

MP. Moti rigidi piani

Quanto abbiamo visto a proposito dei *moti rigidi* e di *moti relativi* ci consente di trattare un esempio notevole di moto rigido come il *moto rigido piano*.

Un moto rigido si dice piano quando è possibile trovare un piano π solidale con il corpo che, durante il moto, si mantiene parallelo ed equidistante ad un piano π' solidale con l'osservatore

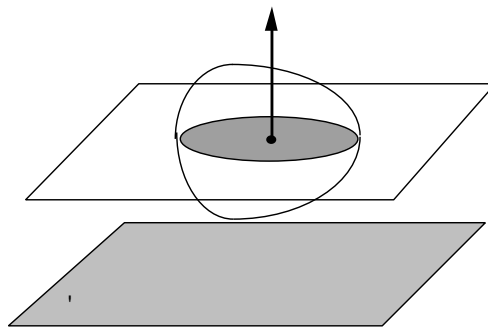


Figura MP. 1: moto rigido piano

- Il fatto notevole è che, per un *moto rigido piano*, lo studio del moto è riconducibile ad un problema in due dimensioni, ovvero allo studio del *moto di una figura rigida piana nel suo piano*.

Infatti è immediato verificare che tutti i punti di una retta ortogonale al piano π (o se si vuole π') hanno la stessa velocità e, quindi, la velocità di ogni punto del corpo è conosciuta quando si conosce la velocità della sua proiezione sul piano π , ovvero la velocità dei punti della *sezione* del corpo con il piano π .

Considerato un punto qualunque P del corpo distinto dalla sua proiezione P' sul piano π' , affinchè il moto sia rigido piano, il vettore PP' deve risultare costante. Infatti si può scrivere:

$$PP' = |PP'| \mathbf{u} \quad (\text{MP.1})$$

dove \mathbf{u} è il versore normale al piano π , concorde con PP' . Allora derivando rispetto al tempo abbiamo:

$$\frac{dPP'}{dt} = \frac{d|PP'|}{dt} \mathbf{u} + |PP'| \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Ma:

$$\frac{d|PP'|}{dt} = 0$$

per la condizione di rigidità (CR.2) e:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0 \quad (\text{MP.2})$$

perchè il piano π si mantiene sempre parallelo a se stesso durante il moto e quindi il versore ad esso normale è costante. Dunque:

$$\frac{dPP'}{dt} = \frac{dP'}{dt} - \frac{dP}{dt} = 0 \quad (\text{MP.3})$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{v}_P \quad (\text{MP.4})$$

qualunque sia il punto P appartenente alla retta passante per P e normale al piano π . Dunque il moto della *sezione* del corpo con il piano determina completamente il moto del corpo.

Dalla legge di distribuzione delle velocità (CR.34) e dalla (MP.4) otteniamo, di conseguenza, delle informazioni sulla velocità angolare; abbiamo:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge PP' = 0 \quad (\text{MP.5})$$

ed essendo per ipotesi $P \neq P'$, per la velocità angolare nel moto rigido piano rimangono le due seguenti possibilità:

— *prima possibilità*: $\boldsymbol{\omega} = 0$ nel qual caso l'atto di moto risulta traslatorio;

— *seconda possibilità*: $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo a PP' cioè $\boldsymbol{\omega}$ è parallelo al versore \mathbf{u} normale al piano π . In questo caso l'*asse di Mozzi* esiste ed è normale al piano π . Ricordiamo che per ogni punto A dell'asse di Mozzi la velocità si può scrivere:

$$\mathbf{v}_A = \tau \mathbf{u} \quad (\text{MP.6})$$

Non abbiamo ancora utilizzato l'informazione relativa alla invariabilità della distanza fra i piani paralleli π e π' : questa comporta che la componente della velocità normale a questi piani deve essere nulla. Infatti considerando un punto A appartenente alla sezione del corpo con il piano π e la sua proiezione A' sul piano π' , la distanza fra i due piani si può esprimere come:

$$h = \mathbf{u} \times A'A \quad (\text{MP.7})$$

La sua invariabilità equivale a richiedere:

$$\frac{dh}{dt} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_A = \tau = 0 \quad (\text{MP.8})$$

dal momento che la componente della velocità di A' lungo \mathbf{u} è necessariamente nulla, essendo A' , per definizione, non un punto del corpo, ma del piano fisso π' . Ora la (MP.8) ci informa che le velocità dei punti del corpo o sono nulle o sono parallele al piano π , in quanto risultano ortogonali al versore normale a π . Questo significa anche che le velocità dei punti della sezione del corpo con il piano π costituiscono un sistema di vettori piani il cui piano è π e quindi la sezione piana si muove nel suo piano, senza mai uscire da esso.

- Si conclude allora, che in un moto rigido piano l'atto di moto o è *traslatorio*, e allora tutti i punti hanno velocità uguali e parallele al piano π , oppure è *rotatorio* con le velocità dei punti sempre parallele al piano π . Il piano π si dice allora *piano del moto*. In questo caso il vettore velocità angolare è sempre normale al piano del moto.

Dunque in un moto rigido piano l'atto di moto o è puramente traslatorio o è puramente rotatorio, e non può mai essere elicoidale nel senso generale del termine, cioè con ω e τ contemporaneamente non nulli.

Centro di istantanea rotazione

Esaminiamo il caso in cui $\omega \neq 0$: allora l'atto di moto è *rotatorio* e l'asse di Mozzi è un *asse di istantanea rotazione*, essendo una retta i cui punti hanno velocità nulla, ed è ortogonale al piano del moto.

Definiamo ora *centro di istantanea rotazione* il punto d'intersezione dell'asse di istantanea rotazione con il piano del moto.

Si può quindi dare, di conseguenza, anche una definizione diretta di centro di istantanea rotazione che non faccia ricorso al concetto di asse di istantanea rotazione, dicendo che:

In un moto rigido piano in cui l'atto di moto è rotatorio, il centro di istantanea rotazione è quel punto della sezione del corpo che, nell'istante considerato, ha velocità nulla

Quando il *centro di istantanea rotazione* esiste è possibile rappresentare l'atto di moto, cioè la velocità di ogni punto P del corpo nel modo seguente:

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CP} \quad (\text{MP.9})$$

essendo C il *centro di istantanea rotazione*.

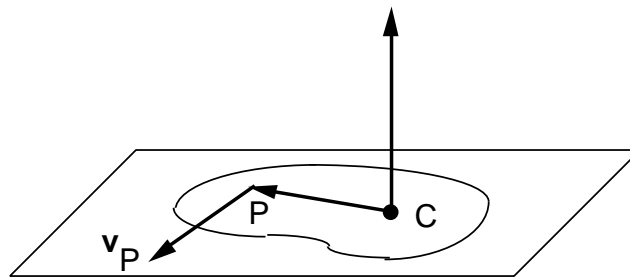


Figura MP. 2: centro di istantanea rotazione

Dal punto di vista geometrico è possibile determinare C graficamente quando si conoscono due vettori velocità fra loro non paralleli: infatti dal momento che il *centro di istantanea rotazione* è quel punto del corpo che ha velocità nulla in un certo istante, segue che tutte le rette passanti per C hanno velocità di scorrimento nulla e di conseguenza sono normali ai vettori velocità dei loro punti distinti da C . Per cui, noti due vettori velocità non paralleli, tracciando le rette normali ad essi condotte per i rispettivi punti di applicazione, il centro viene determinato dal punto di intersezione di queste normali.

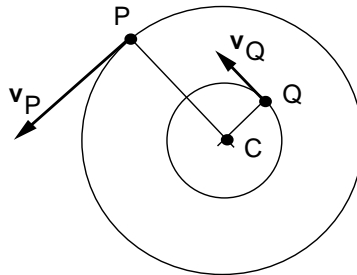


Figura MP. 3: determinazione grafica del centro di istantanea rotazione

Dalla figura (MP. 3) risulta chiaro, che se si scegliessero due vettori velocità paralleli fra loro, essendo l'atto di moto rotatorio, i loro punti di applicazione sarebbero allineati lungo la retta normale comune ai due vettori e non si avrebbero abbastanza informazioni per determinare il centro.

Se invece l'atto di moto tende ad un atto di moto traslatorio i due vettori velocità tendono a diventare paralleli ma con i punti di applicazione non allineati sulla stessa normale; mentre le due normali tendono a diventare parallele e il loro punto di intersezione, cioè il centro diviene un punto improprio. Per cui si può pensare ad un atto di moto traslatorio come al limite di un atto di moto rotatorio il cui centro è un punto improprio, che definisce la direzione delle rette normali ai vettori velocità.

Determinazione analitica del centro

Prima abbiamo indicato un metodo *grafico* per determinare il centro, ora esponiamo un metodo *analitico*.

Per definizione di centro di istantanea rotazione si ha:

$$\mathbf{v}_C = 0 \quad (\text{MP.10})$$

ma grazie alla legge di distribuzione delle velocità (CR.34) possiamo scrivere:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega C$$

Quindi:

$$\mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega C = 0 \quad (\text{MP.11})$$

essendo Ω un punto qualunque del corpo, scelto come origine di un sistema di assi solidali nel piano del moto. Moltiplicando vettorialmente per $\boldsymbol{\omega}$ a sinistra la (MP.11) riusciamo ad isolare ΩC :

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega C) = 0$$

Ovvero, svolgendo il doppio prodotto vettoriale:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_\Omega + (\boldsymbol{\omega} \times \Omega C) \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^2 \Omega C = 0 \quad (\text{MP.12})$$

Ma:

$$\boldsymbol{\omega} \times \Omega C = 0 \quad (\text{MP.13})$$

essendo ΩC appartenente al piano del moto e $\boldsymbol{\omega}$ normale allo stesso piano. Quindi supposto che l'atto di moto sia rotatorio, e cioè che $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ dalla (MP.12) otteniamo:

$$\Omega C = \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_\Omega}{\boldsymbol{\omega}^2} \quad (\text{MP.14})$$

E' possibile a questo punto riferire il centro all'origine O di un sistema di assi solidale con l'osservatore del moto, semplicemente calcolando:

$$OC = O\Omega + \Omega C \quad (\text{MP.15})$$

Per cui abbiamo:

$$OC = O\Omega + \frac{\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}_\Omega}{\omega^2} \quad (\text{MP.16})$$

Ora al variare del tempo, in istanti differenti, il centro non è, generalmente, lo stesso punto del corpo, ma cambia in quanto, se in un istante t era un certo punto del corpo ad avere velocità nulla, in un istante successivo sarà, generalmente, un altro punto del corpo ad avere velocità nulla. Il centro coincide sempre con lo stesso punto del corpo solo se il corpo ruota attorno ad un asse fisso: in questo caso non solo l'atto di moto, ma il moto come tale è rotatorio e il centro fisso è l'intersezione dell'asse fisso con il piano del moto. La relazione che abbiamo appena trovato ci dice, istante per istante quale punto del corpo rigido rappresenta il centro di istantanea rotazione.

Base e rulletta

E' utile considerare, a questo punto, *l'insieme di tutti i centri di istantanea rotazione al variare del tempo t* . Tale insieme rappresenta un luogo geometrico caratterizzato da un solo parametro t , cioè una curva. Va sottolineato il fatto che si ottengono due curve distinte a seconda che si definisca tale luogo geometrico rispetto al sistema di assi dell'osservatore del moto del corpo oppure rispetto ad un sistema di assi solidali con il corpo stesso.

Avremo allora una curva descritta dal centro di istantanea rotazione rispetto al sistema dell'osservatore e una curva descritta dal centro di istantanea rotazione rispetto al sistema solidale con il corpo.

Si dice base la curva descritta dal centro di istantanea rotazione rispetto al sistema dell'osservatore

Si dice rulletta la curva descritta dal centro di istantanea rotazione rispetto al sistema solidale con il corpo

Anche se il punto C , in quanto punto del corpo, cambia istante per istante, dal punto di vista geometrico le due curve si possono pensare generate da C pensandolo come un punto geometrico che ha una sua individualità, il cui moto è descritto dalle leggi (MP.16) e (MP.14) rispetto ai due osservatori. Il centro C , come punto geometrico che descrive le due curve appena definite non è solidale al corpo, ma si muove sia rispetto al sistema dell'osservatore (sistema assoluto), che rispetto al sistema solidale con il corpo (sistema relativo). Abbiamo dunque un problema di cinematica relativa per il punto C .

In particolare si può stabilire, mediante il teorema di Galileo un legame fra la velocità assoluta e la velocità relativa, definite da:

$$\mathbf{v}_C^{(a)} = \frac{d^{(a)}}{dt} OC \quad (\text{MP.17})$$

$$\mathbf{v}_C^{(r)} = \frac{d^{(r)}}{dt} \Omega C \quad (\text{MP.18})$$

Tale legame, come è noto è:

$$\mathbf{v}_C^{(a)} = \mathbf{v}_C^{(r)} + \mathbf{v}_C^{(\tau)} \quad (\text{MP.19})$$

Osserviamo che la velocità di trascinamento del punto C , che per la definizione di velocità di trascinamento (MR.14) è data da:

$$\mathbf{v}_C^{(r)} = \mathbf{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega C \quad (\text{MP.20})$$

risulta essere nulla grazie alla (MP.11). Infatti il centro è il punto del corpo che nell'istante considerato coincide con C e questo ha velocità nulla.

Ma allora la relazione fra le velocità del punto C rispetto agli osservatori assoluto e relativo è semplicemente:

$$\mathbf{v}_C^{(a)} = \mathbf{v}_C^{(r)} \quad (\text{MP.21})$$

Questa condizione confrontata con la condizione di puro rotolamento (MR.36) ci consente di affermare che la base e la rulletta rotolano senza strisciare l'una sull'altra e che il centro di istantanea rotazione è istante per istante il loro punto di contatto.

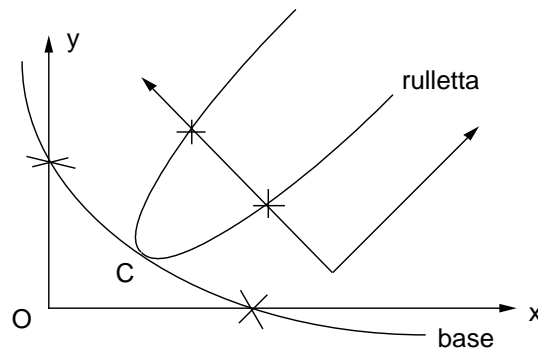


Figura MP. 4: base e rulletta

Le equazioni della *base* e della *rulletta* si possono determinare analiticamente proiettando la (MP.16) sugli assi dell'osservatore assoluto per la base, e la (MP.14) sugli assi dell'osservatore relativo per la rulletta. I sistemi di assi si scelgono, come in figura (MP. 5) essendo xy il piano del moto.

Indicheremo con:

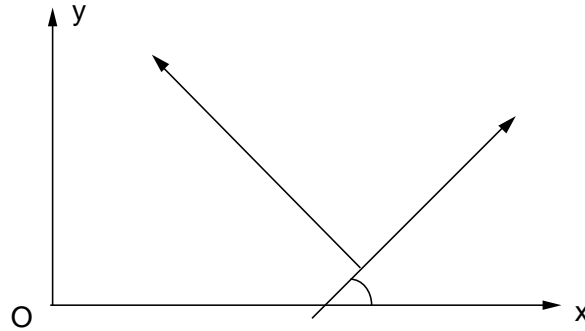


Figura MP. 5: Assi del riferimento assoluto e relativo

$$x_{\Omega} = x_{\Omega}(t), \quad y_{\Omega} = y_{\Omega}(t) \quad (\text{MP.22})$$

le funzioni del tempo che danno le coordinate dell'origine Ω del sistema relativo, solidale con il corpo rigido, rispetto all'osservatore assoluto e con:

$$\vartheta = \vartheta(t) \quad (\text{MP.23})$$

la funzione che dà l'angolo fra l'asse ξ e l'asse x in funzione del tempo.

Allora otteniamo:

$$\mathbf{v}_{\Omega} \equiv (\dot{x}_{\Omega}, \dot{y}_{\Omega}, 0) \quad (\text{MP.24})$$

$$\boldsymbol{\omega} \equiv (0, 0, \dot{\vartheta}) \quad (\text{MP.25})$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_{\Omega} \equiv (-\dot{\vartheta} \dot{y}_{\Omega}, \dot{\vartheta} \dot{x}_{\Omega}, 0) \quad (\text{MP.26})$$

Indicando con x, y le coordinate variabili di C nel piano del moto abbiamo:

$$\begin{cases} x = x_{\Omega} - \dot{y}_{\Omega}/\dot{\vartheta} \\ y = y_{\Omega} + \dot{x}_{\Omega}/\dot{\vartheta} \end{cases} \quad (\text{MP.27})$$

Queste sono le equazioni parametriche della *base* nel parametro t . L'eliminazione del parametro, caso per caso, fornisce l'equazione cartesiana nel piano dell'osservatore assoluto xy .

Notiamo che in molti casi le funzioni (MP.22) non dipendono esplicitamente dal tempo, ma dipendono dal tempo solo come funzioni composte, attraverso ϑ , cioè hanno la struttura:

$$x_{\Omega} = x_{\Omega}(\vartheta(t)), \quad y_{\Omega} = y_{\Omega}(\vartheta(t)) \quad (\text{MP.28})$$

Questo comporta:

$$\dot{x}_{\Omega} = x'_{\Omega}\dot{\vartheta}, \quad \dot{y}_{\Omega} = y'_{\Omega}\dot{\vartheta} \quad (\text{MP.29})$$

dove abbiamo denotato:

$$x'_{\Omega} = \frac{dx_{\Omega}}{d\vartheta}, \quad y'_{\Omega} = \frac{dy_{\Omega}}{d\vartheta} \quad (\text{MP.30})$$

Allora, introducendo le (MP.29) nelle (MP.27) si ottengono delle equazioni parametriche nel parametro ϑ anzichè t :

$$\begin{cases} x = x_{\Omega} - y'_{\Omega} \\ y = y_{\Omega} + x'_{\Omega} \end{cases} \quad (\text{MP.31})$$

Queste equazioni hanno il vantaggio di contenere solo informazioni di carattere geometrico e non più cinematico, avendo eliminato la dipendenza esplicita dal tempo.

Va notato che la dipendenza più generale possibile delle coordinate di Ω dal tempo avrebbe la forma:

$$x_{\Omega} = x_{\Omega}(\vartheta(t), t), \quad y_{\Omega} = y_{\Omega}(\vartheta(t), t) \quad (\text{MP.32})$$

che contiene anche la dipendenza esplicita dal tempo.

Per ottenere le equazioni della ruletta si procede in modo analogo, però occorre riferirsi agli assi $\xi\eta$ del sistema relativo, solidale con il corpo.

Ricordiamo, che nel moto rigido, il legame fra le coordinate dei due sistemi è dato dalla relazione (CR.18):

$$x_i = x_{\Omega i} + R_{ik}\xi_k \quad (\text{MP.33})$$

dalla quale possiamo risolvere le ξ_k moltiplicando per R_{ji}^T e tenendo conto che per la matrice di rotazione si ha:

$$R_{ji}^T R_{ik} = \delta_{jk}$$

Dunque si ottiene subito:

$$\xi_j = R_{ji}^T(x_i - x_{\Omega i}) \quad (\text{MP.34})$$

Notiamo che le $x_i - x_{\Omega i}$, grazie alla relazione che lega i vettori (MP.15), non sono altro che le componenti del vettore ΩC note dalla (MP.14) e la matrice di rotazione \tilde{R} rappresenta una rotazione di un angolo ϑ attorno all'asse ζ e perciò si scrive:

$$\underline{R} \equiv \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\operatorname{sen} \vartheta & 0 \\ \operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi sviluppando i calcoli:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \operatorname{sen} \vartheta & 0 \\ -\operatorname{sen} \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{y}_\Omega/\dot{\vartheta} \\ \dot{x}_\Omega/\dot{\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo, nel piano relativo $\xi\eta$ le equazioni parametriche della *rulletta* nel parametro t :

$$\begin{cases} \xi = -\frac{\dot{y}_\Omega}{\dot{\vartheta}} \cos \vartheta + \frac{\dot{x}_\Omega}{\dot{\vartheta}} \operatorname{sen} \vartheta \\ \eta = \frac{\dot{y}_\Omega}{\dot{\vartheta}} \operatorname{sen} \vartheta + \frac{\dot{x}_\Omega}{\dot{\vartheta}} \cos \vartheta \end{cases} \quad (\text{MP.35})$$

Nel caso poi in cui valgono le (MP.28), sostituendo le (MP.29) nelle (MP.35) otteniamo le equazioni della rulletta nel parametro ϑ :

$$\begin{cases} \xi = -y'_\Omega \cos \vartheta + x'_\Omega \operatorname{sen} \vartheta \\ \eta = y'_\Omega \operatorname{sen} \vartheta + x'_\Omega \cos \vartheta \end{cases} \quad (\text{MP.36})$$