Geometria delle masse

BA. Baricentri

Per la trattazione riguardante i baricentri non ci è più sufficiente considerare i corpi come insiemi di punti geometrici, ma abbiamo bisogno di introdurre una nuova informazione che riguarda la distribuzione della materia nei corpi stessi. Questa informazione viene dal concetto di *massa* che ora introdurremo. Considereremo perciò dei punti ai quali viene associata una *massa.*

Un punto al quale viene associata una *massa* prende il nome di *punto materiale* e lo indicheremo con: (P, m).

Un sistema di punti a ciascuno dei quali è associata una massa si dice *sistema di punti materiali.*

• E' importante rilevare che il capitolo riguardante i baricentri si può sviluppare indipendentemente dalla statica e dalla dinamica dei sistemi: esso richiede oltre, alla conoscenza della *geometria* dei corpi in senso stretto, solo una conoscenza che riguarda la distribuzione della massa. Non sono necessarie nè conoscenze riguardanti il moto del sistema, nè conoscenze riguardanti le forze agenti su di esso. Parlando dei baricentri e dei momenti di inerzia, che vedremo nel prossimo capitolo, si parla perciò di *geometria delle masse.*

Massa

Quanto basta a noi del concetto di massa, in questo capitolo e in quello successivo, sono le proprietà indipendenti dal moto dei corpi.

Chiamiamo *massa* e la denotiamo con la lettera m uno *scalare* che gode delle seguenti proprietà:

— è sempre *positivo* (nullo nel caso di un punto geometrico o di un sistema di punti geometrici);

— è indipendente dallo stato cinetico (cioè dal moto del punto o del sistema);

— è *invariante* rispetto a qualsiasi gruppo di trasformazioni del sistema di coordinate;

— è *additivo:* la massa totale di un sistema di n punti materiali è la somma delle masse dei punti che lo costituiscono:

$$m = \sum_{s=1}^{n} m_s$$

Questo comporta anche che se un corpo è suddivisibile in parti la massa totale del corpo è uguale alla somma delle masse delle sue parti.

Densità

Se il corpo è continuo si suppone di poter introdurre sempre la funzione *densità* di massa. In un continuo consideriamo degli elementi sufficientemente *piccoli* di volume ΔV (se il continuo è un corpo tridimensionale), o di superficie ΔA (se il continuo è bidimensionale) o di linea Δs (se il continuo è distribuito lungo una curva), attorno ad ogni suo punto P. Denotiamo con ΔC l'elemento generico del continuo, intendendo che si potrà trattare di un elemento di volume, di superficie o di linea, a seconda dei casi. A ciascun elemento del continuo ΔC, centrato in un punto P pensiamo di associare un elemento di massa Δm.

Allora si suppone che esista il:

$$\lim_{\Delta C \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta C}$$

e che sia una *funzione* delle coordinate del punto P attorno al quale è centrato l'elemento del continuo ΔC.

Questa funzione prende il nome di *densità* e la si denota con:

$$\mu = \mu(P) = \lim_{\Delta C \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta C} = \frac{dm}{dC} \tag{BA.1}$$

e si tratterà di una *densità di volume* se il corpo è tridimensionale, di una *densità di superficie o superficiale* se la materia del corpo è distribuita su di una superficie, di una *densità lineare* se è distribuito lungo una curva.

Di conseguenza l'elemento di massa associato a ciascun elemento di volume del corpo continuo si può scrivere come:

$$dm = \mu(P)\, dC \tag{BA.2}$$

Per la proprietà additiva della massa possiamo allora scrivere la massa totale del corpo sotto forma di integrale:

$$m = \int_{\mathcal{C}} \mu(P) dC \tag{BA.3}$$

avendo indicato con $\mathcal{C}$ il dominio di integrazione.

Un corpo si dice poi *omogeneo* quando la funzione μ è *costante* , cioè non varia al variare del punto P. In questo caso la funzione μ si può portare fuori del segno di integrale e si ottiene:

$$m = \int_{\mathcal{C}} \mu dC = \mu \int_{\mathcal{C}} dC = \mu C$$

dove:

$$C = \int_{\mathcal{C}} dC \tag{BA.4}$$

rappresenta la *misura* (rispettivamente volume, area, o lunghezza a seconda dei casi) del dominio di integrazione, cioè del corpo in questione. Allora, per un corpo omogeneo la densità è il rapporto fra la massa totale del corpo e la misura del dominio che caratterizza il corpo:

$$\mu = \frac{m}{C} \tag{BA.5}$$

Baricentro

Supponiamo di avere un sistema di punti materiali che, per semplicità, pensiamo particellare (l'estensione al continuo è poi una conseguenza ovvia) costituito da n punti materiali:

$$\{(P_s, m_s), s = 1, 2, \cdots, n\}$$

Scelto poi un versore $\boldsymbol{u}$ qualunque, e uno scalare *positivo* k associamo a ciascun punto materiale un vettore applicato, parallelo ad $\boldsymbol{u}$ tale che:

$$v_s = m_s k \tag{BA.6}$$

Otteniamo in questo modo un sistema di vettori *paralleli* e *concordi* con $\boldsymbol{u}$.

Possiamo allora introdurre anche la componente del risultante in direzione di $\boldsymbol{u}$, uguale al suo modulo, come:

$$R = \sum_{s=1}^{n} v_s = \sum_{s=1}^{n} m_s k = mk \tag{BA.7}$$

essendo m la massa totale del sistema. Avendo supposto k positivo e quindi non nullo (e supponendo che le masse dei punti non siano tutte nulle) ne consegue che $R \neq 0$ e quindi esiste il *centro* del sistema di vettori applicati paralleli che abbiamo introdotto. Tale centro dei vettori paralleli è per definizione il *baricentro* del nostro sistema di masse e lo denotiamo con G.

Si dice baricentro di un sistema di punti materiali il centro di qualunque sistema di vettori paralleli concordi proporzionali alle masse e applicati nei punti del sistema

Applicando la formula del centro dei vettori paralleli (VA.46) e introducendovi le informazioni (BA.6) e (BA.7) otteniamo:

$$OG = \frac{1}{mk} \sum_{s=1}^{n} m_s k OP_s$$

dalla quale semplificando k abbiamo la formula che definisce il baricentro:

$$\boxed{OG = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{n} m_s OP_s} \qquad \text{(BA.8)}$$

Scelto un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ possiamo proiettare la (BA.8) ottenendo le formule per le coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{n} m_s x_s, \qquad y_G = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{n} m_s y_s, \qquad z_G = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{n} m_s z_s \qquad \text{(BA.9)}$$

avendo indicato con:

$$OG \equiv (x_G, y_G, z_G), \qquad OP_s \equiv (x_s, y_s, z_s)$$

le coordinate del baricentro e rispettivamente dei punti del sistema.

L'estensione al caso del continuo è conseguente alle definizioni date. Abbiamo:

$$OG = \frac{1}{m}\int_C OPdm \tag{BA.10}$$

e tenendo conto della (BA.2):

$$\boxed{OG = \frac{1}{m}\int_C \mu OPdC} \tag{BA.11}$$

Proiettando sugli assi le coordinate del baricentro, nel caso del corpo continuo, sono date da:

$$x_G = \frac{1}{m}\int_C \mu x dC, \qquad y_G = \frac{1}{m}\int_C \mu y dC, \qquad z_G = \frac{1}{m}\int_C \mu z dC \tag{BA.12}$$

Se il corpo continuo è poi *omogeneo,* possiamo portare la densità, costante, fuori dal segno di integrale e utilizzare la relazione (BA.5) e ricondurci a formule puramente geometriche, in quanto non contengono più la massa. Abbiamo:

$$OG = \frac{1}{C}\int_C OPdC \tag{BA.13}$$

E per le coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{1}{C}\int_C x dC, \qquad y_G = \frac{1}{C}\int_C y dC, \qquad z_G = \frac{1}{C}\int_C z dC \qquad \text{(BA.14)}$$

Osserviamo come tutte le formule che definiscono il baricentro *non dipendono* mai dalla scelta della costante k di proporzionalità che si elide. Il baricentro ha tutte le proprietà del centro dei vettori paralleli e in particolare dei vettori paralleli concordi.

Proprietà di ubicazione del baricentro

E' possibile dare alcune proprietà, che prendono il nome di *proprietà di ubicazione del baricentro* che servono a localizzare almeno parzialmente il baricentro, senza dover ricorrere al calcolo diretto di tutte le sue coordinate, ma basandosi su informazioni geometriche relative alla forma del corpo e al modo come è distribuita la massa. Queste proprietà divengono particolarmente utili quando il corpo è continuo, perchè, in questo caso, servono a ridurre il numero degli integrali che vanno calcolati per identificare le coordinate del baricentro. Nel caso più generale, infatti, si dovrebbero calcolare quattro integrali: uno per valutare la massa totale del sistema, nota la densità, e tre per le coordinate del baricentro.

Le enunciamo e le dimostriamo:

— *se un sistema di punti materiali appartiene ad un piano anche il baricentro appartiene al piano del sistema.*

Scelto il sistema cartesiano in modo che il piano coordinato xy coincida con il piano del sistema materiale, le coordinate di ogni punto dovranno soddisfare l'equazione del piano:

$$z = 0$$

Perciò si ha:

$$z_s = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, n$$

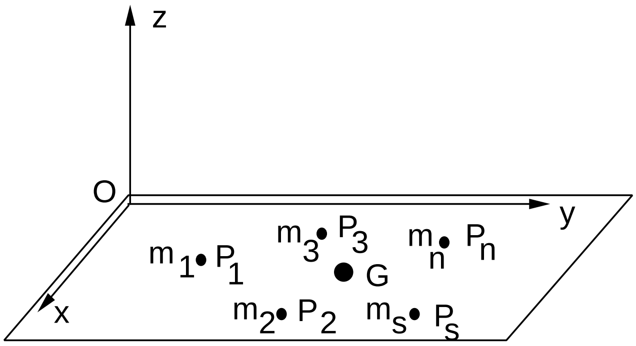

Figura BA.1: il baricentro di un sistema piano appartiene al piano

Di conseguenza nella terza delle (BA.9) segue:

$$z_G = 0$$

Dunque anche il baricentro appartiene al piano. Analogamente nel caso del corpo continuo.

— *se un sistema di punti materiali è non esterno ad una superficie convessa (o se il sistema sta su un piano è non esterno ad una curva convessa) allora il baricentro si trova non esterno alla superficie (o rispettivamente alla curva) convessa.*

In forza della definizione di baricentro che abbiamo dato, questa proprietà è una conseguenza delle proprietà del centro dei vettori paralleli concordi, ed è già stata dimostrata nel capitolo riguardante i vettori applicati.

— *se un sistema di punti materiali appartiene ad un segmento di retta, allora il baricentro si trova non esterno al segmento.*

Per dimostrare questa proprietà utilizziamo la prima proprietà: il segmento si trova infatti sulla retta di intersezione di (almeno) due piani ai quali il sistema viene di conseguenza ad appartenere. Allora il baricentro si dovrà trovare, per la prima proprietà su ciascuno dei due piani, quindi sulla loro retta di intersezione che è la retta del segmento. Questo ci permette di concludere che il baricentro si trova sulla retta del segmento al quale appartiene il sistema di punti materiali.

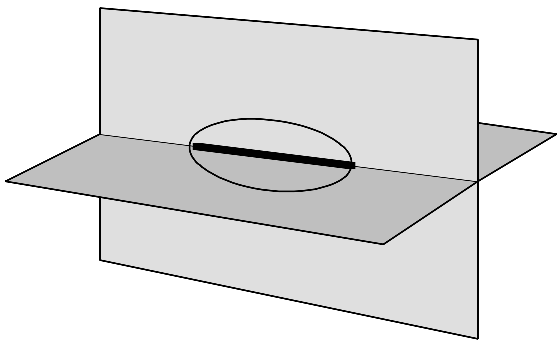

Figura BA.2: se un sistema appartiene a un segmento anche il baricentro sta sul segmento

Ora un segmento si può racchiudere all'interno di una curva convessa che passa per i suoi estremi: allora il baricentro si deve trovare non esterno alla curva convessa. In conclusione il baricentro starà nell'insieme intersezione fra la retta e l'insieme del quale la curva convessa è frontiera: dunque si troverà non esterno al segmento (estremi inclusi: evidentemente il baricentro si potrà trovare su un estremo del segmento solamente quando tutta la massa del segmento è concentrata in quell'estremo).

— *proprietà distributiva del baricentro:* se un sistema di massa M è suddivisibile in due sottosistemi di masse rispettive: M_1 e M_2 e di baricentri G_1 e G_2 allora il baricentro del sistema complessivo è il baricentro dei baricentri dei due sottosistemi, cioè:

$$OG = \frac{M_1 OG_1 + M_2 OG_2}{M_1 + M_2}$$

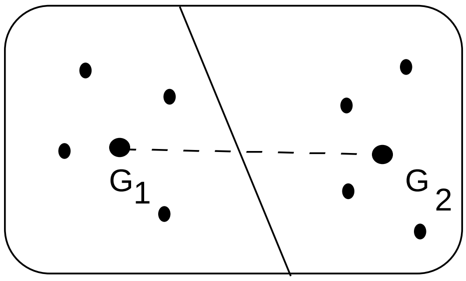

Figura BA.3: proprietà distributiva del baricentro

Tabuliamo, per comodità, con $s = 1, 2, \cdots, p$ i punti del primo sottosistema, e con: $s = p+1, p+2, \cdots, n$ i punti del secondo sottosistema. Allora per la definizione di baricentro (BA.8) i baricentri dei sue sottosistemi si possono identificare come:

$$OG_1 = \frac{1}{M_1}\sum_{s=1}^{p} m_s OP_s, \qquad OG_2 = \frac{1}{M_1}\sum_{s=p+1}^{n} m_s OP_s$$

Da questo otteniamo che:

$$\frac{M_1 OG_1 + M_2 OG_2}{M_1 + M_2} = \frac{1}{M}\left(\sum_{s=1}^{p} m_s OP_s + \sum_{s=p+1}^{n} m_s OP_s\right) = \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{n} m_s OP_s$$

E quindi per la definizione di G, l'enunciato. Suddividendo in più di due parti il sistema di partenza, è possibile iterare il procedimento appena illustrato e concludere che: *se un sistema è suddivisibile in più sottosistemi,* *allora il baricentro del sistema complessivo si ottiene calcolando il baricentro dei baricentri delle singole parti.*

— *se un sistema ammette un piano diametrale allora il baricentro appartiene al piano diametrale.*

Per *piano diametrale,* coniugato ad una retta r, si intende un piano che suddivide il sistema in coppie di punti, ciascuna delle quali è costituita da punti di uguale massa, che si trovano agli estremi di un segmento parallelo alla retta r, il cui punto medio appartiene al piano. In particolare se il piano diametrale è coniugato con una retta ad esso ortogonale esso si dice *piano di simmetria di massa* per il sistema.

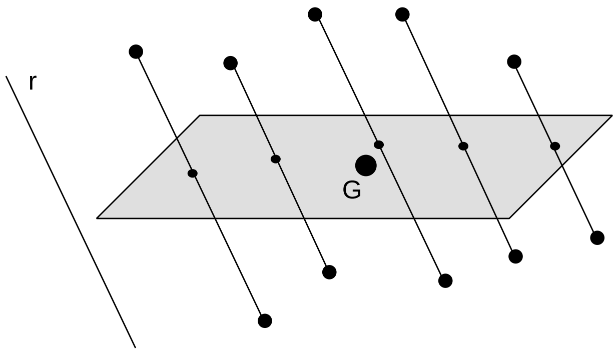

Figura BA.4: piano diametrale

La dimostrazione di questa proprietà di ubicazione del baricentro si fonda sulle proprietà precedenti: ciascuna coppia di punti costituisce un sottosistema che appartiene ad un segmento, quindi il baricentro si trova sul segmento; in particolare le masse dei due punti sono uguali, quindi il baricentro si trova nel punto medio di ciascun segmento. Ora tutti i baricentri di ciascun sottosistema di coppie di punti di ugual massa vengono a trovarsi sul piano diametrale: di conseguenza, per la prima proprietà il baricentro dei baricentri si trova sul piano stesso; e per la proprietà distributiva del baricentro, quest'ultimo è il baricentro dell'intero sistema.

Come esempi possiamo considerare i piani paralleli ai lati di un corpo omogeneo piano a forma di parallelogrammo, normali al piano della figura e passanti per il suo centro.

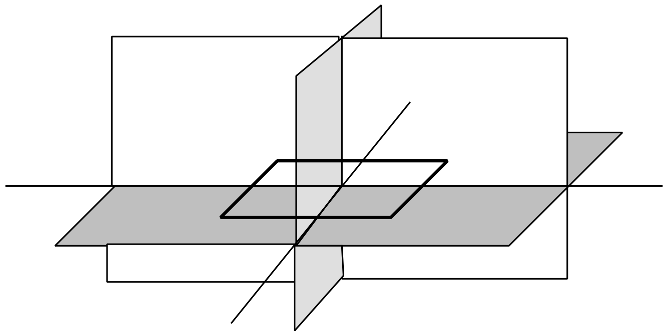

Figura BA.5: piani diametrali in un parallelogrammo omogeneo

In una figura piana, come quella dell'esempio, si può parlare anche di *retta diametrale* intendendo la retta di intersezione fra il piano diametrale e il piano della figura (traccia del piano diametrale sul piano della figura).