CS. Cinematica dei sistemi

Dopo aver esaminato la cinematica del punto e del corpo rigido, che sono gli schemi più semplificati con cui si possa rappresentare un corpo, ci occupiamo ora dei sistemi vincolati. E' necessario a questo scopo introdurre il concetto di *vincolo* e dare una classificazione dei vari tipi di vincolo che si possono incontrare.

Vincoli

• Quando si considera un sistema di punti la conoscenza del moto del sistema equivale, per definizione, alla conoscenza del moto di ogni punto del sistema.

Perciò se si considera, ad esempio, un sistema costituito da n particelle nello spazio, occorrono $3n$ funzioni, date dalle coordinate delle particelle in funzione del tempo, ovvero n funzioni vettoriali:

$$OP_s = OP_s(t), \qquad s = 1, 2, \cdots, n$$

Se si ha un sistema continuo occorrono, in linea di principio, infinite funzioni, 3 coordinate per ogni punto del continuo. Fissato un istante del tempo t, le $3n$ coordinate (nel caso del continuo le infinite coordinate) rappresentano la *configurazione* del sistema nell'istante t. Un sistema di questo tipo in cui tutte le coordinate dei punti sono necessarie per individuarne la *configurazione* si dice *sistema libero*.

In molti casi, però, accade che non è necessario un numero di parametri pari al numero delle coordinate di tutti i punti del sistema per identificarne la configurazione , ma basta un numero di variabili meno elevato. Abbiamo già visto il caso del *corpo rigido* per individuare le coordinate di ognuno dei punti del quale bastano *sei parametri*, caratterizzabili, per esempio con le tre coordinate di un suo punto Ω e con i tre angoli di Eulero; per cui la *configurazione* del corpo rigido è completamente definita quando si conoscono i sei parametri:

$$x_{\Omega 1}, x_{\Omega 2}, x_{\Omega 3}, \vartheta, \varphi, \psi$$

Questa circostanza si verifica perchè vi sono delle *relazioni* fra le coordinate dei punti che ne limitano l'arbitrarietà riducendo il numero di variabili indipendenti che caratterizzano il problema. Tali relazioni prendono il nome di *vincoli*.

Nel caso del corpo rigido la condizione di rigidità (CR.1) o (CR.2) che impone l'invariabilità delle mutue distanze fra i punti del sistema è il vincolo responsabile della riduzione a *sei* del numero delle variabili necessarie per l'identificazione della *configurazione* del sistema.

I vincoli possono essere di varia natura e possono essere identificati e classificati in diversi modi. Vediamo alcune di queste classificazioni che si dimostrano particolarmente utili nella trattazione dei sistemi vincolati.

— Vincoli *esterni* e vincoli *interni*

Questa classificazione nasce dall'esigenza di distinguere fra i vincoli che nascono in forza della mutua interazione fra le particelle di un sistema (come il vincolo di rigidità in un corpo rigido o il vincolo di incomprimibilità in un fluido incomprimibile) e i vincoli che nascono dall'interazione fra il sistema e l'ambiente ad esso esterno. Un esempio familiare di vincolo esterno potrebbe essere costituito dai cardini di una porta, considerando la porta come *il sistema* meccanico che ci interessa e i cardini come quelle strutture dell'ambiente esterno che vincolano la porta a ruotare attorno ad un asse fisso.

Va detto che il concetto di *esterno* ed *interno* non è univoco, nè assoluto, ma è convenzionale: siamo noi che definiamo che cosa fa parte o meno di un sistema. Se decidiamo, per esempio, di definire come *sistema* l'insieme terra-luna, il sole e gli altri pianeti saranno considerati come corpi *esterni* al sistema. Viceversa, se decidiamo di definire come *sistema* l'intero sistema solare, ecco che, ciò che prima consideravamo *esterno*, ora è classificato come *interno*.

— Vincoli *olonomi* e *anolonomi*

Questa è una delle classificazioni più importanti, se non la più importante, perchè fornisce una classificazione analitica del vincolo.

Diremo olonomo un vincolo fra le coordinate dei punti di un sistema, che è caratterizzabile mediante equazioni e disequazioni in termini finiti

Ad esempio, la condizione di appartenenza di un punto P ad una superficie di equazione cartesiana:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{CS.1}$$

rappresenta un vincolo *olonomo* per le coordinate x_1, x_2, x_3 del punto P.

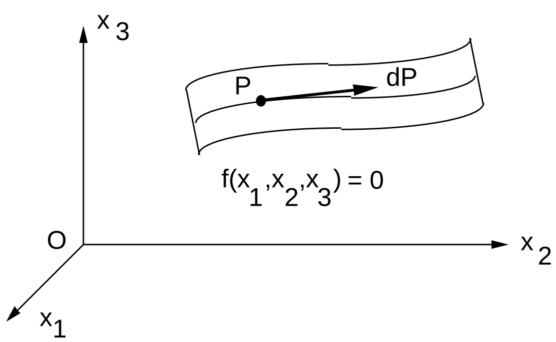

Figura CS. 1: punto vincolato su una superficie

Anche un vincolo esprimibile mediante una disequazione in termini finiti è un vincolo olonomo. Per esempio la condizione:

$$x_1^2 + x_2^2 \geq R^2 \tag{CS.2}$$

per le coordinate di un punto nel piano $x_1 x_2$ vincola il punto a non entrare nella regione di piano rappresentata dal disco circolare di raggio R avente centro nell'origine.

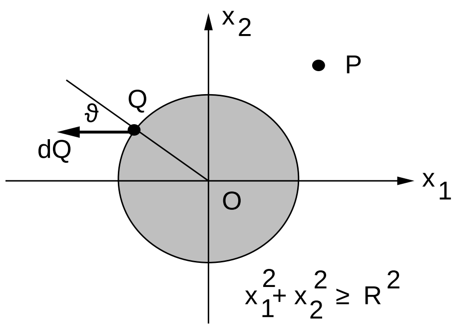

Figura CS. 2: punto vincolato a non penetrare all'interno del disco di raggio R

In base a quanto detto finora si può affermare che i vincoli olonomi rappresentano dei vincoli per le posizioni del punto, come si vede anche dagli esempi esaminati. Possiamo dire che un vincolo olonomo, vincolando le coordinate dei punti del sistema, rappresenta una limitazione per le *configurazioni* permesse al sistema. Non solo: supponendo che le funzioni che caratterizzano i vincoli siano differenziabili, i vincoli per le *posizioni* si traducono anche in vincoli per gli *spostamenti* del sistema.

Nell'esempio del punto vincolato su una superficie, differenziando la condizione del vincolo (CS.1) abbiamo:

$$df \equiv \nabla f \times dP = 0 \tag{CS.3}$$

dove:

$$\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \qquad dP \equiv (dx_i)$$

Poichè ∇f è diretto lungo la normale alla superficie, ne consegue che gli spostamenti infinitesimi dP, compatibili con il vincolo sono vettori tangenti alla superficie nel punto P.

Nel secondo esempio, in cui il vincolo è rappresentato da una disuguaglianza, non nasce nessuna limitazione per gli spostamenti se è verificata la disuguaglianza stretta, dal momento che gli spostamenti sono infinitesimi e la disuguaglianza stretta continuerà ad essere verificata anche dopo aver incrementato di un infinitesimo le coordinate del punto; mentre nascono dei vincoli per gli spostamenti quando si parte da un punto di frontiera (*posizione di confine*), posizione nella quale il vincolo è verificato come uguaglianza:

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2 \tag{CS.4}$$

Infatti affinchè lo spostamento sia compatibile con i vincoli occorre che la condizione che vincola le posizioni sia soddisfatta anche dopo aver incrementato le coordinate del punto, a meno di infinitesimi di ordine superiore a quello dell'incremento, cioè al primo. Allora le coordinate incrementate devono soddisfare la condizione di vincolo per le posizioni:

$$(x_1 + dx_1)^2 + (x_2 + dx_2)^2 \geq R^2$$

Sviluppando abbiamo:

$$x_1^2 + (dx_1)^2 + 2x_1 dx_1 + x_2^2 + (dx_2)^2 + 2x_2 dx_2 \geq R^2$$

Tenendo conto che prima dell'incremento il vincolo sussiste nella forma dell'uguaglianza (CS.4) e che i termini che contengono i quadrati dei differenziali sono del secondo ordine, e come tali sono trascurabili in quanto infinitesimi di ordine superiore al primo, segue la condizione per gli spostamenti:

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 \geq 0 \tag{CS.5}$$

risultato uguale a quello che si ottiene direttamente differenziando entrambi i membri della disuguaglianza (CS.2). Questa condizione la possiamo riscrivere in forma di prodotto scalare:

$$OP \times dP = |OP|\,|dP|\,cos\,\vartheta \geq 0 \tag{CS.6}$$

Poichè i moduli sono non negativi resta di conseguenza la condizione sull'angolo ϑ:

$$cos\,\vartheta \geq 0$$

che deve essere acuto o al più retto.

• In conclusione un vincolo *olonomo*, cioè esprimibile in termini finiti, rappresenta un vincolo sia per le posizioni che per gli spostamenti del sistema.

Diremo anolonomo un vincolo che si presenta come una forma differenziale non esatta, cioè in termini differenziali non integrabili

• In questo caso il vincolo rappresenta un vincolo per gli spostamenti del sistema, ma non per le posizioni, perchè non essendo possibile integrare la forma differenziale che lo esprime, non si può risalire ad una condizione in termini finiti, la quale vincolerebbe le posizioni.

Un esempio interessante è costituito dal vincolo di *puro rotolamento* per un disco che rotola senza strisciare su un piano (o una superficie).

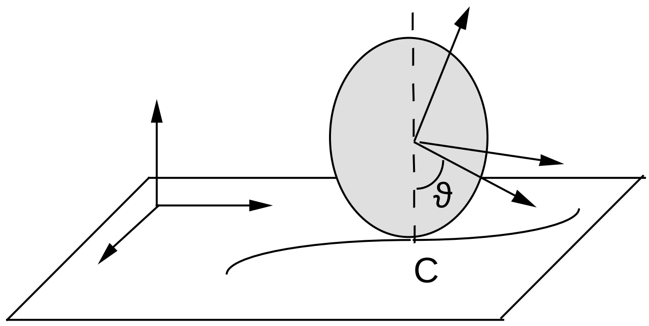

Figura CS. 3: vincolo anolonomo: puro rotolamento di un disco su un piano

Il vincolo di puro rotolamento impone la condizione differenziale di uguaglianza dei cammini (MR.38):

$$ds^{(a)} = ds^{(r)}$$

Nel nostro caso possiamo anche esprimere:

$$ds^{(r)} = R\, d\vartheta \tag{CS.7}$$

dove ϑ è l'angolo che un diametro solidale con il disco forma con una retta solidale con l'osservatore e R è il raggio del disco.

Inoltre, note le equazioni parametriche della curva che il disco percorre con il suo punto di contatto sul piano:

$$OC = OC(s^{(a)})$$

differenziando otteniamo:

$$dC = \frac{dC}{ds^{(a)}} ds^{(a)} = \boldsymbol{T}\, ds^{(a)} \tag{CS.8}$$

essendo $\boldsymbol{T}$ il versore tangente alla curva. Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{T}$ riusciamo ad isolare:

$$ds^{(a)} = \boldsymbol{T} \times dC = T_1 dx_1 + T_2 dx_2 + T_3 dx_3 \tag{CS.9}$$

Allora la condizione di puro rotolamento si traduce nel vincolo differenziale:

$$R\, d\vartheta = T_1 dx_1 + T_2 dx_2 + T_3 dx_3 \tag{CS.10}$$

Questo non può essere un differenziale esatto, perchè la lunghezza del cammino lungo la curva:

$$\int_\gamma T_i dx_i$$

dipende dalla curva γ che il punto di contatto del disco descrive sul piano, mentre un differenziale esatto dà un integrale indipendente dal cammino.

Notiamo che il vincolo di puro rotolamento diviene olonomo quando il problema è ridotto a una sola dimensione, cioè quando si assegna la curva sulla quale deve avvenire il rotolamento del disco. In questo caso il disco non è vincolato a rotolare senza strisciare su un piano, ma è vincolato addirittura sulla curva: l'esempio più comune è quello di un disco vincolato a rotolare senza strisciare su di una retta.

In questo caso abbiamo:

$$ds^{(r)} = R\, d\vartheta, \qquad ds^{(a)} = dx \tag{CS.11}$$

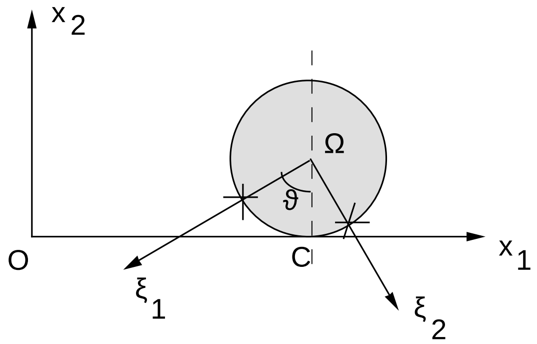

Figura CS. 4: vincolo olonomo: puro rotolamento di un disco su una retta

e il vincolo di puro rotolamento è una forma differenziale *esatta*:

$$R\,, d\vartheta = dx \tag{CS.12}$$

in quanto la forma differenziale è in una sola variabile e può essere ricondotta in termini finiti mediante integrazione:

$$R\vartheta = x - x_0 \tag{CS.13}$$

Il vincolo è dunque olonomo. In generale, dunque, un vincolo anolonomo si può esprimere come una forma differenziale non esatta fra le coordinate dei punti del sistema.

— vincoli *bilaterali* e *unilaterali*

Abbiamo già visto che i vincoli possono essere espressi mediante *uguaglianze* o mediante *disuguaglianze*:

Un vincolo si dice bilaterale se è esprimibile mediante sole relazioni di uguaglianza

Un vincolo si dice unilaterale se nella sua formulazione contiene almeno una relazione di disuguaglianza

Fra gli esempi che abbiamo esaminato il vincolo espresso dalla (CS.1) è un vincolo *bilaterale*, mentre il vincolo espresso dalla (CS.2) è *unilaterale*.

Notiamo che un vincolo può comportare anche più di una condizione analitica.

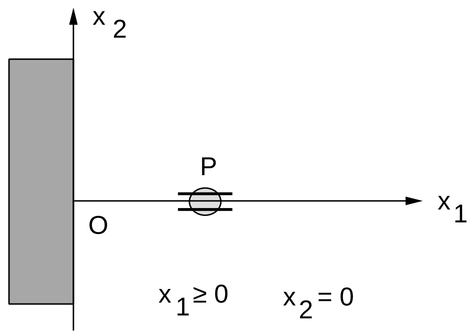

Figura CS. 5: punto vincolato su una semiretta

Ad esempio, se si vuole vincolare il punto P del piano $x_1 x_2$ ad appartenere alla semiretta delle ascisse non negative si devono imporre le due condizioni:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \tag{CS.14}$$

delle quali una è una disuguaglianza; il vincolo è dunque unilaterale. Quando ci si trova nella posizione limite, che si dice *posizione di confine,* definita dalle coordinate $(0, 0)$, allora le limitazioni per gli spostamenti, a partire da quella configurazione, si ottengono, praticamente, differenziando entrambi i membri delle relazioni di vincolo:

$$\begin{cases} dx_1 \geq 0 \\ dx_2 = 0 \end{cases} \tag{CS.15}$$

— vincoli *scleronomi* (o *indipendenti dal tempo*) e *reonomi* (o *dipendenti dal tempo*)

Un vincolo si dice scleronomo quando nella sua formulazione analitica non compare la dipendenza esplicita dal tempo

Un vincolo si dice reonomo quando nella sua formulazione analitica compare la dipendenza esplicita dal tempo

Come esempio di vincolo olonomo *reonomo* possiamo pensare ad una superficie, variabile nel tempo, a cui un punto è vincolato ad appartenere. Per un vincolo di questo genere si ha una condizione del tipo:

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \tag{CS.16}$$

Ad esempio, un punto vincolato sulla superficie di un palloncino sferico che viene gonfiato e che ha, quindi, raggio variabile in funzione del tempo.

L'equazione del vincolo ha in questo caso la forma:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = [R(t)]^2 \tag{CS.17}$$

— vincoli *lisci* e *vincoli scabri*

Un'ulteriore classificazione dei vincoli fondamentale nella meccanica è quella che distingue i vincoli in *lisci* e *scabri*: questa distinzione, però non è puramente cinematica, in quanto richiede il concetto di forza e perciò dobbiamo rimandare ai capitoli successivi la sua formulazione.

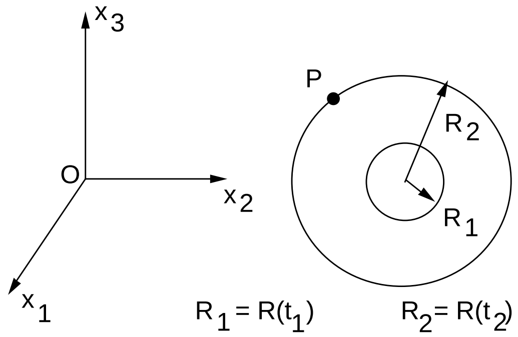

Figura CS. 6: vincolo reonomo

Sistemi olonomi

Un sistema meccanico soggetto a soli vincoli olonomi si dice olonomo.

Supponiamo di denotare con $P_1, P_2, \cdots, P_n$ i punti del nostro sistema meccanico, e con:

$$OP_s \equiv (x_s, y_s, z_s), \qquad s = 1, 2, \cdots, n \tag{CS.18}$$

le coordinate dei punti del sistema.

Supponiamo, poi, che esistano m relazioni di uguaglianza tra loro indipendenti (con $m \leq 3n$) e p relazioni di disuguaglianza, in termini finiti, che rappresentano un vincolo *olonomo* per il sistema:

$$\begin{cases} f_1(x_s, y_s, z_s, t) = 0 \\ f_2(x_s, y_s, z_s, t) = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_s, y_s, z_s, t) = 0 \end{cases} \tag{CS.19}$$

$$\begin{cases} g_1(x_s, y_s, z_s, t) \geq 0 \\ g_2(x_s, y_s, z_s, t) \geq 0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ g_p(x_s, y_s, z_s, t) \geq 0 \end{cases} \tag{CS.20}$$

Avendo supposto che le relazioni di uguaglianza siano fra loro indipendenti, avremo che la matrice rettangolare $m \times 3n$:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_i}{\partial x_s} & \frac{\partial f_i}{\partial y_s} & \frac{\partial f_i}{\partial z_s} \end{array} \right\|$$

ha rango $m \leq 3n$. In tal caso il numero dei vincoli espressi da relazioni di uguaglianza è minore, o al più uguale, al numero totale delle coordinate dei punti del sistema. Ciò significa che, mediante le m relazioni indipendenti (CS.19) possiamo esprimere m delle coordinate dei punti del sistema in funzione delle restanti $3n - m$ e del tempo. Il problema è caratterizzato da:

$$N = 3n - m$$

variabili indipendenti, oltre al tempo. Come abbiamo già anticipato trattando del corpo rigido:

Il numero delle variabili indipendenti che in un certo istante identificano univocamente la configurazione di un sistema meccanico si dice numero di gradi di libertà del sistema

Non siamo obbligati a scegliere N coordinate di punti del sistema come come variabili indipendenti, ma possiamo scegliere altrettanto bene delle variabili che siano a loro legate mediante una legge di trasformazione regolare; anzi questa è la scelta più frequente, perchè in genere è la più vantaggiosa.

Si chiamano parametri lagrangiani o coordinate lagrangiane le variabili indipendenti che identificano univocamente le coordinate di tutti i punti di un sistema olonomo in un determinato istante di tempo

e si denotano con:

$$q_1, q_2, \cdots, q_N$$

I punti di un sistema olonomo vengono allora identificati dalle relazioni:

$$OP_s = OP_s(q_1, q_2, \cdots, q_N, t), \qquad s = 1, 2, \cdots, n \tag{CS.21}$$

L'eventuale dipendenza esplicita dal tempo che nasce dalla stessa dipendenza presente nelle relazioni dei vincoli (CS.19) è dovuta alla presenza di vincoli reonomi nel sistema. Se i vincoli sono scleronomi i punti del sistema olonomo sono individuati da relazioni del tipo:

$$OP_s = OP_s(q_1, q_2, \cdots, q_N), \qquad s = 1, 2, \cdots, n \tag{CS.22}$$

Dal punto di vista del moto possiamo allora dire che la conoscenza del moto di un *sistema olonomo* si riconduce alla conoscenza delle funzioni:

$$q_h = q_h(t) \tag{CS.23}$$

mediante le quali si possono identificare le coordinate di tutti i punti in funzione del tempo.

• Osserviamo che un sistema costituito da un solo punto è un caso particolare di sistema olonomo, per il quale i parametri lagrangiani sono le coordinate indipendenti del punto o delle loro funzioni regolari. Anche un corpo rigido costituisce un caso particolare di sistema olonomo: se il corpo rigido è libero ha *sei* gradi di libertà e come parametri lagrangiani si scelgono in genere le tre coordinate del punto Ω, origine di un sistema solidale, e i tre angoli di Eulero. Se il corpo rigido è vincolato ad avere un punto fisso si può scegliere Ω coincidente con il punto fisso e rimangono i *tre* gradi di libertà dati dagli angoli di Eulero. Se il corpo rigido ha un asse fisso rimane solamente un grado di libertà rappresentato dall'angolo di rotazione attorno all'asse.

Tornando al problema generale non abbiamo ancora esaminato le disuguaglianze (CS.20). Dopo aver espresso le coordinate dei punti del sistema mediante i *parametri lagrangiani* queste disuguaglianze si riconducono a funzioni delle q_h e del tempo, per cui le riscriveremo nella forma:

$$\begin{cases} g_1(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \geq 0 \\ g_2(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \geq 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_p(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) \geq 0 \end{cases} \tag{CS.24}$$

Quando sono verificate come disuguaglianza stretta queste relazioni non servono a ridurre il numero di variabili del problema, ma delimitano gli intervalli permessi alle coordinate lagrangiane; nel caso che una o più di queste relazioni valga come uguaglianza (configurazioni di confine) il problema diminuisce il numero di gradi di libertà in quanto si possono eliminare tante variabili quante sono le relazioni di uguaglianza e ci si riconduce ad un numero minore di coordinate lagrangiane.

Spazio delle configurazioni e spazio degli eventi

Un sistema olonomo è caratterizzato completamente dalla conoscenza dei parametri lagrangiani in funzione del tempo:

$$q_1, q_2, \cdots, q_N$$

E' naturale e utile introdurre allora uno spazio ad N dimensioni, mediante il quale il sistema olonomo viene identificato da un punto le cui N coordinate sono le coordinate lagrangiane del sistema. Questo spazio prende il nome di *spazio delle configurazioni* in quanto permette di rappresentare, sotto forma di punti, le configurazioni che il sistema meccanico può assumere.

E' conveniente, allora, introdurre i vettori ad N componenti:

$$\boldsymbol{q} \equiv (q_1, q_2, \cdots, q_N) \tag{CS.25}$$

per rappresentare in forma compatta le configurazioni del sistema.

In taluni casi è comodo introdurre anche la coordinata temporale nel vettore $\boldsymbol{q}$ nel modo seguente:

$$\boldsymbol{q} \equiv (q_0, q_1, q_2, \cdots, q_N), \qquad\qquad q_0 = t \tag{CS.26}$$

dove la prima coordinata è il tempo. Si ottiene allora uno spazio-tempo a $N + 1$ dimensioni che prende il nome di *spazio degli eventi* i cui vettori hanno $N + 1$ componenti.

Vettori velocità in un sistema olonomo

Se differenziamo rispetto al tempo la relazione (CS.21), che identifica le posizioni dei punti di un sistema olonomo, otteniamo un'espressione per le loro velocità in funzione delle coordinate lagrangiane, delle loro derivate rispetto al tempo e, se i vincoli sono reonomi, anche del tempo in maniera esplicita; dobbiamo derivare una funzione composta del tempo e otteniamo:

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{d}{dt} P_s(q_h, t) = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\, \dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\partial t} \tag{CS.27}$$

con la convenzione di Einstein sugli indici h ripetuti che si intendono sommati da 1 ad N. La derivata parziale rispetto al tempo, a secondo membro, compare solo se il vincolo è reonomo e rappresenta il contributo alla velocità dovuto alla variazione del vincolo.

Spostamenti possibili e virtuali

Dato un sistema olonomo possiamo considerare diversi tipi di spostamenti infinitesimi. Matematicamente tali spostamenti si ottengono differenziando in maniera opportuna i vettori OP_s che identificano i punti del sistema:

— spostamento *possibile*

> *Uno spostamento* possibile *è uno spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli e della loro eventuale dipendenza dal tempo (nel caso che i vincoli siano reonomi)*

Si ottiene differenziando la (CS.21) e lo indichiamo con il simbolo ∂P_s. Si caratterizza come:

$$\partial P_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\partial q_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}\,\partial t \tag{CS.28}$$

— spostamento *virtuale*

> *Uno spostamento* virtuale *è uno spostamento infinitesimo che tiene conto dei vincoli, ma non della loro eventuale dipendenza dal tempo*

Il tempo viene pensato come fissato al valore che ha all'inizio dello spostamento e mantenuto costante durante lo spostamento. Si può anche pensare lo spostamento virtuale come uno spostamento istantaneo, cioè uno spostamento che avviene con velocità infinita in un intervallo di tempo nullo. Evidentemente si tratta di uno spostamento che noi immaginiamo di far compiere idealmente al sistema. Indichiamo lo spostamento virtuale con δP_s. Poichè t è fissato durante lo spostamento virtuale, esso risulta caratterizzato come:

$$\delta P_s = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\,\delta q_h \tag{CS.29}$$

Osserviamo che se i vincoli sono scleronomi gli spostamenti possibili e virtuali vengono a coincidere.

Vediamo invece un esempio con un vincolo reonomo: un punto vincolato su una circonferenza di raggio variabile, di equazione cartesiana:

$$x^2 + y^2 = [R(t)]^2 \tag{CS.30}$$

Se agiamo con l'operatore δ, che tratta il tempo come una costante, otteniamo:

$$x\delta x + y\delta y = 0$$

Ovvero, in termini di vettori:

$$OP \times \delta P = 0$$

relazione che ci dice che lo spostamento virtuale è tangente alla curva del vincolo nello spazio bidimensionale all'istante t nel quale si effettua lo spostamento. Se invece agiamo con l'operatore ∂ otteniamo:

$$x\partial x + y\partial y = R(t)\,\dot{R}(t)\,\partial t$$

Ovvero: nello spazio-tempo a 3 dimensioni il vettore a tre componenti: $(\partial x, \partial y, \partial t)$ è tangente alla superficie conica di equazione (CS.21).

Spostamenti reversibili e irreversibili

Sottolineiamo che sia gli spostamenti possibili che quelli virtuali sono spostamenti ideali che noi immaginiamo di far compiere al sistema e non vanno confusi con lo spostamento fisico che il sistema effettivamente compie

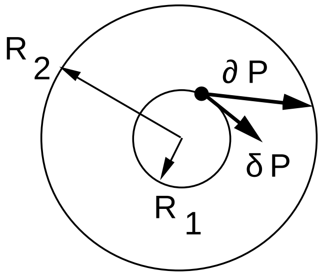

Figura CS. 7: spostamento possibile e virtuale

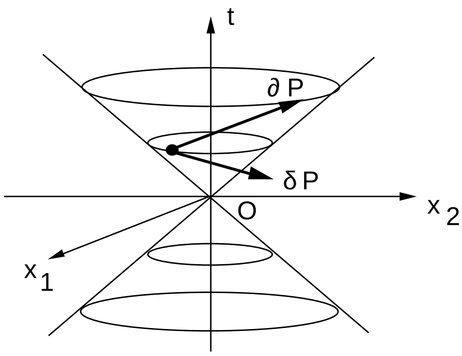

Figura CS. 8: rappresentazione spazio-temporale degli spostamenti per un punto su una circonferenza di raggio variabile

sotto l'azione di forze che lo sollecitano, a partire da determinate condizioni iniziali.

Per concludere la trattazione cinematica sui vincoli notiamo che quando sono presenti dei vincoli unilaterali, affinchè gli spostamenti siano compatibili con i vincoli, dovranno essere rispettate, nelle configurazioni di confine, anche le disuguaglianze per gli spostamenti che sono conseguenza delle condizioni sulle posizioni. Infatti se è presente un vincolo in termini finiti del tipo:

$$g(q_h, t) \geq 0$$

quando siamo in una configurazione di confine dovrà valere come uguaglianza:

$$g(q_h, t) = 0$$

Dopo aver incrementato le coordinate lagrangiane non ci troveremo più in configurazione di confine, quindi dovremo avere:

$$g(q_h + \partial q_h, t + \partial t) \geq 0$$

Ora sviluppando risulta:

$$g(q_h + \partial q_h, t + \partial t) = g(q_h, t) + \partial g + \mathcal{O}(2)$$

Segue che, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo deve essere soddisfatta la condizione sugli spostamenti:

$$\partial g = \frac{\partial g}{\partial q_h} \partial q_h + \frac{\partial g}{\partial t} \partial t \geq 0$$

Le condizioni che nascono per gli spostamenti, in presenza di vincoli unilaterali, conducono a introdurre una ulteriore distinzione nella classificazione degli spostamenti: si tratta della distinzione fra spostamento *reversibile* e spostamento *irreversibile*:

— Uno spostamento possibile (o rispettivamente virtuale) si dice *reversibile* se lo spostamento opposto a partire dalla stessa configurazione è possibile (o rispettivamente virtuale). In caso contrario lo spostamento si dice *irreversibile*.

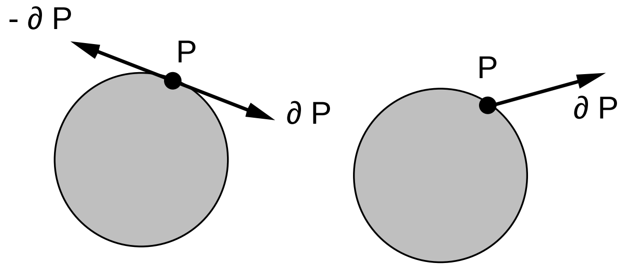

Figura CS. 9: spostamento reversibile (a sinistra) e irreversibile (a destra)