:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy + \frac{\partial U}{\partial z}\, dz$$

• Notiamo che affinchè questa identificazione possa sussistere U deve essere necessariamente funzione delle sole variabili x, y, z e non di eventuali altre variabili, come le componenti della velocità o il tempo.

Ne consegue allora l'identificazione delle componenti della forza con le derivate parziali della funzione U:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y, z), \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, z), \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}(x, y, z)$$

Questo risultato ci informa anche del fatto che se una forza è conservativa le sue componenti, essendo le derivate parziali di una funzione di x, y, z, possono essere funzioni solamente delle coordinate del punto di applicazione e non possono dipendere dalla velocità e dal tempo. Di conseguenza una forza conservativa è necessariamente posizionale, mentre non vale il viceversa in quanto possono esistere forze posizionali che non sono conservative, in quanto il loro lavoro non è un differenziale esatto.

Possiamo anche scrivere in termini di vettori:

$$\boldsymbol{F} = \nabla U \tag{LP.18}$$

Dire che una forza è conservativa equivale anche a dire che essa è il gradiente della funzione *potenziale* U, che si dice allora potenziale della forza $\boldsymbol{F}$. Perciò si dice anche che una forza è conservativa quando ammette potenziale.

• Sottolineiamo che il potenziale essendo definito mediante una condizione differenziale come la (LP.17) risulta definito sempre a meno di una costante additiva arbitraria. Per individuare univocamente il valore del potenziale in un punto bisogna assegnare il valore di tale costante, il che equivale ad assegnare il valore zero al potenziale in un certo punto (proprio o improprio) dello spazio.

Tornando ora al problema del lavoro lungo un cammino finito, calcoliamo il lavoro finito di una forza conservativa. Dal momento che la forza conservativa è necessariamente posizionale, partiamo dall'espressione del lavoro (LP.16) e introduciamo l'informazione (LP.18) nella (LP.15) ottenendo:

$$F_T(s) = \nabla U(x_i(s)) \times \boldsymbol{T}(s) = \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \frac{dU(x_i(s))}{ds} = \frac{dU(P(s))}{ds}$$

Allora:

$$F_T(s) = \frac{dU(P(s))}{ds} \tag{LP.19}$$

è la *derivata direzionale* di U lungo la tangente alla curva γ. Quindi l'integrale del lavoro (LP.16) si scrive:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F_T(s)\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dU(P(s))}{ds}\, ds =$$

$$= \left[U(P(s))\right]_{s=s_1}^{s=s_2} = U(P(s_2)) - U(P(s_1)) = U(P_2) - U(P_1)$$

Dunque quando la forza è conservativa il lavoro è dato dalla differenza del potenziale calcolato nei punti estremi del cammino d'integrazione γ:

$$L = U(P_2) - U(P_1) \tag{LP.20}$$

Dal momento che il potenziale non dipende dalla curva, ma solamente dalle coordinate del punto in cui viene calcolato, si ottiene che il lavoro dipende solo dai punti estremi e non dalla curva percorsa per congiungerli.

• Il lavoro di una forza *conservativa* lungo un cammino finito non dipende nè dalla forma della *traiettoria* nè dalla *legge oraria* con cui si muove il punto di applicazione, ma solo dai punti estremi della traiettoria.

Dal fatto che U è per ipotesi una funzione a un sol valore (*funzione monodroma*) segue anche che se si prendono P_1 e P_2 coincidenti (*curva chiusa*) si ha:

$$U(P_2) = U(P_1)$$

e quindi:

$$L = 0$$

Possiamo mostrare che è vero anche il *viceversa* e cioè: se il lavoro non dipende dalla curva γ, ma solamente dai suoi estremi (il che equivale a dire: se il lavoro lungo un qualunque cammino chiuso è nullo) allora la forza è conservativa. Infatti possiamo applicare il *teorema della media* all'integrale del lavoro ottenendo:

$$L = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{T}\, ds = \boldsymbol{F}(P(\hat{s})) \times \boldsymbol{T}(\hat{s})\, (s_2 - s_1)$$

dove $\hat{s}$ è un valore opportuno dell'intervallo $[s_1, s_2]$. Ora tenendo conto della (LP.20) abbiamo:

$$U(P(s_2)) - U(P(s_1)) = \boldsymbol{F}(P(\hat{s})) \times \boldsymbol{T}(\hat{s})\, (s_2 - s_1)$$

da cui segue, trascurando i termini di ordine superiore al primo, per piccoli incrementi di s:

$$dU(P(s)) = \boldsymbol{F}(P(s)) \times dP(s)$$

Ovvero:

$$\boldsymbol{F}(P) = \nabla U(P)$$

e quindi la forza risulta essere conservativa.

Se invece la funzione U fosse una funzione a più valori (*relazione* o funzione *polidroma*), potrebbe risultare anche: $U(P_2) \neq U(P_1)$ e quindi un lavoro non nullo lungo un cammino chiuso (è quanto accade, ad esempio in un circuito elettrico chiuso su un generatore).

• In conseguenza dei teoremi noti dall'analisi per le forme differenziali valgono i seguenti risultati:

— condizione *necessaria* affinchè una forza sia conservativa è che sia posizionale e che valga la condizione:

$$\nabla \wedge \boldsymbol{F} = 0 \tag{LP.21}$$

— la condizione (LP.21) diviene anche *sufficiente* se il dominio sul quale è definita la funzione $\boldsymbol{F}(P)$ è semplicemente connesso.

Superfici equipotenziali e linee di forza

Chiamiamo *superficie equipotenziale* il luogo geometrico dei punti dello spazio per i quali il potenziale di una forza conservativa assume un valore costante.

Detta $U(x, y, z)$ la funzione potenziale questo luogo viene caratterizzato mediante l'equazione cartesiana:

$$U(x, y, z) = C \tag{LP.22}$$

Dal momento che il potenziale è definito a meno di una costante additiva arbitraria, segue che il valore della costante C può essere determinato univocamente per ogni superficie equipotenziale, solo dopo aver assegnato convenzionalmente il valore zero (o un altro valore) al potenziale su di una superficie equipotenziale di riferimento. In tal modo il valore del potenziale viene ad essere identificato per ogni altra superficie.

Se differenziamo la (LP.22) otteniamo evidentemente:

$$dU = 0$$

che significa il risultato ovvio che spostando il punto di applicazione di una forza conservativa lungo una curva appartenente ad una superficie equipotenziale, il potenziale non cambia. Questo comporta, mediante la (LP.17):

$$dL = 0$$

Ciò significa che, spostando il punto di applicazione di una forza lungo una curva appartenente ad una superficie equipotenziale, il lavoro della forza è nullo, ovvero per definizione di lavoro:

$$\boldsymbol{F} \times dP = 0$$

Poichè gli spostamenti dP sono tangenti alla superficie equipotenziale, dal momento che ci muoviamo su di essa, l'annullarsi del prodotto scalare del lavoro equivale a dire che la forza è normale punto per punto alla superficie equipotenziale, o al più è nulla.

Si dicono allora *linee di forza* quelle curve che in ogni punto sono tangenti ai vettori di forza.

Di conseguenza le linee di forza risultano essere punto per punto normali alle superfici equipotenziali che attraversano.

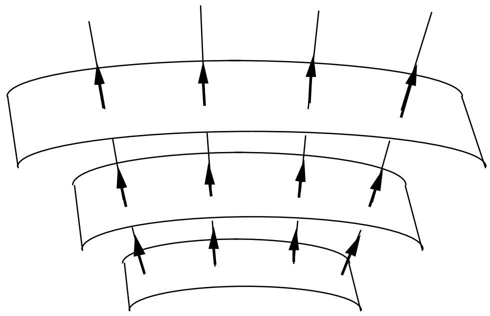

Figura LP. 2: superfici equipotenziali e linee di forza

Esempi

Esaminiamo ora alcuni esempi fisici di forze conservative che si incontrano molto di frequente, delle quali calcoliamo il potenziale.

Forza peso

La *forza peso* agente su un corpo costituito di punti materiali è una forza caratterizzabile mediante le seguenti due proprietà note dall'esperienza:

— è un vettore applicato nel baricentro G del corpo;

— è un vettore proporzionale alla massa del corpo:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} \tag{LP.23}$$

dove il vettore $\boldsymbol{g}$ è costante, in prima approssimazione, in vicinanza della superficie terrestre.

E' immediato verificare che la forza peso è una forza conservativa, infatti il suo lavoro vale:

$$dL = \boldsymbol{F} \times dG = m\boldsymbol{g} \times dOG = d(m\boldsymbol{g} \times OG + C)$$

e risulta essere un differenziale esatto perchè è espresso proprio come il differenziale di una funzione regolare a un sol valore:

$$U = m\,\boldsymbol{g} \times OG + C \qquad \text{(LP.24)}$$

Per calcolarlo esplicitamente abbiamo bisogno di scegliere un sistema di assi cartesiani sui quali proiettare le grandezze vettoriali in gioco. Generalmente sono convenienti due possibili scelte della terna di assi, l'una in alternativa all'altra:

— *prima scelta:* prendiamo il sistema cartesiano in modo che il piano xy coincida con il piano orizzontale, cioè con il piano normale al vettore $\boldsymbol{g}$ e l'asse z, che risulta di conseguenza parallelo a $\boldsymbol{g}$, sia orientato verso l'alto, cioè in verso discorde rispetto a $\boldsymbol{g}$.

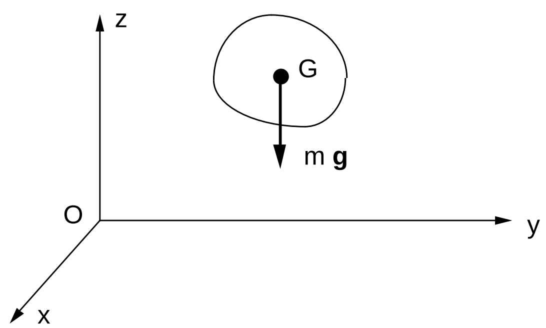

Figura LP. 3: prima scelta del riferimento per il calcolo del potenziale del peso

Allora possiamo rappresentare i vettori mediante le loro componenti, ottenendo:

$$\boldsymbol{F} \equiv (0, 0, -mg), \qquad OG \equiv (x_G, y_G, z_G)$$

dove g è il modulo di $\boldsymbol{g}$. Introducendo queste informazioni nella (LP.24) segue l'espressione del potenziale:

$$U = -mgz_G + C \tag{LP.25}$$

Generalmente è comodo scegliere $C = 0$ in modo che il potenziale sia nullo al suolo, cioè per $z_G = 0$.

— *Seconda scelta.* Una scelta alternativa alla precedente consiste nella scelta, a parità della altre condizioni, dell'asse z orientato verso il basso, cioè in verso concorde con il vettore $\boldsymbol{g}$.

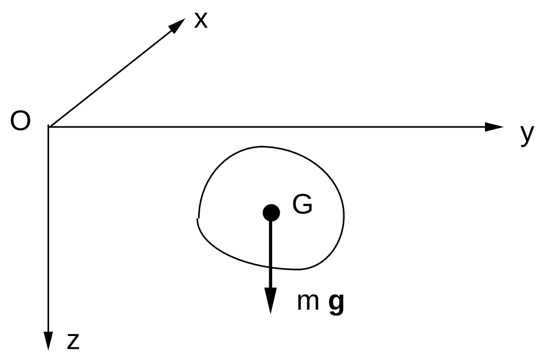

Figura LP. 4: seconda scelta del riferimento per il calcolo del potenziale del peso

In questo caso le componenti dei vettori sono:

$$\boldsymbol{F} \equiv (0, 0, mg), \qquad OG \equiv (x_G, y_G, z_G)$$

e quindi il potenziale risulta essere dato da:

$$U = mgz_G + C \tag{LP.26}$$

con il vantaggio di avere eliminato il segno negativo dalla formula.

forza centrale

Si dice forza centrale una forza la cui retta d'azione passa sempre per un punto fisso C dello spazio detto centro di forza, comunque venga fatto variare il suo punto di applicazione P

• Quando una forza centrale dipende solo dalla distanza del suo punto di applicazione dal centro di forza, allora risulta essere conservativa.

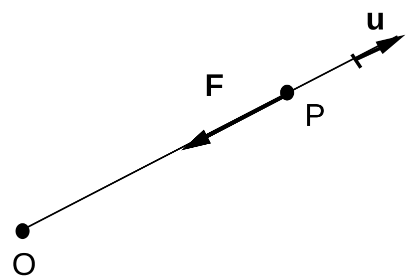

Figura LP. 5: seconda scelta del riferimento per il calcolo del potenziale del peso

Infatti, detto $\boldsymbol{u}$ il versore di CP possiamo rappresentare, in base alla definizione data, una forza centrale che dipende solo dalla distanza come:

$$\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{u}, \qquad r = |CP| \tag{LP.27}$$

Se $F(r) > 0$ la forza si dice *repulsiva* in quanto tende ad allontanare il punto P su cui agisce dal centro di forza, viceversa se $F(r) < 0$ viene detta *attrattiva.*

Verifichiamo che una tale forza è conservativa e ne calcoliamo il potenziale. Calcoliamo il lavoro:

$$dL = \boldsymbol{F} \times dP = F(r)\boldsymbol{u} \times dCP$$

Ma:

$$CP = r\boldsymbol{u}$$

e quindi:

$$dL = F(r)\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{u}dr + rd\boldsymbol{u})$$

Tenendo conto che $\boldsymbol{u}$ è un versore abbiamo:

$$\boldsymbol{u}^2 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{u} = 0$$

da cui:

$$dL = F(r)\,dr$$

Supponendo che $F(r)$ sia una funzione continua, come accade generalmente per le variabili di natura fisica, è possibile scrivere

$$F(r)\,dr = d\int_{r_0}^{r} F(\hat{r})\,d\hat{r}$$

Abbiamo dunque espresso il lavoro come il differenziale della funzione:

$$U(r) = \int_{r_0}^{r} F(\hat{r})\, d\hat{r} \tag{LP.28}$$

Un tipico esempio di forza centrale dipendente dalla distanza è dato dalla forza gravitazionale di Newton per la quale risulta:

$$F(r) = -h\,\frac{Mm}{r^2} \tag{LP.29}$$

e quindi:

$$U(r) = h\,\frac{Mm}{r} + C \tag{LP.30}$$

In questo caso lo zero del potenziale viene generalmente scelto all'infinito in modo che risulti:

$$U(r) = h\,\frac{Mm}{r} \tag{LP.31}$$

Lavoro di un sistema di forze

Oltre al lavoro di una singola forza applicata ad un punto si definisce il lavoro di un sistema di forze applicate in più punti. Un sistema di forze può essere un insieme discreto oppure una distribuzione continua di vettori di forza i cui punti di applicazione costituiscono un insieme che ha la potenza del continuo. Va evidenziato che se un sistema di forze agisce su di un corpo non vi sono necessariamente forze applicate su tutti i punti del corpo, per cui può benissimo accadere che un corpo sia continuo, ma che i punti ai quali sono applicate le forze che agiscono su di esso costituiscano un insieme discreto. Perciò l'insieme dei punti di applicazione di un sistema di forze non va identificato con l'insieme dei punti materiali che costituiscono il corpo sul quale il sistema di forze agisce.

Lavoro di un sistema discreto di forze

Dato il sistema discreto di n forze applicate in n punti:

$$\mathcal{F} = \{(P_s, \boldsymbol{F}_s),\ s = 1, 2, \cdots, n\}$$

si definisce *lavoro del sistema di forze* la somma dei lavori di tutte le forze al variare dei rispettivi punti di applicazione. In particolare, come per il lavoro di una sola forza si distinguono:

— il *lavoro possibile:*

$$\partial L = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \partial P_s \tag{LP.32}$$

— e il *lavoro virtuale:*

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta P_s \tag{LP.33}$$

Nella pratica nei casi in cui non c'è ambiguità di interpretazione si usa generalmente il simbolo d, scrivendo:

$$dL = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times dP_s$$

Si noti che qualora si voglia integrare il lavoro di un sistema di forze, occorre considerare il lavoro finito di ogni forza integrato sulla traiettoria γ_s del rispettivo punto di applicazione, e cioè:

$$L = \sum_{s=1}^{n} \int_{\gamma_s} \boldsymbol{F}_s \times dP_s$$

mentre si ricorre alle altre notazioni quando è necessario distinguere esplicitamente a quale tipo di lavoro si fa riferimento.

Lavoro di un sistema continuo di forze

Dato il sistema continuo di forze applicate ai punti di un dominio $\mathcal{C}$, avente la potenza del continuo, ad ogni elemento dC centrato in un punto P del dominio si associa l'elemento di forza:

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t)\, dC \qquad \text{(LP.34)}$$

dove la funzione $\boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t)$, che si suppone definita su tutto il dominio, è detta *densità di forza.* La relazione (LP.34) si dice *legge di distribuzione della forza.*

In questo caso si definisce *lavoro del sistema di forze* l'integrale dei lavori di tutti gli elementi di forza al variare dei rispettivi punti di applicazione. In particolare si distinguono:

— il *lavoro possibile:*

$$\partial L = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t) \times \partial P\, dC \qquad \text{(LP.35)}$$

— e il *lavoro virtuale:*

$$\delta L = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t) \times \delta P\, dC \qquad \text{(LP.36)}$$

In questo caso, il lavoro finito è l'integrale su tutto il dominio $\mathcal{C}$, che definisce il continuo, dei lavori delle singole forze integrati sulle rispettive traiettorie $\gamma(P)$ dei punti di applicazione:

$$L = \int_{\mathcal{C}} \int_{\gamma(P')} \boldsymbol{f}(P, \boldsymbol{v}, t) \times \partial P \, dC'$$

Nel seguito ci riferiremo a sistemi di forze discreti, avendo indicato qui come procedere per l'estensione dei risultati al continuo.

Lavoro di un sistema di forze applicate a un corpo rigido

Supponiamo di avere un sistema discreto di n forze applicate ad n punti di un corpo rigido: in questo caso il lavoro possibile e il lavoro virtuale acquistano una caratterizzazione particolare in quanto i punti del corpo non si possono muovere arbitrariamente, ma i loro spostamenti sono soggetti alla legge di distribuzione (CR.70) che possiamo specializzare nel nostro caso come:

$$\partial P_s = \partial \Omega + \partial \boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P_s \tag{LP.37}$$

per gli spostamenti possibili e:

$$\delta P_s = \delta \Omega + \delta \boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P_s \tag{LP.38}$$

per gli spostamenti virtuali. Notiamo che se il corpo rigido è libero gli spostamenti virtuali e quelli possibili coincidono, perchè l'unico vincolo presente è il vincolo di rigidità che è indipendente dal tempo. Se il corpo rigido è soggetto anche a vincoli esterni gli spostamenti non coincideranno se i vincoli esterni dipendono dal tempo.

Introducendo la legge di distribuzione degli spostamenti nella definizione di lavoro di un sistema di forze otteniamo, per esempio per il lavoro virtuale:

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times (\delta\Omega + \delta\boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P_s) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta\Omega + \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta\boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P_s$$

Dal momento che $\delta\Omega$ è indipendente dall'indice s possiamo raccoglierlo a fattor comune nella prima sommatoria a secondo membro della relazione precedente:

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \delta\Omega = \left(\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s\right) \times \delta\Omega = \boldsymbol{R} \times \delta\Omega$$

avendo introdotto il vettore risultante delle forze applicate:

$$\boldsymbol{R} = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s$$

Inoltre utilizzando la proprietà commutativa del prodotto scalare, possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{F}_s \times \delta\boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P_s = \delta\boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P_s \times \boldsymbol{F}_s$$

Infine per le proprietà del prodotto misto possiamo scambiare gli operatori $\wedge$ e $\times$ ottenendo:

$$\delta\boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P_s \times \boldsymbol{F}_s = \delta\boldsymbol{\psi} \times \Omega P_s \wedge \boldsymbol{F}_s$$

Scrivendo ora la seconda sommatoria che compare nell'espressione del lavoro prima calcolata raccogliamo $\delta\boldsymbol{\psi}$ a fattor comune:

$$\sum_{s=1}^{n} \delta\boldsymbol{\psi} \times \Omega P_s \wedge \boldsymbol{F}_s = \delta\boldsymbol{\psi} \times \left(\sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge \boldsymbol{F}_s \right) = \boldsymbol{M}_{\Omega} \times \delta\boldsymbol{\psi}$$

avendo introdotto il vettore momento risultante delle forze applicate:

$$\boldsymbol{M}_{\Omega} = \sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge \boldsymbol{F}_s$$

Introducendo questi risultati nell'espressione del lavoro abbiamo, finalmente che il lavoro virtuale di un sistema di forze applicate ad un corpo rigido si esprime mediante la relazione:

$$\boxed{\delta L = \boldsymbol{R} \times \delta\Omega + \boldsymbol{M}_{\Omega} \times \delta\boldsymbol{\psi}} \tag{LP.39}$$

Lo stesso risultato si ottiene per il lavoro possibile.

Come caso particolare si ha il lavoro di una coppia applicata ad un corpo rigido avente momento $\boldsymbol{M}$ il cui valore è, com' è noto indipendente dal polo. Poichè per una coppia il risultante è nullo, abbiamo nella (LP.39):

$$\delta L_{coppia} = \boldsymbol{M} \times \delta\boldsymbol{\psi} \tag{LP.40}$$

• Dai risultati precedenti traiamo un'importante conseguenza: poichè il lavoro di un sistema di forze applicate ai punti di un corpo rigido dipende solo dal risultante e dal momento risultante delle forze, ne consegue che *il lavoro non è alterato se si compiono delle operazioni elementari sul sistema di vettori applicati delle forze, dal momento che tali operazioni non alterano nè il risultante nè il momento risultante.* In mancanza della condizione di rigidità ciò non è più vero, perchè il lavoro viene a dipendere da ogni singola forza applicata e dai singoli spostamenti dei punti di applicazione.

• Tutti i risultati precedenti sono applicabili anche ad un corpo non rigido quando viene sottoposto a soli spostamenti rigidi, cioè tali da rispettare la condizione di rigidità attraverso la legge di distribuzione degli spostamenti rigidi.

Lavoro di un sistema di forze applicate a un sistema olonomo

Un sistema olonomo a N gradi di libertà è caratterizzato dalla relazione (CS.21):

$$OP_s = OP_s(q_1, q_2, \cdots, q_N, t)$$

che identifica le coordinate dei punti del sistema mediante i parametri lagrangiani q_h e il tempo. Se i vincoli sono dipendenti dal tempo gli spostamenti possibili:

$$\partial P_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\partial q_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}\,\partial t$$

si diversificano dagli spostamenti virtuali:

$$\delta P_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\delta q_h$$

E quindi anche i lavori virtuali e possibili si diversificano tra loro. Abbiamo per il lavoro possibile:

$$\partial L = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\partial q_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}\,\partial t \right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \partial q_h + \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial t} \partial t$$

E per il lavoro virtuale:

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h$$

E' conveniente introdurre le quantità:

$$Q_h = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \tag{LP.41}$$

che prendono il nome di *forze generalizzate di Lagrange* o anche di *componenti lagrangiane delle forze.* Inoltre la quantità:

$$W = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{F}_s \times \frac{\partial P_s}{\partial t} \tag{LP.42}$$

che rappresenta la potenza sviluppata dalle forze al variare dei vincoli. Otteniamo allora, per i lavori delle forze agenti su di un sistema olonomo le seguenti espressioni:

$$\boxed{\partial L = Q_h \, \partial q_h + W \, \partial t} \tag{LP.43}$$

$$\boxed{\delta L = Q_h \, \delta q_h} \tag{LP.44}$$

A queste formule possiamo dare in alternativa una rappresentazione simbolica anzichè indiciale introducendo i vettori a N componenti:

$$\boldsymbol{q} \equiv (q_h), \qquad \boldsymbol{Q} \equiv (Q_h)$$

Abbiamo allora nelle espressioni dei lavori:

$$\boxed{\partial L = \boldsymbol{Q} \times \partial \boldsymbol{q} + W\, \partial t} \tag{LP.45}$$

$$\boxed{\delta L = \boldsymbol{Q} \times \delta \boldsymbol{q}} \tag{LP.46}$$

nelle quali $\times$ indica il prodotto scalare nello spazio delle configurazioni.

Sistemi di forze conservativi

Diamo la seguente definizione di sistema di forze conservativo.

Un sistema di forze si dice conservativo quando la forma differenziale del lavoro totale delle forze è un differenziale esatto, cioè è il differenziale di una funzione regolare a un sol valore U

In tal caso il potenziale U rappresenta il potenziale relativo all'intero sistema di forze.

• Notiamo che se ogni singola forza applicata a un punto del sistema è conservativa allora l'intero sistema di forze è conservativo, perchè la somma di differenziali esatti è ancora un differenziale esatto. Tuttavia può anche accadere che le singole forze, considerate separatamente non siano conservative, ma lo siano nel loro complesso, in quanto i differenziali dei lavori di ciascuna forza non sono differenziali esatti, ma lo è la loro somma.

• Per un sistema olonomo, quando i vincoli dipendono dal tempo, il potenziale sarà generalmente una funzione dei parametri lagrangiani e del tempo:

$$U = U(q_h, t)$$

Infatti deve accadere che:

$$\partial L = \partial U \tag{LP.47}$$

ovvero:

$$Q_h \, \partial q_h + W \, \partial t = \frac{\partial U}{\partial q_h} \, \partial q_h + \frac{\partial U}{\partial t} \, \partial t$$

identità che viene soddisfatta se e solo se:

$$\boldsymbol{Q}_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}, \qquad W = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{LP.48}$$

Mentre se i vincoli sono indipendenti dal tempo, dovendo essere di conseguenza $W = 0$ identicamente, segue, dalla seconda delle (LP.48) che U non può contenere la dipendenza esplicita dal tempo.

• Osserviamo che se il lavoro possibile è un differenziale esatto anche il lavoro virtuale è un differenziale esatto, in quanto la prima delle (LP.48) è sufficiente a garantire che:

$$\delta L = \frac{\partial U}{\partial q_h} \, \delta q_h = \delta U$$

Il viceversa non è generalmente vero, perchè il fatto che sussista la prima delle (LP.48) non basta a garantire che la (LP.47) sia verificata, a meno che i vincoli siano indipendenti dal tempo. Le conseguenze di questa circostanza appariranno chiare dal confronto tra la statica e la dinamica: il risultato trovato, infatti, significa che un sistema di forze applicate ad un sistema olonomo a vincoli dipendenti dal tempo può essere conservativo in regime statico e non esserlo in regime dinamico, a causa del comportamento evolutivo dei vincoli, dal momento che gli spostamenti fisici del sistema sono dei particolari spostamenti possibili.

Un'ulteriore osservazione riguarda il fatto che il potenziale di un sistema di forze conservativo, pur potendo dipendere anche esplicitamente dal tempo, non può comunque dipendere dalle $\dot{q}_h$, perchè il differenziale del lavoro non contiene mai il differenziale di tali variabili; e questo comporta, in forza delle (LP.48) che anche le Q_h e W, in un sistema conservativo, non possono dipendere dalle $\dot{q}_h$.

• Di conseguenza, se un sistema di forze conservativo contiene delle forze che dipendono anche dalle velocità dei loro punti di applicazione, tali forze non compiono lavoro.

Considerazioni analitiche

In conseguenza dei teoremi noti dall'analisi per le forme differenziali valgono i seguenti risultati, che generalizzano quelli riportati nel caso del lavoro di una sola forza applicata ad un punto:

— condizione *necessaria* affinchè un sistema di forze sia conservativo è che le forze generalizzate di Lagrange non dipendano dalle $\dot{q}_h$ e che valgano le condizioni:

$$\frac{\partial Q_h}{\partial q_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_h}, \qquad\qquad \frac{\partial Q_h}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial q_h} \tag{LP.49}$$

— le condizioni (LP.49) divengono anche *sufficienti* se il dominio sul quale sono definite le funzioni Q_h e W è semplicemente connesso.

Tali condizioni si riducono alla prima delle (LP.49) quando i vincoli sono indipendenti dal tempo, oppure quando ci si limita all'esame dei lavori virtuali.

Determinazione del potenziale

Dal punto di vista operativo quando si ha a che fare con una forma differenziale lineare e si vuole verificare se è esatta, e nel caso che lo sia si vuole determinare il potenziale, possiamo procedere seguendo due vie alternative.

— La prima strada è *diretta:* consiste nel cercare di esprimere direttamente, se è possibile, mediante manipolazioni algebriche, la forma differenziale come differenziale di una funzione regolare a un sol valore. Se si riesce in questo allora si è verificato direttamente che tale funzione esiste e si è pervenuti a determinare il potenziale. Questo metodo è facile da utilizzare nei casi più semplici.

Per esempio, sia data la forma differenziale:

$$d\omega = 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$$

E' immediato che si tratta del differenziale di un prodotto e che si può scrivere:

$$d\omega = y^2\,d(x^2) + x^2\,d(y^2) = d(x^2y^2 + C)$$

e quindi il potenziale esiste e vale:

$$U(x, y) = x^2y^2 + C$$

— La seconda strada è *indiretta:* si può sempre utilizzare, anche se generalmente è meno rapida della precedente; in particolare la si utilizza quando non si è in grado di procedere con il metodo diretto. Essa consiste di due passi logici:

a) verifica delle condizioni (LP.49) necessarie e sufficienti, quando il dominio è semplicemente connesso, per l'esistenza del potenziale;

b) se le condizioni (LP.49) sono soddisfatte si passa all'integrazione del potenziale.

L'integrazione del potenziale, ad esempio nel caso di una forma differenziale lineare in due variabili del tipo:

$$d\omega = f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$$

si può fare nel modo seguente; dopo aver verificato che:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

ed esserci assicurati che il dominio è semplicemente connesso, sappiamo che il potenziale esiste e quindi che:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f(x, y), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = g(x, y) \tag{LP.50}$$

Integrando la prima rispetto alla variabile x abbiamo:

$$U(x, y) = F(x, y) + \varphi(y)$$

dove:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\, d\xi$$

essendo $\varphi(y)$ una funzione in y da determinare. Derivando rispetto a y il potenziale ottenuto e imponendo la seconda delle condizioni (LP.50) ricaviamo un'equazione differenziale per la funzione incognita $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}+\frac{d\varphi(y)}{dy}=g(x,y)$$

Integrando infine quest'ultima rispetto alla variabile y otteniamo:

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y} g(x,\eta)\,d\eta - F(x,y)+F(x,y_0)$$

Quindi il potenziale risulta dato da:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} f(\xi,y_0)\,d\xi+\int_{y_0}^{y} g(x,\eta)\,d\eta \qquad \text{(LP.51)}$$

Riprendendo l'esempio esaminato con il metodo diretto avremmo:

a) verifica delle condizioni (LP.49):

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4xy=\frac{\partial g}{\partial x}$$

b) integrazione del potenziale mediante la (LP.51):

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} 2\xi y_0^2\,d\xi+\int_{y_0}^{y} 2x^2\eta\,d\eta=(x^2-x_0^2)y_0^2+x^2(y^2-y_0^2)$$

ovvero:

$$U(x,y)=x^2y^2-x_0^2y_0^2$$

Risultato che si identifica con quello ottenuto con il metodo diretto ponendo:

$$C = -x_0^2 y_0^2$$

Esempi

Facciamo ora qualche considerazione di tipo esemplificativo sui sistemi di forze che risultano essere conservativi nel loro complesso, mentre non sono conservative le singole forze considerate separatamente.

Cominciamo con tre osservazioni di carattere analitico sulle forme differenziali:

— consideriamo come primo caso una forma differenziale in una sola variabile:

$$d\omega = f(x)\, dx$$

essendo f una funzione regolare a valori in R. Questa forma differenziale è esatta dal momento che la continuità della funzione f è sufficiente a garantire la sua integrabilità, e le grandezze fisiche si assumono generalmente essere continue. Per cui possiamo scrivere:

$$d\omega = d \int_{x_0}^{x} f(\hat{x})\, d\hat{x}$$

Il potenziale esiste e vale:

$$U(x) = \int_{x_0}^{x} f(\hat{x})\, d\hat{x}$$

— come secondo caso consideriamo una forma differenziale in due variabili:

$$d\omega = f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$$

dove f, g sono regolari e definite su un dominio semplicemente connesso di R^2 a valori in R.

Se si verifica, per ipotesi, che g sia identicamente nulla, la forma differenziale assume la struttura:

$$d\omega = f(x, y)\, dx \tag{LP.52}$$

Ora affinchè questa sia un differenziale esatto deve accadere, in forza del teorema sopra enunciato e dell'ipotesi che g è identicamente nulla, che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

Di conseguenza:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Quindi f non può dipendere dalla y, ma deve essere solo funzione di x. Perciò affinchè una forma differenziale del tipo (LP.52) sia esatta occorre che:

$$d\omega = f(x)dx$$

Nel qual caso ci ritroviamo nel caso precedentemente esaminato in cui esiste il potenziale.

Ne concludiamo che una forma differenziale che ha la struttura (LP.52) con f dipendente da entrambe le variabili, non può essere esatta.

— come terzo caso esaminiamo le tre forme differenziali:

$$d\omega_1 = f(x, y)\, dx, \qquad d\omega_2 = g(x, y)\, dy$$

$$d\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

con f, g regolari definite su un dominio semplicemente connesso di R^2 a valori in R e tali da soddisfare la condizione:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Se ne conclude che $d\omega_1$ e $d\omega_2$ non sono forme differenziali esatte, mentre la loro somma $d\omega$ è esatta.

Forze elastiche

Tornando alla meccanica esaminiamo il comportamento del lavoro di due *forze elastiche* che vengono scambiate tra due punti A e B collegati tra loro mediante una *molla ideale.*

Chiamiamo *molla ideale* un sistema meccanico ai cui punti estremi A e B si realizzano due forze esprimibili mediante i vettori applicati:

$$(A, \boldsymbol{F}_A), \qquad (B, \boldsymbol{F}_B), \qquad \boldsymbol{F}_A = k^2 AB, \qquad \boldsymbol{F}_B = -\boldsymbol{F}_A$$

con k^2 costante positiva che prende il nome di costante elastica della molla. Due forze di questo tipo formano una coppia di braccio nullo, sono proporzionali alla lunghezza assunta dalla molla e si dicono *forze elastiche.*

E' conveniente introdurre un'ascissa x lungo la retta d'azione comune alle due forze che coincide con la congiungente i punti A e B, denotare con x_A e x_B le loro ascisse e chiamare con $\boldsymbol{u}$ il versore della retta d'azione.

Allora le forze elastiche si esprimono in termini delle coordinate come:

$$\boldsymbol{F}_A = k^2(x_B - x_A)\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{F}_B = -k^2(x_B - x_A)\boldsymbol{u}, \qquad OA = x_A\boldsymbol{u},\ OB = x_B\boldsymbol{u}$$

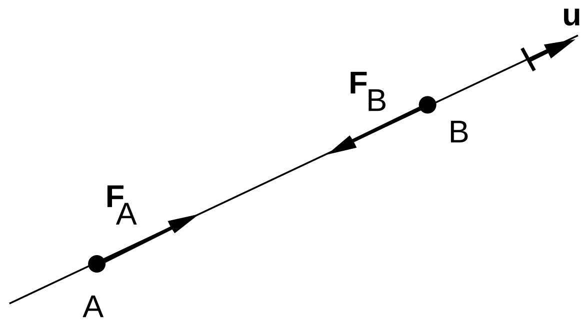

Figura LP. 6: forze elastiche

I lavori di queste forze considerate singolarmente sono allora:

$$dL_A = \boldsymbol{F}_A \times \, dA = k^2(x_B - x_A)\, dx_A,$$

$$dL_B = \boldsymbol{F}_B \times \, dB = -k^2(x_B - x_A)\, dx_B$$

Queste sono forme differenziali del tipo (LP.52) nelle variabili x_A, x_B e come tali non sono in generale differenziali esatti. Si deve concludere che una forza elastica singola, realizzata da una molla ideale i cui estremi sono entrambi mobili, non è conservativa. Essa risulta essere conservativa se uno degli estremi della molla è bloccato, per cui la corrispondente ascissa diviene costante. Per esempio, se blocchiamo A la x_A non è più una variabile perchè è stata fissata, e quindi i lavoro della forza applicata in A risulta nullo in quanto A è fisso e quindi $dx_A = 0$. Possiamo prendere poi, per comodità A come origine delle ascisse e quindi $x_A = 0$. Allora il lavoro della forza applicata in B vale:

$$dL_B = -k^2 x_B \, dx_B = d\left(-\frac{1}{2}\, k^2 x_B^2 + C\right)$$

Da cui il potenziale della forza elastica realizzata da una molla ideale fissata nel suo estremo $A \equiv O$:

$$U = -\frac{1}{2}\, k^2 x_B^2 \tag{LP.53}$$

avendo scelto lo zero del potenziale quando la molla è a riposo, cioè per $x_B = 0$.

Nel caso invece che entrambi gli estremi della molla siano liberi le forme differenziali dei lavori delle singole forze non sono esatte, tuttavia è esatto il differenziale del lavoro totale delle due forze. Infatti abbiamo:

$$dL = dL_A + dL_B = k^2(x_B - x_A)\, dx_A - k^2(x_B - x_A)\, dx_B =$$

$$= -k^2(x_B - x_A)\, d(x_B - x_A)$$

grazie alla linearità dell'operatore di differenziale. E' facile vedere che questo è un differenziale esatto: infatti denotando semplicemente l'allungamento della molla con:

$$x = x_B - x_A$$

possiamo scrivere il lavoro come forma differenziale della sola variabile x:

$$dL = -k^2 x\, dx = d\left(-\frac{1}{2}\, k^2 x^2 + C\right)$$

Quindi
il potenziale delle due forze elastiche risulta essere complessivamente dato da:

$$U = -\frac{1}{2}\,k^2 x^2 \tag{LP.54}$$

con la solita scelta della costante $C = 0$.

Dal punto di vista fisico questo risultato significa che ciò che immagazzina l'energia è la molla nel suo complesso per cui il bilancio delle energie del lavoro deve essere valutato sul lavoro totale delle due forze perchè si possa parlare di sistema conservativo.

Potenziale di una coppia applicata a un corpo rigido

Come ulteriore esempio consideriamo una coppia applicata ad un corpo rigido. Se il differenziale del suo lavoro risulta essere un differenziale esatto, allora possiamo parlare di *coppia conservativa* e di *potenziale della coppia.*

Prendiamo, per esempio una coppia di momento:

$$\boldsymbol{M} = f(\vartheta)\,\boldsymbol{u}$$

dove ϑ è il parametro lagrangiano che identifica la configurazione di un corpo rigido con un asse fisso di direzione data dal versore $\boldsymbol{u}$, al quale è applicata la coppia e f è una funzione integrabile.

Allora il lavoro della coppia vale:

$$dL = \boldsymbol{M} \times d\boldsymbol{\psi} = f(\vartheta)\,d\vartheta = d\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} f(\hat{\vartheta})\,d\hat{\vartheta}$$

E quindi la coppia è conservativa e il suo potenziale è dato da:

$$U(\vartheta) = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} f(\hat{\vartheta})\,d\hat{\vartheta}$$

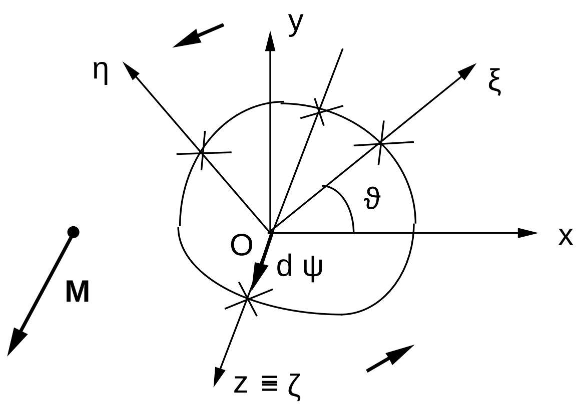

Figura LP. 7: coppia applicata a un corpo rigido con un asse fisso