Cinematica delle masse

CM. Cinematica delle masse

In questo capitolo introduciamo i concetti di *quantità di moto, momento della quantità di moto* e di *energia cinetica,* e sviluppiamo i teoremi ad essi relativi, indipendentemente dalla dinamica vera e propria, come abbiamo fatto trattando dei baricentri e dei momenti d'inerzia. Ora, però non ci basta più la sola conoscenza geometrica della distribuzione della massa del corpo, ma abbiamo bisogno anche di informazioni relative allo *stato cinetico* del sistema materiale che consideriamo: in particolare ci è necessario conoscere le *velocità* dei punti del sistema rispetto ad un osservatore. Perciò questo capitolo della meccanica viene denominato *cinematica delle masse,* in quanto richiede informazioni cinematiche oltre che geometriche, relativamente ai punti materiali che compongono il sistema.

Quantità di moto, momento della quantità di moto ed energia cinetica

Introduciamo i concetti di *quantità di moto, momento della quantità di moto* e di *energia cinetica* anzitutto per un punto materiale e successivamente per un sistema di punti materiali.

a. punto materiale

Per un punto materiale P di massa m, dotato, in un certo istante, di velocità $\boldsymbol{v}$ si definisce:

— *quantità di moto* il *vettore:*

$$\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v} \tag{CM.1}$$

— *momento della quantità di moto* rispetto ad un polo Ω lo *pseudovettore:*

$$\boldsymbol{K}_\Omega = \Omega P \wedge m\boldsymbol{v} \tag{CM.2}$$

— *energia cinetica* lo *scalare:*

$$T = \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}^2 \tag{CM.3}$$

Queste tre grandezze si annullano se il punto ha velocità nulla, e dipendono evidentemente dalla scelta dell'osservatore del moto. Il *momento della quantità di moto* dipende anche dalla scelta del polo Ω e si annulla se $P \equiv \Omega$. L'*energia cinetica* inoltre è sempre una quantità maggiore o uguale a zero.

b. sistema di punti materiali

Per un sistema di punti materiali le definizioni precedenti si estendono in modo del tutto naturale:

— *sistema discreto:* per un sistema particellare abbiamo:

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v}_s \tag{CM.4}$$

$$\boldsymbol{K}_\Omega = \sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge m_s \boldsymbol{v}_s \tag{CM.5}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v}_s^2 \tag{CM.6}$$

— *sistema continuo:* per un sistema continuo possiamo estendere le definizioni precedenti associando a ciascun punto P un elemento di massa

$dm = \mu\, dC$ dotato di velocità $\boldsymbol{v}$; di conseguenza abbiamo, per ogni elemento del corpo:

$$d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{v} dm = \mu\, \boldsymbol{v}\, dC \qquad \text{(CM.7)}$$

$$d\boldsymbol{K}_{\Omega} = \Omega P \wedge \boldsymbol{v} dm = \Omega P \wedge \mu\, \boldsymbol{v}\, dC \qquad \text{(CM.8)}$$

$$dT = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 dm = \frac{1}{2}\mu\, \boldsymbol{v}^2\, dC \qquad \text{(CM.9)}$$

Per cui, integrando sul dominio $\mathcal{C}$ che rappresenta l'insieme dei punti del corpo otteniamo, in termini finiti:

$$\boldsymbol{Q} = \int_{\mathcal{C}} \mu\, \boldsymbol{v}\, dC \qquad \text{(CM.10)}$$

$$\boldsymbol{K}_{\Omega} = \int_{\mathcal{C}} \Omega P \wedge \mu\, \boldsymbol{v}\, dC \qquad \text{(CM.11)}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \mu\, \boldsymbol{v}^2\, dC \qquad \text{(CM.12)}$$

E' immediato osservare che anche per un sistema di punti materiali l'*energia cinetica* è sempre maggiore o uguale a zero. Per quanto riguarda il *momento della quantità di moto* esso varia al variare del polo secondo la legge di distribuzione dei momenti, valida per tutti i sistemi di vettori applicati:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega'} = \boldsymbol{K}_{\Omega} + \Omega'\Omega \wedge \boldsymbol{Q} \qquad \text{(CM.13)}$$

Introdotte le definizioni procediamo ora con alcuni teoremi che sono utili per il calcolo della *quantità di moto,* del *momento della quantità di moto* e dell'*energia cinetica,* in quanto consentono di collegare fra loro queste quantità valutate rispetto ad osservatori differenti, riducendo il numero di integrali da calcolare.

Teorema del moto del baricentro

> *La quantità di moto di qualunque sistema materiale rispetto ad un osservatore è uguale alla quantità di moto del baricentro pensato come se fosse un punto materiale al quale viene associata la massa dell'intero sistema*

DIMOSTRAZIONE

Nel caso di un sistema discreto (il caso del continuo si tratta in modo analogo) il baricentro è identificato mediante la relazione (BA.8) dal vettore:

$$OG = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{n} m_s OP_s$$

dove m è la massa totale del sistema. Riscriviamo, moltiplicando entrambi i membri per m:

$$m\,OG = \sum_{s=1}^{n} m_s OP_s \tag{CM.14}$$

Derivando rispetto al tempo la (CM.14) otteniamo, tenendo conto che l'origine O è un punto fisso:

$$m\,\boldsymbol{v}_G = \sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{Q}$$

Dunque resta dimostrato il teorema del moto del baricentro, che in formula si traduce nella:

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = m\,\boldsymbol{v}_G} \tag{CM.15}$$

Moto relativo al baricentro

Prima di passare ai due teoremi di König occorre introdurre il concetto di *sistema baricentrale* e di *moto relativo al baricentro.*

Dato un osservatore qualunque $Oxyz$ e un sistema materiale in moto rispetto ad esso introduciamo un secondo sistema di riferimento, che prende il nome di *sistema baricentrale.* Esso si caratterizza per il fatto che:

— *la sua origine coincide con il baricentro G del sistema materiale;*

— *i suoi assi sono paralleli agli assi del sistema* $Oxyz$

per cui il *sistema baricentrale* trasla rispetto al sistema dell'osservatore $Oxyz$.

Il moto del corpo in quanto è osservato dall'osservatore solidale con il *sistema baricentraleÊ* viene detto *moto relativo al baricentro.*

Per quanto riguarda le notazioni denoteremo con:

$$\boldsymbol{Q}^{(G)} = \sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v'}_s \tag{CM.16}$$

$$\boldsymbol{K}_{\Omega}^{(G)} = \sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge m_s \boldsymbol{v'}_s \tag{CM.17}$$

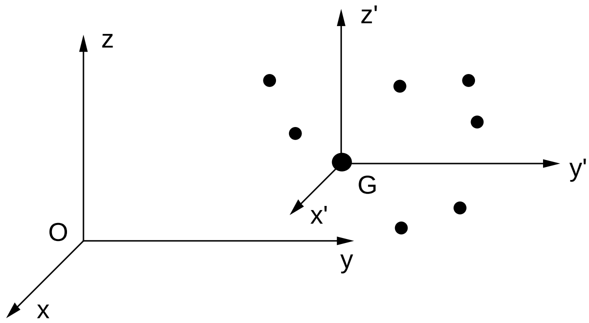

Figura CM. 1: sistema baricentrale

$$T^{(G)} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v'}_s^2 \qquad \text{(CM.18)}$$

la quantità di moto, e rispettivamente, il momento della quantità di moto e l'energia cinetica rispetto al sistema baricentrale, avendo contrassegnato con un apice le velocità dei punti rispetto agli assi baricentrali.

Osserviamo che, dal momento che nel *sistema baricentrale* il baricentro coincide con l'origine degli assi, si ha di conseguenza:

$$\boldsymbol{v'}_G = \mathbf{o} \qquad \text{(CM.19)}$$

e grazie al teorema del moto del baricentro (CM.15) risulta:

$$\boldsymbol{Q}^{(G)} = \mathbf{o} \qquad \text{(CM.20)}$$

Primo teorema di König

> *L'energia cinetica di un sistema materiale rispetto a un osservatore qualunque è uguale all'energia cinetica dello stesso sistema materiale calcolata rispetto al sistema baricentrale sommata con l'energia cinetica del moto del baricentro pensato come se fosse un punto materiale al quale viene associata la massa dell'intero sistema*

DIMOSTRAZIONE

Conduciamo la dimostrazione per un sistema discreto; per definizione di energia cinetica abbiamo:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v}_s^2$$

$$T^{(G)} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v'}_s^2$$

Per stabilire un legame fra queste due energie cinetiche occorre un legame fra le velocità relative ai due osservatori. Il teorema di composizione delle velocità di Galileo (MR.15) ci dice che, in generale, per un punto vale il legame fra velocità assoluta e relativa:

$$\boldsymbol{v}^{(a)} = \boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{v}^{(\tau)}$$

Nel nostro caso, per il generico punto P_s del sistema materiale, $\boldsymbol{v}_s$ rappresenta la velocità assoluta, $\boldsymbol{v'}_s$ la velocità relativa e la velocità di trascinamento è semplicemente la velocità del baricentro del sistema. Infatti, per definizione, la velocità di trascinamento vale:

$$\boldsymbol{v}^{(\tau)} = \boldsymbol{v}_{\Omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P$$

Poichè nel nostro caso $\Omega \equiv G$ e $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{o}$, dal momento che il sistema baricentrale trasla rispetto al sistema assoluto, segue:

$$\boldsymbol{v}^{(\tau)} = \boldsymbol{v}_G \tag{CM.21}$$

Quindi fra le velocità del generico punto P_s del sistema materiale sussiste il legame:

$$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v'}_s + \boldsymbol{v}_G \tag{CM.22}$$

Sostituendo questa legge di trasformazione nell'espressione dell'energia cinetica otteniamo:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s(\boldsymbol{v'}_s + \boldsymbol{v}_G)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v'}^2_s + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v}^2_G + \sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v'}_s \times \boldsymbol{v}_G =$$

$$= T^{(G)} + \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2_G + \boldsymbol{Q}^{(G)} \times \boldsymbol{v}_G$$

Ma grazie al teorema del moto del baricentro abbiamo:

$$\boldsymbol{Q}^{(G)} m\, \boldsymbol{v'}_G = \mathbf{o}$$

per cui l'enunciato risulta dimostrato. In formula il primo teorema di König risulta dunque espresso da dalla seguente relazione:

$$\boxed{T = T^{(G)} + \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2_G} \tag{CM.23}$$

Secondo teorema di König

> *Il momento della quantità di moto di un sistema materiale rispetto a un osservatore qualunque è uguale al momento della quantità di moto dello stesso sistema materiale rispetto al sistema baricentrale sommato con il momento della quantità di moto del baricentro pensato come se fosse un punto materiale al quale viene associata la massa dell'intero sistema*

DIMOSTRAZIONE

Per definizione di momento della quantità di moto di un sistema particellare, calcolato rispetto a un polo Ω abbiamo:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega} = \sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge m_s \boldsymbol{v}_s$$

$$\boldsymbol{K}_{\Omega}^{(G)} = \sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge m_s \boldsymbol{v'}_s$$

Introducendo il legame fra le velocità del generico punto P_s rispetto ai due osservatori (CM.22) otteniamo:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega} = \sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge m_s(\boldsymbol{v'}_s + \boldsymbol{v}_G) = \sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge m_s \boldsymbol{v'}_s + \sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge m_s \boldsymbol{v}_G$$

ma:

$$\sum_{s=1}^{n} \Omega P_s \wedge m_s \boldsymbol{v}_G = m\, \Omega G \wedge \boldsymbol{v}_G$$

grazie alla definizione di baricentro. Da cui segue l'enunciato; in formula il secondo teorema di König viene dunque espresso dalla relazione:

$$\boxed{\boldsymbol{K}_\Omega = \boldsymbol{K}_\Omega^{(G)} + \Omega G \wedge m\boldsymbol{v}_G} \tag{CM.24}$$

Notiamo che se il polo coincide con il baricentro i due momenti della quantità di moto si uguagliano.

• I vantaggi pratici di questi due teoremi di König risiedono nel fatto che generalmente risulta più semplice il calcolo dell'energia cinetica e del momento della quantità di moto rispetto al sistema baricentrale, che rispetto a un sistema qualunque.

Corpo rigido

Vediamo ora l'applicazione dei teoremi che abbiamo dimostrato al calcolo delle grandezze che caratterizzano la cinematica delle masse nel caso del corpo rigido.

quantità di moto

Cominciamo con l'osservare che, per quanto riguarda la quantità di moto, grazie al teorema del moto del baricentro essa può essere valutata, per qualunque sistema meccanico, anche non rigido, con la sola conoscenza del moto del baricentro del sistema e vale semplicemente:

$$\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_G$$

energia cinetica

Per quanto riguarda l'energia cinetica esaminiamo i vari casi notevoli che possono presentarsi:

— *corpo rigido libero*

Grazie al primo teorema di König il calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido libero si riconduce al calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido con un punto fisso, in quanto rispetto al sistema baricentrale il baricentro G del corpo risulta essere un punto fisso del moto coincidente con l'origine degli assi.

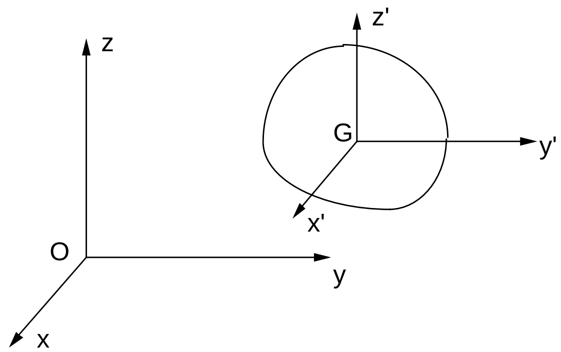

Figura CM. 2: il baricentro è un punto fisso rispetto al sistema baricentrale

— *corpo rigido con un punto fisso*

Il calcolo dell'energia cinetica di un corpo rigido con un punto fisso Ω può essere effettuato partendo dalla definizione di energia cinetica di un sistema e dalla legge di distribuzione delle velocità che lega fra loro le velocità dei punti di un corpo rigido.

Adottando, per esempio lo schema continuo, dal momento che un corpo rigido generalmente è un continuo, avremo:

$$T = \frac{1}{2} \int_C \mu \, \boldsymbol{v}^2 \, dC$$

dove la velocità del generico punto del corpo è:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P = \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P$$

essendo:

$$\boldsymbol{v}_\Omega = \mathbf{o}$$

dal momento che Ω è un punto fisso. Ora calcoliamo il quadrato della velocità del generico punto del corpo rigido con un punto fisso; abbiamo:

$$\boldsymbol{v}^2 = (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P) \times (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P) = (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P) \wedge \boldsymbol{\omega} \times \Omega P =$$

$$= \boldsymbol{\omega}^2 (\Omega P)^2 - (\boldsymbol{\omega} \times \Omega P)^2 = \boldsymbol{\omega} \times [(\Omega P)^2 \underset{\sim}{I} - \Omega P \otimes \Omega P] \boldsymbol{\omega}$$

Introducendo questo risultato nell'espressione dell'energia cinetica, e tenendo conto che $\boldsymbol{\omega}$ non dipende dal punto del corpo per cui si può portare fuori dal segno di integrale, otteniamo:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \left\{ \int_{\mathcal{C}} \mu \, [(\Omega P)^2 \underset{\sim}{I} - \Omega P \otimes \Omega P] \, dC \right\} \boldsymbol{\omega}$$

Ma sappiamo che:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \int_{\mathcal{C}} \mu \, [(\Omega P)^2 \underset{\sim}{I} - \Omega P \otimes \Omega P] \, dC$$

è la matrice d'inerzia riferita al centro Ω, di conseguenza l'energia cinetica di un corpo rigido con un punto fisso risulta essere data dalla forma quadratica, definita positiva (se si eccettuano i casi degeneri in cui il corpo appartiene ad una retta):

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \underset{\sim}{\sigma}\ \boldsymbol{\omega}} \tag{CM.25}$$

Osserviamo che se si rappresenta la matrice d'inerzia su di un sistema di assi solidali che siano assi principali d'inerzia, la matrice risulta diagonale e l'espressione dell'energia cinetica si semplifica notevolmente. Denotando le componenti del vettore velocità angolare rispetto agli assi solidali con:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv (p, q, r)$$

come di consueto, otteniamo infatti:

$$T = \frac{1}{2}(p, q, r)\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) \tag{CM.26}$$

— *corpo rigido con un asse fisso*

La formula dell'energia cinetica di un corpo rigido con un punto fisso si può riscrivere in un altro modo introducendo il versore $\boldsymbol{u}$ della velocità angolare, per cui risulta:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{u}$$

e sostituendo:

$$T = \frac{1}{2}\omega\boldsymbol{u} \times \underset{\sim}{\sigma}\ \omega\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\mathcal{J}\omega^2$$

dove:

$$\mathcal{J} = \boldsymbol{u} \times \underset{\sim}{\sigma}\, \boldsymbol{u}$$

rappresenta il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto alla retta passante per il punto fisso Ω avente, nell'istante considerato, la direzione della velocità angolare.

Nel caso in cui il corpo rigido ruoti attorno ad un *asse fisso* ci troviamo in un caso particolare in cui non solo un punto, ma un'intera retta del corpo è bloccata. Allora evidentemente la velocità angolare è un vettore avente la stessa direzione dell'asse fisso e si può esprimere, in termini della derivata temporale dell'angolo ϑ che rappresenta l'unico grado di libertà del corpo:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\, \boldsymbol{u} \tag{CM.27}$$

Per cui l'energia cinetica di un corpo rigido con un asse fisso si può esprimere come:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\mathcal{J}\dot{\vartheta}^2} \tag{CM.28}$$

dove $\mathcal{J}$ rappresenta ora il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse fisso.

— *moto rigido piano*

Nel caso del moto rigido piano sappiamo che l'atto di moto può essere o traslatorio o rotatorio: se l'atto di moto è traslatorio e tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità $\boldsymbol{v}$, che è quindi indipendente dal punto P, del corpo, considerato, è immediato, in base alla definizione di energia cinetica, ottenere:

$$T = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} \mu\, \boldsymbol{v}^2\, dC = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \int_{\mathcal{C}} \mu\ dC = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_G^2$$

energia che coincide con l'energia cinetica associata al moto del baricentro, che si muove anch'esso con la velocità di traslazione del corpo $\boldsymbol{v}$.

Se l'atto di moto è rotatorio, invece, il centro di istantanea rotazione è un punto del corpo rigido che nell'istante considerato ha velocità nulla; perciò la velocità del generico punto del corpo rigido si può esprimere come:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge CP$$

e la velocità angolare è ortogonale al piano del moto: il suo versore $\boldsymbol{u}$ perciò è sempre lo stesso, e di conseguenza il calcolo dell'energia cinetica risulta identico a quello che si ha per un corpo rigido con un asse fisso. In questo caso però il momento d'inerzia risulta calcolato rispetto ad un asse normale al piano del moto e passante per il centro di istantanea rotazione C. Abbiamo perciò:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\mathcal{J}_C\,\omega^2} \tag{CM.29}$$

dove $\mathcal{J}_C$ rappresenta il momento d'inerzia rispetto all'asse di istantanea rotazione, il quale passa per C.

Dal punto di vista operativo, però, non è sempre facile o comodo individuare il centro di istantanea rotazione e calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse di istantanea rotazione, momento che può essere anche variabile nel tempo; per cui si può sempre fare ricorso al primo teorema di König, che risulta comunque valido. In questo caso possiamo scrivere:

$$T = \frac{1}{2}\,\mathcal{J}_G\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,m\boldsymbol{v}_G^2$$

essendo, $\mathcal{J}_G$ il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto ad un asse passante per il baricentro e ortogonale al piano del moto.

Osserviamo che il modulo della velocità del baricentro si può esprimere come:

$$|\boldsymbol{v}_G| = |\boldsymbol{\omega} \wedge CG| = \omega d$$

dove si è indicato:

$$d = |CG|$$

e si è tenuto conto che il vettore velocità angolare è ortogonale al piano del moto e perciò anche al vettore CG. Allora possiamo riscrivere:

$$T = \frac{1}{2}\,\mathcal{J}_G\,\omega^2 + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 d^2 = \frac{1}{2}\,(\mathcal{J}_G + md^2)\,\omega^2$$

Evidentemente questo risultato deve essere compatibile con la (CM.29); infatti il confronto ci dà:

$$\mathcal{J}_C = \mathcal{J}_G + md^2$$

in accordo con il teorema di Huygens-Steiner.

momento della quantità di moto

Passiamo ora al calcolo del momento della quantità di moto per un corpo rigido, nei vari casi:

— *corpo rigido libero*

Analogamente a come si è proceduto per il calcolo dell'energia cinetica, anche il calcolo del momento della quantità di moto di un corpo rigido libero si riconduce al caso del corpo rigido con un punto fisso, che in questo caso è il baricentro. Infatti grazie al secondo teorema di König ci si riconduce al moto del corpo nel sistema baricentrale, nel quale esso risulta muoversi con il baricentro fisso nell'origine; per cui:

$$\boldsymbol{K}_\Omega = \boldsymbol{K}_\Omega^{(G)} + \Omega G \wedge m\boldsymbol{v}_G$$

— *corpo rigido con un punto fisso*

Ricordiamo la definizione di momento della quantità di moto di un corpo continuo, rispetto ad un polo Ω (CM.11):

$$\boldsymbol{K}_\Omega = \int_\mathcal{C} \mu\, \Omega P \wedge \mu\, \boldsymbol{v}\, dC$$

e l'espressione della velocità di un punto generico P di un corpo rigido con un punto fisso coincidente con il quale scegliamo il polo Ω:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P$$

Sostituendo nell'espressione del momento della quantità di moto otteniamo:

$$\boldsymbol{K}_\Omega = \int_\mathcal{C} \Omega P \wedge \mu\, (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P)\, dC \tag{CM.30}$$

Calcoliamo separatamente:

$$\Omega P \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P) = (\Omega P)^2\, \boldsymbol{\omega} - (\Omega P \times \boldsymbol{\omega})\, \boldsymbol{\omega} = [(\Omega P)^2\, \underset{\sim}{I} - \Omega P \otimes \Omega P]\, \boldsymbol{\omega}$$

Questo risultato, introdotto nella (CM.30), comporta:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega} = \left\{ \int_{C} \mu \left[(\Omega P)^2 \underset{\sim}{I} - \Omega P \otimes \Omega P \right] dC \right\} \boldsymbol{\omega}$$

Riconosciamo nell'integrale fra parentesi graffe la matrice d'inerzia del corpo rigido calcolata rispetto al centro Ω, e quindi possiamo scrivere l'espressione finale del momento della quantità di moto di un corpo rigido con un punto fisso preso come polo:

$$\boxed{\boldsymbol{K}_{\Omega} = \underset{\sim}{\sigma}\, \boldsymbol{\omega}} \tag{CM.31}$$

Osserviamo che il confronto fra questo risultato e la corrispondente espressione dell'energia cinetica (CM.25), comporta il legame seguente fra l'energia cinetica e il momento della quantità di moto per un corpo rigido con un punto fisso:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_{\Omega}} \tag{CM.32}$$

Se proiettiamo la (CM.31) su un sistema di assi solidali con il corpo rigido che siano anche *assi principali d'inerzia* otteniamo un'espressione semplificata grazie al fatto che la matrice $\underset{\sim}{\sigma}$ risulta essere diagonale. Abbiamo allora:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega} \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

E dunque:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega} = A\, p\, \boldsymbol{e}_1 + B\, q\, \boldsymbol{e}_2 + C\, r\, \boldsymbol{e}_3 \tag{CM.33}$$

— *corpo rigido con un asse fisso*

Un corpo rigido con un asse fisso costituisce un caso particolare di corpo rigido con un punto fisso, in quanto oltre ad un punto fisso vi è un'intera retta fissa. Allora possiamo specializzare l'equazione (CM.31) al caso del moto con un asse fisso. Per comodità conviene scegliere un sistema di assi solidali in modo che, ad esempio l'asse $\xi_3 \equiv \zeta$ coincida con l'asse fisso del moto.

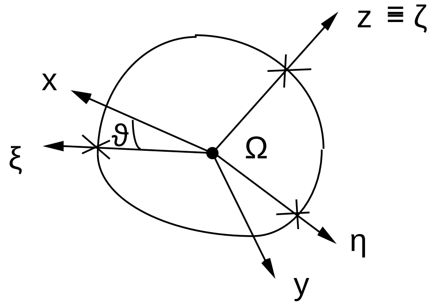

Figura CM. 3: sistema solidale in cui l'asse $\xi_3 \equiv \zeta$ coincide con l'asse fisso

In questo modo la velocità angolare di rotazione del corpo attorno all'asse fisso si può scrivere:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv (0, 0, \dot{\vartheta})$$

Teniamo conto che l'asse fisso è assegnato dal problema e non lo possiamo scegliere noi ad arbitrio, per cui, in generale, dobbiamo prevedere che esso non sarà un asse principale d'inerzia. Di conseguenza dovremo eseguire il calcolo scrivendo la matrice d'inerzia nella sua espressione più generale. Abbiamo:

$$\boldsymbol{K}_\Omega \equiv \begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -B'\dot{\vartheta} \\ -A'\dot{\vartheta} \\ C\dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

Dunque in generale per un corpo rigido con un asse fisso il momento della quantità di moto risulta espresso da:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega} \equiv (-B'\dot{\vartheta}, -A'\dot{\vartheta}, C\dot{\vartheta}) \tag{CM.34}$$

Denotando con il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse fisso C semplicemente con $\mathcal{J}$, come abbiamo fatto per il calcolo dell'energia cinetica, possiamo esprimere il momento assiale della quantità di moto rispetto all'asse fisso come:

$$K_{\xi_3} = K_{\zeta} = \boldsymbol{K}_{\Omega} \times \boldsymbol{e}_3 = C\,\dot{\vartheta} = \mathcal{J}\dot{\vartheta}$$

Segue allora nella (CM.32) che per un corpo rigido con un asse fisso sussiste il seguente legame fra l'energia cinetica e il momento assiale della quantità di moto:

$$T = \frac{1}{2}\,K_{\zeta}\dot{\vartheta} \tag{CM.35}$$

Qualora poi l'asse fisso risulti essere asse principale d'inerzia il momento della quantità di moto risulta essere parallelo all'asse fisso, in quanto, per definizione di asse principale d'inerzia, il versore dell'asse fisso è autovettore della matrice d'inerzia. Allora si ha semplicemente:

$$\boldsymbol{K}_{\Omega} = \mathcal{J}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_3 \tag{CM.36}$$

— *moto rigido piano*

Nel caso del moto rigido piano, come abbiamo visto per il calcolo dell'energia, il versore della velocità angolare è costante e perciò i calcoli sono gli stessi che si hanno per il moto con un asse fisso, solamente che in questo caso l'asse non è fisso, ma è la retta passante per il centro di istantanea rotazione, ortogonale al piano del moto. Notiamo poi che, quando il corpo rigido è una figura piana che si muove nel suo piano, allora tutte le rette normali al piano della figura sono assi principali d'inerzia e quindi l'asse di istantanea rotazione risulta essere un asse principale d'inerzia.

Sistema olonomo

In un sistema olonomo risulta di particolare interesse, ai fini pratici, la struttura che assume l'espressione dell'energia cinetica, perciò ci limitiamo solamente al calcolo di questa. Partiamo dalla definizione di energia cinetica (nel caso di un sistema particellare):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} m_s \boldsymbol{v}_s^2$$

Ricordiamo che per un sistema olonomo abbiamo:

$$OP_s = OP_s(q_1, q_2, \cdots, q_N, t)$$

da cui derivando rispetto al tempo otteniamo per la velocità:

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

con la convenzione di Einstein di sottintendere la somma da 1 fino ad N sugli indici h ripetuti. Sostituendo nell'espressione dell'energia cinetica abbiamo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} m_s \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\partial t} \right) \times \left(\frac{\partial P_s}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_s}{\partial t} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial P_s}{\partial q_h}\dot{q}_h \times \frac{\partial P_s}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\dot{q}_h \times \frac{\partial P_s}{\partial t} + \frac{\partial P_s}{\partial t} \times \frac{\partial P_s}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial P_s}{\partial t} \times \frac{\partial P_s}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_s}{\partial q_k}\dot{q}_h\dot{q}_k + \sum_{s=1}^{n} m_s \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_s}{\partial t}\dot{q}_h + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s \left(\frac{\partial P_s}{\partial t}\right)^2$$

E' conveniente introdurre ora le seguenti quantità:

$$a_{hk} = \sum_{s=1}^{n} m_s \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_s}{\partial q_k} \tag{CM.37}$$

$$b_h = \sum_{s=1}^{n} m_s \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \times \frac{\partial P_s}{\partial t} \tag{CM.38}$$

$$d = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s \left(\frac{\partial P_s}{\partial t}\right)^2 \tag{CM.39}$$

Ne consegue che l'espressione dell'energia cinetica per un sistema olonomo a N gradi di libertà, assume la forma generale, abbastanza semplice:

$$T = \frac{1}{2}\, a_{hk}\, \dot{q}_h\, \dot{q}_k + b_h\, \dot{q}_h + d \tag{CM.40}$$

Osserviamo che, in generale, dal momento che le funzioni OP_s dipendono dai parametri lagrangiani e dal tempo, date le loro definizioni, anche le funzioni a_{hk}, b_h, d risultano dipendere dai parametri lagrangiani e dal tempo, e non dalle $\dot{q}_h$. Perciò l'energia cinetica di un sistema olonomo risulta essere espressa da un polinomio di secondo grado nelle $\dot{q}_h$.

Per non avere a che fare con gli indici possiamo introdurre la notazione vettoriale, nello spazio delle configurazioni, per i parametri lagrangiani e le loro derivate temporali:

$$\boldsymbol{q} \equiv (q_1, q_2, \cdots, q_N) \equiv (q_h) \tag{CM.41}$$

da cui segue:

$$\dot{\boldsymbol{q}} \equiv (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N) \equiv (\dot{q}_h) \tag{CM.42}$$

Allora i coefficienti che compaiono nell'espressione dell'energia cinetica si interpretano come una matrice, definita da:

$$\underset{\sim}{a} \equiv \| a_{hk} \| \tag{CM.43}$$

che prende il nome di *matrice dell'energia cinetica;* un *vettore:*

$$\boldsymbol{b} \equiv (b_h) \tag{CM.44}$$

e uno *scalare* d. Queste quantità sono in generale funzioni di $\boldsymbol{q}$ e di t:

$$\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}(\boldsymbol{q}, t), \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q}, t), \qquad d = d(\boldsymbol{q}, t)$$

Allora la relazione (CM.40) si scrive in forma simbolica:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{q}} \times \underset{\sim}{a}(\boldsymbol{q},t)\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q},t) \times \dot{\boldsymbol{q}} + d(\boldsymbol{q},t)} \tag{CM.45}$$

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo (*scleronomi*), data la loro definizione, le quantità $\boldsymbol{b}$ e d sono nulle e la matrice $\underset{\sim}{a}$ non dipende esplicitamente dal tempo. Abbiamo allora semplicemente:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{q}} \times \underset{\sim}{a}\,(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}} \tag{CM.46}$$

Concludiamo evidenziando le proprietà della matrice dell'energia cinetica. Essa gode di due proprietà:

— è una matrice *simmetrica* come si vede immediatamente dalla definizione (CM.37) dei suoi elementi di matrice, che non vengono alterati dallo scambio degli indici;

— è *definita positiva* come si vede dal fatto che l'energia cinetica è un numero sempre positivo e si annulla se e solo se si annullano le $\dot{\boldsymbol{q}}$. Questa seconda proprietà risulta evidente se si considera un sistema a vincoli indipendenti dal tempo, ma lo è anche per un sistema a vincoli *reonomi,* in quanto si può sempre pensare alla quantità:

$$\hat{T} = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{q}} \times \underset{\sim}{a}\,(\boldsymbol{q},t)\dot{\boldsymbol{q}}$$

come all'energia cinetica di un sistema uguale a quello assegnato, ma con i vincoli bloccati nella configurazione che assumono nell'istante t. Dunque la forma quadratica $\hat{T}$ risulta pure positiva e la matrice $\underset{\sim}{a}$ è quindi definita positiva.

Quando si fanno particolari idealizzazioni matematiche di un sistema meccanico possono presentarsi casi degeneri in cui la matrice sia semidefinita positiva: questo accade quando si suppone che almeno un grado di libertà del sistema sia associato ad una parte del sistema meccanico che viene supposta priva di massa; in questo caso l'energia cinetica associata a questa parte del sistema è nulla e la forma quadratica dell'energia cinetica può annullarsi anche se non si annullano tutte le $\dot{\boldsymbol{q}}$.