CR. Cinematica del corpo rigido

Abbiamo finora schematizzato i corpi, in prima approssimazione, con dei punti geometrici: questa schematizzazione si dimostra sufficiente quando le dimensioni lineari che caratterizzano un corpo si possono trascurare rispetto alle lunghezze che entrano in gioco durante il moto del corpo e quando non è rilevante diversificare la descrizione del moto di una parte del corpo rispetto ad altre sue parti. In tal modo non si prende in considerazione il fatto che il corpo abbia una sua *struttura.*

Tuttavia la schematizzazione del corpo come un punto non è sufficiente in tutti quei casi in cui l'estensione e la struttura propria del corpo vengono prese in considerazione: in questo caso occorre una schematizzazione più complessa. In molte situazioni, quando si ha a che fare con dei solidi, per i quali risultano trascurabili le deformazioni, una buona schematizzazione risulta essere quella del *corpo rigido.*

Corpo rigido e condizione di rigidità

Introduciamo allora una definizione di corpo rigido che traduca in termini matematici la nozione intuitiva di corpo rigido che ci viene dall'esperienza:

Un corpo si dice rigido quando la distanza di due punti qualsiasi del corpo si mantiene indefinitamente costante nel tempo

Si dice, inoltre *condizione di rigidità* tale condizione di invariabilità della distanza fra due punti qualsiasi del corpo.

Osserviamo che un corpo (o sistema, come spesso anche lo si denomina) rigido si può pensare come un insieme discreto di punti (particelle) che soddisfano la condizione di rigidità. Fisicamente lo *schema discreto o particellare* nasce dall'idea di pensare il corpo come costituito di particelle (atomi, molecole, ecc.).

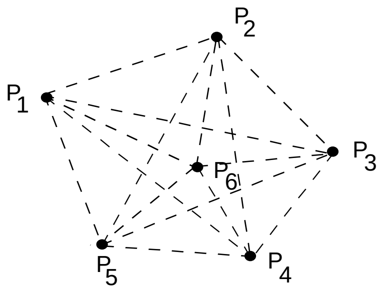

Figura CR. 1: schema discreto del corpo rigido

Pensando il corpo rigido come un insieme discreto di punti definito da:

$$\mathcal{C} = \{P_s \in R^3 \ ; \ s = 1, 2, \cdots, n\}$$

la condizione di rigidità si traduce matematicamente nella condizione:

$$|P_r P_s| = costante, \qquad r, s = 1, 2, \cdots, n \tag{CR.1}$$

Se il numero dei punti del sistema rigido è molto elevato e le distanze dei punti tra loro più vicini sono molto piccole rispetto alle dimensioni lineari del corpo, tanto da poterle trascurare, come accade per i corpi macroscopici, è conveniente, invece, adottare lo *schema continuo.* In questo caso l'insieme dei punti che costituiscono il corpo rigido si rappresenta con un sottoinsieme di R^3 avente la potenza del continuo.

La condizione di rigidità si esprime allora nella forma:

$$|PQ| = costante, \qquad \forall P,\, Q \,\in\, \mathcal{C} \,\subset\, R^3 \tag{CR.2}$$

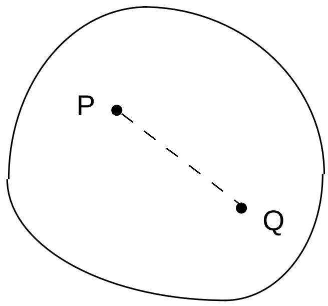

Figura CR. 2: schema continuo del corpo rigido

Retta solidale e velocità di scorrimento

Pensiamo ora di riferire il moto del corpo rigido ad un *osservatore* dotato di un sistema di assi cartesiani ortogonali. Anzitutto dobbiamo specificare che cosa intendiamo per *descrizione del moto di un corpo o sistema di punti* e poi utilizzeremo questa definizione per il corpo rigido.

Il moto di un sistema di punti è conosciuto quando è noto il moto di ogni suo punto

Per cui, ad esempio, descrivere il moto di un sistema *discreto* significa conoscere tutte le funzioni vettoriali del tempo:

$$OP_s = OP_s(t), \qquad s = 1, 2, \cdots, n \tag{CR.3}$$

essendo n il numero di punti del sistema.

Analogamente, nello schema continuo, conoscere il moto del corpo $\mathcal{C}$ significa conoscere il moto di ogni suo punto:

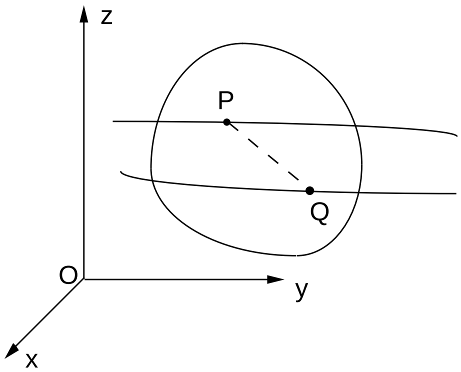

Figura CR. 3: Moto di un sistema rigido riferito ad un osservatore

$$OP = OP(t), \qquad \forall P \in \mathcal{C} \tag{CR.4}$$

Nel caso del corpo rigido bisogna, in più, prendere in considerazione la condizione di rigidità e le sue conseguenze. La utilizziamo nel caso del continuo rigido per non avere a che fare con gli indici, ma il caso discreto si tratta allo stesso modo: eleviamo al quadrato la (CR.2) e la deriviamo rispetto al tempo, ottenendo:

$$(QP)^2 = QP \times QP = costante \qquad \Longleftrightarrow \qquad QP \times \frac{dQP}{dt} = 0 \tag{CR.5}$$

Dal momento che:

$$QP = OP - OQ \tag{CR.6}$$

derivando la (CR.6) rispetto al tempo e tenendo conto che O è fisso, si ottiene, grazie alla definizione di velocità vettoriale (CP.22):

$$\frac{dQP}{dt} = \boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_Q \tag{CR.7}$$

Sostituendo nella (CR.5) otteniamo:

$$QP \times \boldsymbol{v}_P = QP \times \boldsymbol{v}_Q \tag{CR.8}$$

Escludendo il caso banale in cui $P \equiv Q$ che non ci dà nessuna informazione, dopo aver introdotto il versore $\boldsymbol{u}$ di QP:

$$QP = |QP|\,\boldsymbol{u} \tag{CR.9}$$

sostituendo nella (CR.8) e semplificando per il modulo (non nullo) abbiamo la condizione sulle velocità che equivale alla condizione di rigidità:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_Q \tag{CR.10}$$

Questo risultato può essere letto in questo modo:

• *dati due punti distinti qualsiasi di un corpo rigido le componenti delle loro velocità lungo la retta che li congiunge sono uguali.*

Questo equivale a garantire che la loro distanza rimane invariata (rigidità). Ma P e Q sono due punti qualunque del corpo rigido, per cui, considerando tutti i punti della retta che congiunge P e Q si può concludere che la componente della loro velocità secondo $\boldsymbol{u}$ è la stessa per tutti. Infatti se si considera un altro punto Q' della stessa retta passante per P e Q, di versore $\boldsymbol{u}$, e si ripete il procedimento sopra descritto, si può concludere che:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_{Q'} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}_Q$$

e questo risultato è equivalente al fatto che le mutue distanze dei punti della retta si mantengono invariabili.

• Allora risulta del tutto naturale considerare, per ogni coppia di punti distinti del corpo rigido, la retta passante per i due punti e luogo geometrico dei punti le cui distanze soddisfano la condizione di rigidità, ovvero le cui proiezioni delle velocità in direzione della retta sono uguali a quelli dei due punti assegnati.

Una retta di questo genere si dice essere una *retta solidale* con il corpo rigido.

Possiamo caratterizzare la *retta solidale* al corpo rigido condotta per i punti P e Q come:

$$\mathcal{R} = \{P' \in R^3\,; OP' = OQ + \lambda\, \boldsymbol{u}\ , \lambda \in R\,, |QP'| = costante\} \tag{CR.11}$$

ovvero:

$$\mathcal{R} = \{P' \in R^3\,; OP' = OQ + \lambda\, \boldsymbol{u}\ , \lambda \in R\,, \boldsymbol{v}_{P'} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_Q \times \boldsymbol{u}\} \tag{CR.12}$$

essendo $\boldsymbol{u}$ il versore di QP.

Una retta solidale, evidentemente, contiene anche punti che non appartengono al corpo rigido *fisico*, dal momento che si estende all'infinito, mentre un corpo *fisico* occupa sempre una regione limitata dello spazio; tuttavia i suoi punti mantengono sempre una distanza invariabile dai punti del corpo, per cui, dal punto di vista geometrico e cinematico, una retta solidale forma un tutto unico con il corpo rigido. Per cui una retta solidale viene a comportarsi come se fosse parte integrante del corpo rigido.

Si definisce poi la *velocità di scorrimento* della retta solidale passante per un punto P, diretta secondo il versore $\boldsymbol{u}$, come:

$$v_{scorr} = \boldsymbol{v}_P \times \boldsymbol{u} \tag{CR.13}$$

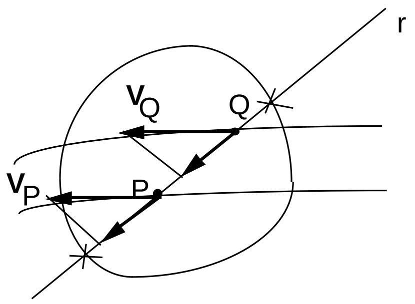

Figura CR. 4: retta solidale a un corpo rigido

Riferimento solidale

Esistono, evidentemente, infinite rette solidali ad un corpo rigido, data l'arbitrarietà delle coppie di punti che si possono scegliere per identificarle: possiamo allora pensare di scegliere una terna di rette solidali fra loro ortogonali, aventi un punto di intersezione comune Ω, e di orientare le rette in modo da realizzare una terna cartesiana ortogonale levogira *solidale.* Allora si comprende come esiste un intero *spazio solidale* con il corpo rigido costituito da punti le cui distanze soddisfano la condizione di rigidità. Descrivere il moto del corpo rigido equivale a descrivere il moto di tutti i punti dello spazio rigido ad esso solidale, ovvero di una terna di assi solidali con il corpo.

Per identificarle, distinguendole, denoteremo con $Ox_1x_2x_3 \equiv Oxyz$ la terna dell'osservatore del moto e con $\Omega\xi_1\xi_2\xi_3 \equiv \Omega\xi\eta\zeta$ la terna solidale con il corpo rigido.

E' conveniente anche introdurre due basi di ortonormali di versori degli assi. Indichiamo con: $\{\boldsymbol{c}_i, \ i = 1, 2, 3\}$ la base dell'osservatore, relativa agli assi $x_1x_2x_3 \equiv xyz$ e con: $\{\boldsymbol{e}_i, \ i = 1, 2, 3\}$ la base solidale relativa agli assi $\xi_1\xi_2\xi_3 \equiv \xi\eta\zeta$. L'osservatore vede la base solidale in moto, quindi i versori solidali risultano variabili nel tempo rispetto all'osservatore del moto.

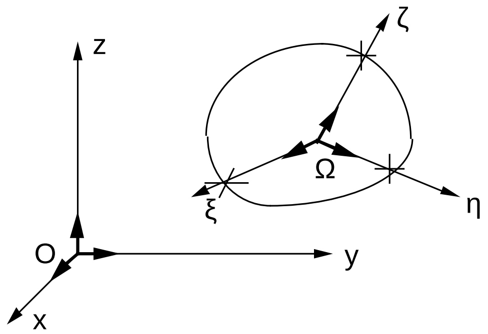

Figura CR. 5: terna solidale con un corpo rigido

Risulta chiaro, allora, che per conoscere il moto di tutti i punti di un corpo rigido, ovvero dello spazio solidale con il corpo rigido, basta conoscere il moto di *tre punti* non allineati: infatti due punti individuano una retta solidale e il terzo punto non allineato permette di individuare un piano solidale; ma dato un piano e stabiliti su di esso due assi cartesiani ortogonali resta identificato anche il terzo asse della terna, ortogonale ai primi due, e quindi un sistema solidale di tre assi.

Ora, per individuare *tre punti* occorrono *nove variabili* (tre coordinate per ogni punto); ma queste *nove variabili* non sono tra loro indipendenti, dal momento che le coordiniate dei tre punti devono soddisfare alle *tre condizioni di rigidità*, per le tre coppie di punti che con tre punti si possono identificare. Dunque tre delle nove incognite si possono esprimere in funzione delle restanti sei variabili, grazie alla condizione di rigidità. Solo *sei* delle nove variabili di partenza sono variabili indipendenti. Dunque il moto di un corpo rigido viene ricondotto, grazie alla condizione di rigidità ad un problema a *sei incognite*, o come si dice abitualmente, ad un problema a *sei gradi di libertà* (anticipiamo fin da ora che, in generale, chiameremo *gradi di libertà* le variabili indipendenti che individuano istante per istante, in maniera univoca, la configurazione di un sistema).

Si comprende facilmente che di questi sei gradi di libertà *tre* sono le coordinate di un punto qualunque del corpo rigido (parametri di traslazione), che viene scelto come origine di un sistema solidale e *tre* servono ad individuare la matrice di rotazione che porta i versori del sistema solidale $\{\boldsymbol{e}_i\}$ sui versori del sistema dell'osservatore $\{\boldsymbol{c}_i\}$.

Allora per individuare i punti di un corpo rigido scriveremo:

$$OP = O\Omega + \Omega P$$

e rappresenteremo:

$$\Omega P = \xi_k \boldsymbol{e}_k \tag{CR.14}$$

sulla base solidale, rispetto alla quale le coordinate dei punti sono costanti. Quindi possiamo scrivere:

$$OP = O\Omega + \xi_k \boldsymbol{e}_k \tag{CR.15}$$

Adesso introduciamo la matrice di rotazione $\underset{\sim}{R}$ che lega i versori della base solidale con quelli della base dell'osservatore del moto:

$$\boldsymbol{e}_k = \underset{\sim}{R}\, \boldsymbol{c}_k \tag{CR.16}$$

Sostituendo infine nella (CR.15) otteniamo:

$$OP = O\Omega + \xi_k \underset{\sim}{R}\, \boldsymbol{c}_k \tag{CR.17}$$

E proiettando sugli assi dell'osservatore del moto otteniamo le coordinate dei punti del corpo rigido in termini delle coordinate di Ω (parametri di traslazione) e degli elementi della matrice di rotazione $\underset{\sim}{R}$ (parametri di rotazione):

$$x_i = x_{\Omega i} + R_{ik}\xi_k \tag{CR.18}$$

Osserviamo che una matrice di rotazione possiede *nove* elementi, ma di questi solamente *tre* sono indipendenti: infatti gli elementi di una matrice di rotazione sono soggetti alle relazioni:

$$R_{ij}R_{kj} = \delta_{ik} \tag{CR.19}$$

che garantiscono che la matrice sia ortogonale. Queste relazioni sono *sei* essendo la condizione (CR.19) simmetrica negli indici ik, dunque rimangono *tre* elementi di matrice indipendenti.

Noti i sei gradi di libertà in funzione del tempo le (CR.17), o equivalentemente le (CR.18) forniscono le equazioni del moto in forma vettoriale e, rispettivamente, cartesiana del moto di un corpo rigido. Notiamo che se il corpo non fosse rigido le variabili ξ_k non sarebbero costanti, e le R_{ik} non sarebbero gli elementi di una matrice di rotazione.

Velocità angolare e formule di Poisson

La legge di trasformazione (CR.17) equivalente alla (CR.18) rappresenta una rototraslazione degli assi solidali rispetto all'osservatore, per cui ci dice che il moto di un corpo rigido si presenta come una traslazione combinata con una rotazione. Ora vogliamo vedere che legame c' è fra le velocità dei punti di un corpo rigido, in conseguenza della legge di rototraslazione (CR.17).

Ponendoci nel sistema dell'osservatore e derivando la (CR.17) rispetto al tempo abbiamo:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \xi_k \frac{d\boldsymbol{e}_k}{dt} \tag{CR.20}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che le ξ_k sono costanti.

Introducendo le velocità di P e di Ω:

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{dP}{dt}, \qquad \boldsymbol{v}_\Omega = \frac{d\Omega}{dt} \tag{CR.21}$$

otteniamo un legame fra le due velocità:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega + \xi_k \frac{d\boldsymbol{e}_k}{dt} \tag{CR.22}$$

Per ognuno dei versori degli assi solidali, in conseguenza delle condizioni di normalizzazione:

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = 1, \qquad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = 1, \qquad \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 1$$

segue, derivando rispetto al tempo:

$$\boldsymbol{e}_1 \times \frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} = 0, \qquad \boldsymbol{e}_2 \times \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} = 0, \qquad \boldsymbol{e}_3 \times \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} = 0$$

Ma allora, per le proprietà note dal calcolo vettoriale, devono esistere tre vettori $\boldsymbol{\omega}^{(i)}, i = 1, 2, 3$ tali che:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} \wedge \boldsymbol{e}_1$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} \wedge \boldsymbol{e}_2$$

$$\frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} = \boldsymbol{\omega}^{(3)} \wedge \boldsymbol{e}_3$$

In forma più sintetica riscriviamo:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^{(i)} \wedge \boldsymbol{e}_i \tag{CR.23}$$

relazione nella quale non c' è somma sull' indice, come è indicato dal fatto che l'indice di $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ è stato messo fra parentesi. Si noti che l' i-esima componente di ciascun vettore $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ rimane indeterminata.

Se poco fa abbiamo utilizzato le relazioni di normalizzazione per i versori della base solidale, ora sfruttiamo le condizioni di ortogonalità:

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = 0, \qquad i \neq j$$

Derivandole rispetto al tempo ricaviamo:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} \times \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \times \frac{d\boldsymbol{e}_j}{dt} = 0$$

Eliminando le derivate tramite la (CR.23) arriviamo alla:

$$\boldsymbol{\omega}^{(i)} \wedge \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{\omega}^{(j)} \wedge \boldsymbol{e}_j = 0$$

Scambiando l'ordine del prodotto scalare e del prodotto vettoriale e raccogliendo abbiamo:

$$\left[\boldsymbol{\omega}^{(i)} - \boldsymbol{\omega}^{(j)}\right] \times \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = 0 \tag{CR.24}$$

Ricordiamo dal calcolo vettoriale [cfr. (AL.6)] che:

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{CR.25}$$

Perciò segue, sostituendo nella (CR.24):

$$\varepsilon_{ijk}\left[\boldsymbol{\omega}^{(i)}-\boldsymbol{\omega}^{(j)}\right]\times\boldsymbol{e}_k=0 \tag{CR.26}$$

Scrivendola per esteso riusciamo ad interpretare meglio la (CR.26):

$$\begin{cases}\left[\boldsymbol{\omega}^{(1)}-\boldsymbol{\omega}^{(2)}\right]\times\boldsymbol{e}_3=0\\[2ex]\left[\boldsymbol{\omega}^{(2)}-\boldsymbol{\omega}^{(3)}\right]\times\boldsymbol{e}_1=0\\[2ex]\left[\boldsymbol{\omega}^{(3)}-\boldsymbol{\omega}^{(1)}\right]\times\boldsymbol{e}_2=0\end{cases} \tag{CR.27}$$

Relazioni che significano che sono nulle le componenti dei vettori entro parentesi quadra di indice corrispondente a quello del versore fuori parentesi. E cioè:

$$\begin{cases}{\boldsymbol{\omega}^{(1)}}_3={\boldsymbol{\omega}^{(2)}}_3\\[2ex]{\boldsymbol{\omega}^{(2)}}_1={\boldsymbol{\omega}^{(3)}}_1\\[2ex]{\boldsymbol{\omega}^{(3)}}_2={\boldsymbol{\omega}^{(1)}}_2\end{cases} \tag{CR.28}$$

Come si vede, per ognuno dei vettori $\omega^{(i)}$ resta non soggetta a condizioni solo una componente: quella che porta lo stesso indice che identifica il vettore, cioè ${\omega^{(i)}}_i$.

Ora nulla vieta di giocare sull'arbitrarietà di questa componente e sceglierla in modo da completare il quadro delle relazioni (CR.28) nel modo seguente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}^{(1)}{}_3 = \boldsymbol{\omega}^{(2)}{}_3 = \boldsymbol{\omega}^{(3)}{}_3 \\ \\ \boldsymbol{\omega}^{(2)}{}_1 = \boldsymbol{\omega}^{(3)}{}_1 = \boldsymbol{\omega}^{(1)}{}_1 \\ \\ \boldsymbol{\omega}^{(3)}{}_2 = \boldsymbol{\omega}^{(1)}{}_2 = \boldsymbol{\omega}^{(2)}{}_2 \end{cases} \tag{CR.29}$$

Ma queste relazioni equivalgono a dire che esiste un vettore unico tale che:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \boldsymbol{\omega}^{(3)} \tag{CR.30}$$

Questo vettore è un vettore caratteristico del moto del corpo rigido nel suo insieme e non dipende dal punto del corpo. Esso prende il nome di vettore *velocità angolare.*

Ora sostituendo l'informazione (CR.30) nelle relazioni (CR.23) che esprimono le derivate dei versori otteniamo le relazioni fondamentali per il moto del corpo rigido:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_i} \tag{CR.31}$$

che prendono il nome di *formule di Poisson.*

Da queste relazioni possiamo ottenere un'espressione esplicita per il vettore *velocità angolare* prendendo il prodotto vettoriale con $\boldsymbol{e}_i$ di entrambi i membri delle (CR.31) e ricordando che gli indici ripetuti si intendono sommati da 1 a 3. Abbiamo:

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \boldsymbol{e}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i = 3\boldsymbol{\omega} - \omega_i \boldsymbol{e}_i = 2\boldsymbol{\omega}$$

E quindi:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{e}_i \wedge \frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} \qquad \text{(CR.32)}$$

essendo sottintesa la somma su i.

Questa relazione caratterizza la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ in termini dei versori della base solidale. E' legittimo domandarsi se, cambiando la scelta della base solidale, l'espressione che fornisce la velocità angolare rimanga la stessa. La risposta è senz'altro affermativa dal momento che non abbiamo fatto alcuna ipotesi sulla scelta della base solidale, tuttavia possiamo fare una verifica diretta. Pensiamo di scegliere una base solidale differente, che denotiamo con $\{\boldsymbol{e}'_i\}$. Ora i vecchi versori di base $\boldsymbol{e}_i$ si possono esprimere sulla nuova base, mediante una relazione del tipo:

$$\boldsymbol{e}_i = \alpha_{ik}\boldsymbol{e}'_k$$

dove le α_{ik} rappresentano le componenti dei vecchi versori rispetto alla nuova base. Questa scrittura ci dice semplicemente una cosa ovvia, e cioè che i vecchi versori si possono esprimere come combinazione lineare dei nuovi.

Dovendo sussistere le condizioni di ortonormalizzazione di entrambe le basi, avremo che:

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k = \delta_{ik}, \qquad \boldsymbol{e}'_i \times \boldsymbol{e}'_k = \delta_{ik}$$

Di conseguenza risulterà:

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \alpha_{ik}\boldsymbol{e}'_k \times \alpha_{jl}\boldsymbol{e}'_l = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\boldsymbol{e}'_k \times \boldsymbol{e}'_l = \alpha_{ik}\alpha_{jk}$$

e cioè:

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij} \tag{CR.33}$$

relazione che ci dice che i coefficienti α_{ik} rappresentano gli elementi di una matrice di rotazione. Ora, andando a calcolare esplicitamente $\boldsymbol{\omega}$ abbiamo:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{e}_i \wedge \frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \frac{1}{2}\,\alpha_{ij}\boldsymbol{e}'_j \wedge \frac{d}{dt}(\alpha_{ik}\boldsymbol{e}'_k)$$

Ma i coefficienti α_{ik} sono indipendenti dal tempo, in quanto legano fra loro due basi solidali con il corpo rigido, e quindi anche solidali fra loro, per cui l'una vede l'altra costante nel tempo. Allora possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\alpha_{ij}\alpha_{ik}\boldsymbol{e}'_j \wedge \frac{d\boldsymbol{e}'_k}{dt}$$

E grazie alla (CR.33) segue subito:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{e}'_i \wedge \frac{d\boldsymbol{e}'_i}{dt}$$

Dunque anche rispetto alla nuova base solidale il vettore velocità angolare viene identificato dalla stessa espressione. Notiamo ancora che il vettore velocità angolare risulta del tutto indipendente dall'origine Ω degli assi solidali, che non figura nella (CR.32). La velocità angolare appare legata, perciò solamente ai termini di rotazione e non a quelli di traslazione del corpo rigido.

Legge di distribuzione delle velocità

A questo punto siamo in grado di riprendere la relazione (CR.22) sostituendo in essa le *formule di Poisson* e ottenendo la relazione che lega le velocità di due punti del corpo rigido:

$$\boxed{\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P} \tag{CR.34}$$

Questa relazione fondamentale nella cinematica rigida è nota come *legge di distribuzione delle velocità.* Essa lega le velocità di due punti qualsiasi del corpo rigido. Il fatto che Ω possa coincidere con l'origine di un sistema solidale non entra in gioco e non ha nessuna influenza perchè ogni punto del corpo rigido può essere pensato origine di un sistema solidale. In ogni caso è immediato ottenere esplicitamente il legame fra le velocità di due punti del corpo rigido A e B differenti da Ω. Abbiamo dalla legge di distribuzione:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega A$$

Inoltre anche:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega B$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni segue:

$$\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega A - \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega B$$

Ovvero:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \wedge BA$$

E cioè proprio la stessa legge di distribuzione per i due punti A e B.

Ci accorgiamo poi subito di due cose:

— la prima consiste nel fatto che i vettori velocità dei punti di un corpo rigido costituiscono un esempio (il primo che incontriamo) di *vettori applicati* in quanto dipendono dal punto considerato e cambiano al cambiare del punto;

— la seconda sta in una evidente analogia fra la legge di distribuzione delle velocità dei punti di un corpo rigido e la legge di distribuzione dei momenti (VA.8) che abbiamo visto nella teoria dei vettori applicati. Anche se il significato delle grandezze è diverso perchè le velocità non nascono come dei momenti risultanti, tuttavia, dal punto di vista formale le relazioni sono identiche: le velocità prendono il posto dei momenti e la velocità angolare prende il posto del risultante. In seguito questa analogia ci permetterà di trarre importanti conseguenze.

Derivata di un vettore solidale

Come conseguenza della *legge di distribuzione delle velocità* è facile ottenere la formula per la derivata di un vettore solidale con un corpo rigido, cioè di un vettore che congiunge due punti dello spazio solidale con il corpo.

Siano A e B due punti dello spazio solidale con il corpo rigido, cosicchè:

$$\boldsymbol{W} = AB$$

risulta essere un vettore solidale al corpo. Allora si ha; derivando rispetto al tempo:

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \frac{dAB}{dt} = \frac{d}{dt}(OB - OA) = \frac{dB}{dt} - \frac{dA}{dt} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$$

Applicando la legge di distribuzione delle velocità fra i punti A e B abbiamo allora:

$$\frac{d\boldsymbol{W}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{W} \qquad \text{(CR.35)}$$

Moto rigido

Abbiamo definito il corpo rigido e abbiamo determinato la legge di distribuzione delle velocità in un corpo rigido. Ora introduciamo anche la definizione di *moto rigido* e la commentiamo:

Il moto di un sistema di punti si dice rigido quando mantiene costanti le distanze mutue di tutti i punti del sistema

In altri termini un moto si chiama rigido quando soddisfa sempre la condizione di rigidità. E' evidente che un corpo rigido può muoversi solamente di moto rigido, tuttavia un corpo deformabile, cioè non rigido, può compiere, fra tutti i moti che gli sono possibili, anche quella particolare classe di moti che sono i moti rigidi. Pensiamo, intuitivamente ad una palla di stucco che venga spostata senza essere deformata durante il moto: tutte le distanze fra le particelle che la costituiscono rimangono inalterate durante il moto.

Per i moti rigidi valgono, di conseguenza tutti i risultati che abbiamo dedotto per il moto del corpo rigido. Per questo in seguito parleremo, più in generale di *moti rigidi* anzichè di moti di un corpo rigido.

Classificazione dei moti rigidi

Procediamo ora ad una classificazione dei moti rigidi specializzando per ogni caso i risultati generali esposti finora.

a. moto traslatorio

Un moto rigido si dice traslatorio quando, durante il moto, ogni retta solidale al corpo si mantiene parallela a se stessa

In particolare, se il moto è traslatorio, si manterranno paralleli a se stessi gli assi di ogni sistema solidale: è conveniente, allora, scegliere la terna solidale in modo che i suoi assi siano paralleli a quelli della terna dell'osservatore, perchè durante il moto si manterranno sempre paralleli.

Ciò significa che nelle relazioni (CR.17) e (CR.18) la matrice di rotazione risulta essere l'*identità*:

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{I} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R_{ik} = \delta_{ik} \tag{CR.36}$$

in modo che la trasformazione delle coordinate dal sistema solidale a quello dell'osservatore sia una *traslazione* degli assi:

$$x_i = x_{\Omega i} + \xi_i \tag{CR.37}$$

In queste relazioni le ξ_i sono costanti, per la condizione di rigidità: rimangono perciò, come variabili, le *tre* funzioni del tempo:

$$x_{\Omega i} = x_{\Omega i}(t)$$

che rappresentano i *tre gradi di libertà* che caratterizzano il moto traslatorio.

In notazione vettoriale lo stesso risultato si può rappresentare tenendo conto che la (CR.36) comporta:

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{c}_i \tag{CR.38}$$

Dunque i versori della base solidale non ruotano rispetto a quelli della base dell'osservatore; quindi la (CR.17) diventa:

$$OP = O\Omega + \xi_k \boldsymbol{c}_k \tag{CR.39}$$

relazione che traduce in forma simbolica l'equazione indiciale (CR.37).

Queste sono le equazioni che forniscono le coordinate, ovvero i vettori posizione, che caratterizzano il moto traslatorio. Vediamo adesso quali informazioni ne conseguono per le velocità.

Se deriviamo rispetto al tempo la (CR.39), tenendo conto che il secondo addendo a secondo membro è costante, otteniamo:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega \tag{CR.40}$$

Questa relazione ci dice che, se il moto è traslatorio, tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità, che coincide quindi con la velocità dell'origine del sistema solidale. Nel caso del moto traslatorio questa velocità, comune a tutti i punti del corpo, viene detta velocità del corpo: questo è l'unico caso in cui si può parlare di velocità di un corpo rigido. In tutti gli altri casi, come vedremo, i punti del corpo hanno velocità differenti fra loro e non avrebbe quindi alcun senso parlare di velocità del corpo.

Dalla (CR.38), derivando rispetto al tempo, segue poi:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{CR.41}$$

e quindi grazie alle *formule di Poisson* (CR.31) otteniamo:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{CR.42}$$

Ma $\boldsymbol{\omega}$ non può essere contemporaneamente parallelo a tre vettori linearmente indipendenti dello spazio, per cui necessariamente segue che, quando il moto è traslatorio, la velocità angolare è nulla:

$$\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{CR.43}$$

L'annullarsi di $\boldsymbol{\omega}$ costituisce una condizione necessaria e sufficiente perchè il moto sia traslatorio, infatti abbiamo visto che la condizione è necessaria, ma è vero anche il viceversa: se $\boldsymbol{\omega}$ è nullo, grazie alle formule di Poisson segue subito che i tre versori solidali sono invariabili e quindi il moto è traslatorio. D'altra parte la (CR.43) inserita nella legge di distribuzione delle velocità (CR.34) dà subito la (CR.40). Notiamo, infine, che il risultato (CR.43) si ottiene anche confrontando la (CR.40) con la legge di distribuzione (CR.34) e tenendo conto dell'arbitrarietà del punto P.

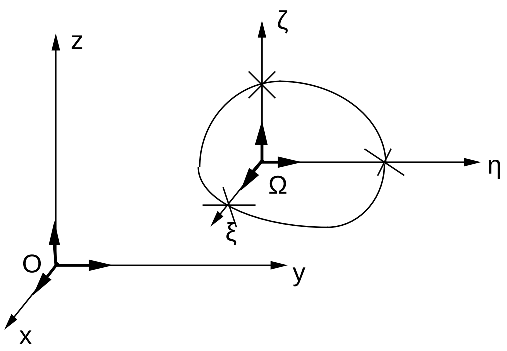

Figura CR. 6: moto traslatorio

b. moto rototraslatorio

Un moto rigido si dice rototraslatorio quando esiste almeno una retta solidale al corpo che, durante il moto, si mantiene parallela a se stessa

Nel caso del moto rototraslatorio si richiede che esista almeno *una retta* che si mantiene parallela a se stessa durante il moto. Evidentemente il moto traslatorio costituisce un caso particolare di moto rototraslatorio, in quanto tutte (e sono infinite) le rette solidali si muovono parallelamente a se stesse.

In questo caso conviene scegliere la terna solidale con uno degli assi, per esempio $\xi_3 \equiv \zeta$ coincidente con questa retta, in modo che risulti:

$$\boldsymbol{e}_3 = costante \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} = 0 \tag{CR.44}$$

Dalle formule di Poisson (CR.31) segue allora:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_3 = 0 \tag{CR.45}$$

ovvero $\boldsymbol{\omega}$ parallelo a $\boldsymbol{e}_3$ oppure nullo, cioè:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega' \boldsymbol{e}_3 \tag{CR.46}$$

dove:

$$\omega' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_3 = \pm\, |\boldsymbol{\omega}| \tag{CR.47}$$

dove il segno positivo o negativo dipende dal senso di rotazione. Osserviamo che questo risultato ci dice che la velocità angolare risulta essere parallela alla retta che si muove parallelamente a se stessa. E' conveniente, poi, scegliere gli assi del sistema dell'osservatore in modo che l'asse $x_3 \equiv z$ sia parallelo all'asse solidale $\xi_3 \equiv \zeta$ e quindi si abbia:

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{c}_3 \tag{CR.48}$$

Allora, grazie alle relazioni di ortonormalizzazione dei versori, risulta anche:

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{c}_3 = 0, \qquad \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{c}_3 = 0 \tag{CR.49}$$

Di conseguenza la rotazione del corpo avviene attorno alla retta solidale parallela ad $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{c}_3$. E' facile, a questo punto ricavare gli elementi della matrice di rotazione $\underset{\sim}{R}$ da introdurre nelle (CR.17). Denotiamo con ϑ l'angolo fra i versori $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{c}_1$: allora abbiamo, per gli elementi di matrice definiti da:

$$R_{ik} = \boldsymbol{c}_i \times \underset{\sim}{R}\, \boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{c}_i \times \boldsymbol{e}_k$$

$$\begin{array}{lll} R_{11} = \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = cos\vartheta, & R_{12} = \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -sen\vartheta, & R_{13} = 0 \\ R_{21} = \boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = sen\vartheta, & R_{22} = \boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = cos\vartheta, & R_{23} = 0 \\ R_{31} = 0, & R_{32} = 0, & R_{33} = 1 \end{array} \tag{CR.50}$$

Dunque la matrice di rotazione si scrive:

$$\underset{\sim}{R} \equiv \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sen\vartheta & 0 \\ sen\vartheta & cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{CR.51}$$

A questo punto le relazioni (CR.18) si scrivono:

$$\begin{cases} x_1 = x_{\Omega 1} + \xi_1 cos\vartheta - \xi_2 sen\vartheta \\ \\ x_2 = x_{\Omega 2} + \xi_1 sen\vartheta + \xi_2 cos\,\vartheta \\ \\ x_3 = x_{\Omega 3} + \xi_3 \end{cases} \tag{CR.52}$$

Queste sono le coordinate dei punti del corpo rigido quando il moto e rototraslatorio: le variabili funzioni del tempo sono in questo caso quattro:

$$x_{\Omega i} = x_{\Omega i}(t), \qquad i = 1, 2, 3; \qquad \vartheta = \vartheta(t)$$

Dunque il moto rototraslatorio è caratterizzato da *quattro gradi di libertà.*

Per quanto riguarda la velocità angolare, possiamo dedurla mediante la (CR.32), partendo dai versori della base solidale le cui componenti sono date dalle colonne della matrice $\underset{\sim}{R}$ e valgono:

$$\boldsymbol{e}_1 \equiv (cos\vartheta, sen\vartheta, 0), \qquad \boldsymbol{e}_2 \equiv (-sen\vartheta, cos\vartheta, 0), \qquad \boldsymbol{e}_3 \equiv (0, 0, 1)$$

Da queste si ricava facilmente:

$$\frac{d\boldsymbol{e}_1}{dt} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2, \qquad \frac{d\boldsymbol{e}_2}{dt} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_1, \qquad \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} = 0$$

Quindi tenendo conto della (CR.48) si arriva alla velocità angolare:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\,\boldsymbol{c}_3 \tag{CR.53}$$

Questo risultato inserito nella legge di distribuzione delle velocità (CR.34) ci dà la distribuzione delle velocità per il moto rototraslatorio:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega + \dot{\vartheta}\, \boldsymbol{c}_3 \wedge \Omega P \qquad \text{(CR.54)}$$

E' immediato verificare che se si considerano due punti dell'asse $\xi_3 \equiv \zeta$, retta che trasla parallelamente a se stessa e a $\boldsymbol{c}_3$, si ha semplicemente:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega$$

in quanto il prodotto vettoriale di due vettori paralleli si annulla.

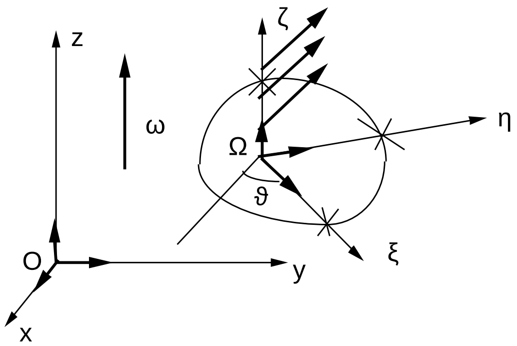

Figura CR. 7: moto rototraslatorio

c. moto elicoidale

Un moto rigido si dice elicoidale quando esiste una retta, solidale con il corpo, i cui punti hanno velocità parallela alla retta stessa

Si comprende subito che, data la condizione di rigidità la velocità di tutti i punti della retta che scorre su se stessa deve essere identica, in quanto coincide con la velocità di scorrimento della retta. Dunque la retta in questione *trasla* su se stessa: per cui il *moto elicoidale* risulta essere un caso particolare di moto rototraslatorio.

In questo caso, facendo coincidere questa retta con l'asse $\xi_3 \equiv \zeta$ la traslazione della retta avviene parallelamente al versore $\boldsymbol{e}_3$. Conviene, poi, scegliere l'asse $x_3 \equiv z$ della terna dell'osservatore sovrapposto con $\xi_3 \equiv \zeta$ in maniera che l'origine Ω del riferimento solidale venga a scorrere lungo l'asse $x_3 \equiv z$. In questo modo risulta:

$$x_{\Omega_1} = 0, \qquad x_{\Omega_2} = 0$$

Perciò le equazioni del moto rototraslatorio (CR.52) vengono a specializzarsi, per il moto elicoidale, nelle seguenti:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 cos\vartheta - \xi_2 sen\vartheta \\ \\ x_2 = \xi_1 sen\vartheta + \xi_2 cos\,\vartheta \\ \\ x_3 = x_{\Omega 3} + \xi_3 \end{cases} \tag{CR.55}$$

Da queste relazioni si riconosce che il moto elicoidale ha *due gradi di libertà* rappresentati dalle funzioni del tempo:

$$x_{\Omega 3} = x_{\Omega 3}(t), \qquad \vartheta = \vartheta(t)$$

La velocità angolare mantiene sempre l'espressione (CR.53) che ha nel caso generale del moto rototraslatorio e la distribuzione delle velocità si specializza nella forma:

$$\boldsymbol{v}_P = \tau \boldsymbol{c}_3 + \dot{\vartheta}\, \boldsymbol{c}_3 \wedge \Omega P \tag{CR.56}$$

dove:

$$\tau = \boldsymbol{v}_{\Omega} \times \boldsymbol{c}_3 = \pm |\boldsymbol{v}_{\Omega}| \tag{CR.57}$$

Allora se consideriamo un punto P della retta che scorre su se stessa abbiamo subito che la sua velocità è data da:

$$\boldsymbol{v}_P = \tau \boldsymbol{c}_3$$

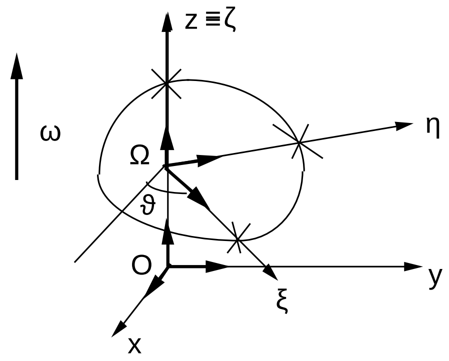

Figura CR. 8: moto elicoidale

d. moto rotatorio

Un moto rigido si dice rotatorio quando esiste una retta solidale con il corpo i cui punti hanno velocità nulla

Il *moto rotatorio* viene a costituire, per come è stato definito, un caso particolare di moto elicoidale: in questo caso la retta scorrevole su se stessa $\xi_3 \equiv \zeta$ è addirittura fissa, per cui risulta:

$$x_{\Omega_3} = costante$$

e possiamo prendere le origini delle due terne cartesiane (quella dell' osservatore e quella solidale) coincidenti, in modo che risulti:

$$x_{\Omega_3} = 0$$

Ciò comporta nelle equazioni (CR.55) l'ulteriore specializzazione:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 cos\vartheta - \xi_2 sen\vartheta \\ x_2 = \xi_1 sen\vartheta + \xi_2 cos\,\vartheta \\ x_3 = \xi_3 \end{cases} \tag{CR.58}$$

Queste relazioni ci dicono che il moto rotatorio possiede un solo grado di libertà, costituito dall'angolo di rotazione del corpo attorno alla retta fissa:

$$\vartheta = \vartheta(t)$$

Per quanto riguarda la velocità angolare essa mantiene immutata l'espressione data dalla (CR.53), mentre l'espressione della velocità (CR.56) risulta ulteriormente specializzata per il fatto che per il moto rotatorio risulta:

$$\tau = 0 \tag{CR.59}$$

dal momento che la retta scorrevole è in questo caso fissa. Dunque si ha:

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{\vartheta}\,\boldsymbol{c}_3 \wedge \Omega P \tag{CR.60}$$

Se indichiamo con Q la proiezione del punto P sulla retta fissa del moto, alla quale si dà il nome di *asse di rotazione*, si può scrivere:

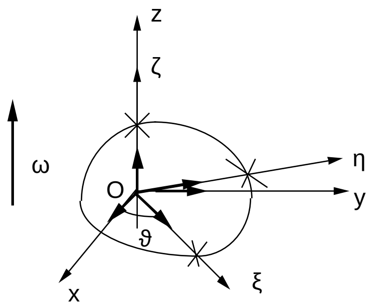

Figura CR. 9: moto rotatorio

$$\Omega P = \Omega Q + QP$$

e dal momento che ΩQ è parallelo all'asse di rotazione e quindi a $\boldsymbol{\omega}$ segue anche:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge QP \tag{CR.61}$$

Ma i vettori fattori di questo prodotto vettoriale sono fra loro ortogonali per definizione, quindi, i moduli sono legati dalla relazione:

$$|\boldsymbol{v}_P| = |\boldsymbol{\omega}|\,|QP|$$

Denotando poi:

$$|QP| = r$$

si ottiene l'usuale relazione:

$$v_P = \omega r \tag{CR.62}$$

Notiamo, ancora, che grazie alla relazione (CR.61) quando il moto è rotatorio il vettore velocità appartiene sempre al piano normale al vettore velocità angolare ed è tangente alla circonferenza di raggio r e centro Q giacente su questo piano, che rappresenta la traiettoria del punto P.

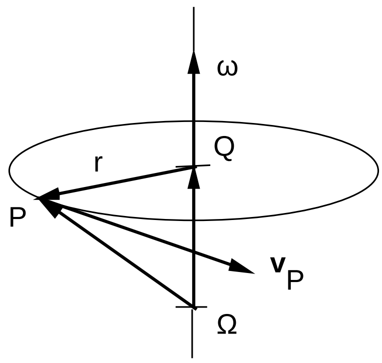

Figura CR. 10: velocità di un punto di un corpo rigido in moto rotatorio

e. moto di precessione

> *Un moto rigido si dice moto di precessione se esiste un punto dello spazio solidale che si mantiene fisso durante il moto e inoltre esiste una retta solidale con il corpo che ruota attorno ad una retta fissa rispetto all'osservatore, formando con essa un angolo costante*

La retta fissa rispetto all'osservatore prende il nome di *asse di precessione* e la retta solidale con il corpo che forma un angolo costante con essa si dice *asse di figura.*

E' utile, in questo caso, scegliere le origini Ω della terna solidale e O della terna dell'osservatore, coincidenti tra loro e nel punto fisso del moto. Identifichiamo, inoltre l'asse solidale $\xi_3 \equiv \zeta$ con l'*asse di figura* e l'asse $x_3 \equiv z$ con l'*asse di precessione.*

Allora, dalla definizione di *moto di precessione*, dovendo essere costante l'angolo fra gli assi $x_3 \equiv z$ e $\xi_3 \equiv \zeta$, ovvero fra i loro versori $\boldsymbol{c}_3$ e $\boldsymbol{e}_3$ deve risultare:

$$cos\vartheta = \boldsymbol{c}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = costante \qquad \text{(CR.63)}$$

Ovvero, derivando rispetto al tempo e tenendo conto del fatto che $\boldsymbol{c}_3$ è costante rispetto all'osservatore:

$$\boldsymbol{c}_3 \times \frac{d\boldsymbol{e}_3}{dt} = 0$$

Servendoci delle formule di Poisson (CR.31) segue allora:

$$\boldsymbol{c}_3 \times \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{e}_3 = 0 \qquad \text{(CR.64)}$$

condizione che comporta che i tre vettori sono fra loro complanari, o eventualmente $\boldsymbol{\omega}$ può essere nullo. Ma allora, se $\boldsymbol{\omega}$ appartiene al piano di $\boldsymbol{c}_3$ ed $\boldsymbol{e}_3$, si può esprimere come combinazione lineare di questi ultimi, cioè si può scrivere:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_p \boldsymbol{c}_3 + \omega_f \boldsymbol{e}_3 \qquad \text{(CR.65)}$$

dove gli scalari ω_p e ω_f rappresentano le componenti della velocità angolare lungo i due versori.

• Questo risultato si può commentare nel modo seguente: *in un moto di precessione la velocità angolare è costituita da due componenti, di cui una lungo l'asse di precessione e l'altra lungo l'asse di figura.* La prima componente, che abbiamo denotato con ω_p prende il nome di *velocità angolare di precessione* e la seconda, denotata con ω_f si dice *velocità angolare di rotazione propria.*

Viceversa se sussiste la (CR.65) si risale alla (CR.63) e si conclude che il moto è di precessione.

Un moto di precessione, poi, si dice *regolare* se ω_p e ω_f sono costanti.

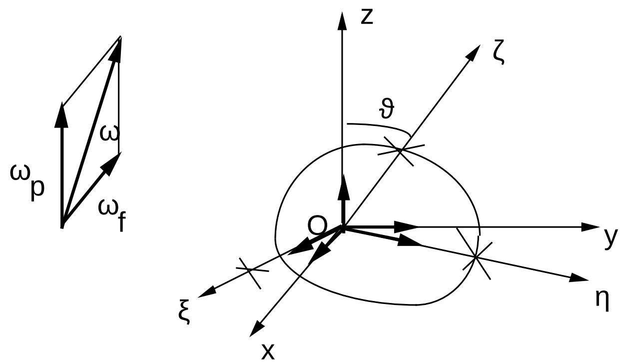

Figura CR. 11: moto di precessione

Accelerazione in un moto rigido

Derivando rispetto al tempo la legge di distribuzione delle velocità (CR.34) possiamo ottenere una *legge di distribuzione delle accelerazioni* in un moto rigido.

$$\boldsymbol{a}_P = \frac{d\boldsymbol{v}_P}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_\Omega}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \Omega P + \boldsymbol{\omega} \wedge \frac{d\Omega P}{dt}$$

Denotiamo per brevità:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

Ora tenendo conto che ΩP è un *vettore solidale*, utilizzando la relazione di derivazione di un vettore solidale (CR.35) abbiamo:

$$\frac{d\Omega P}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P$$

Sostituendo nell'espressione per il calcolo dell'accelerazione sopra ricavata abbiamo la *legge di distribuzione delle le accelerazioni*:

$$\boxed{\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \Omega P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P)} \tag{CR.66}$$

Supposto $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ possiamo decomporre ΩP in una componente parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ e in una normale ad $\boldsymbol{\omega}$:

$$\Omega P = \Omega Q + QP$$

dove con Q abbiamo indicato la proiezione di P sulla retta parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ e passante per Ω. In questo modo possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P = \boldsymbol{\omega} \wedge QP$$

dal momento che:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega Q = 0$$

essendo due vettori paralleli.

Allora tenendo conto della regola del doppio prodotto vettoriale, la (CR.66) si può sviluppare come:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P) = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge QP) = (\boldsymbol{\omega} \times QP)\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^2 QP$$

Essendo:

$$\boldsymbol{\omega} \times QP = 0$$

per come QP è stato definito segue:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P) = -\boldsymbol{\omega}^2 QP$$

Si ha allora la formulazione equivalente alla (CR.66) della legge di distribuzione delle accelerazioni:

$$\boxed{\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_\Omega + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \Omega P - \boldsymbol{\omega}^2 QP} \tag{CR.67}$$

Qualche commento. Osserviamo che nel caso che il moto sia rotatorio uniforme, e cioè:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$$

rimane solamente l' ultimo termine che viene detto *accelerazione centripeta.* Nel caso, poi, che sia nullo anche il vettore $\boldsymbol{\omega}$, caso che inizialmente era stato escluso per poter realizzare la decomposizione del vettore ΩP in una componente parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ e in una normale, notiamo che la (CR.67) ci dà lo stesso risultato della (CR.66), cioè:

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_\Omega$$

che è il caso del moto traslatorio. Concludiamo quindi che le due formule sono completamente equivalenti. E osserviamo anche che se il moto è traslatorio i punti del corpo possiedono la stessa accelerazione, che risulta di conseguenza uguale a quella dell'origine del sistema solidale, e quindi, si può parlare di accelerazione del corpo.

Legge di distribuzione degli spostamenti

Rimane ancora da stabilire la *legge di distribuzione degli spostamenti* compatibili con la condizione di rigidità: questa è una conseguenza diretta della legge di distribuzione delle velocità. Infatti la legge di distribuzione delle velocità (CR.34) si può scrivere in una forma in cui compaiono delle derivate rispetto al tempo, nel modo seguente:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P \tag{CR.68}$$

La scrittura (CR.68) si può rappresentare in maniera equivalente in termini di differenziali, e cioè:

$$dP = d\Omega + \boldsymbol{\omega}\, dt \wedge \Omega P \tag{CR.69}$$

che conduce immediatamente alla *legge di distribuzione degli spostamenti*:

$$\boxed{dP = d\Omega + d\boldsymbol{\psi} \wedge \Omega P} \tag{CR.70}$$

nella quale si è introdotto il vettore:

$$d\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega}\, dt \tag{CR.71}$$

Questo è un vettore diretto come la velocità angolare e il cui modulo rappresenta l'angolo di cui il corpo ruota rigidamente nell'intervallo di tempo elementare dt. Introdotto il versore della velocità angolare:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \tag{CR.72}$$

possiamo rappresentare $d\boldsymbol{\psi}$ in una forma in cui compare direttamente l'angolo:

$$d\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}\, d\vartheta \tag{CR.73}$$

dove:

$$d\vartheta = \boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{\psi} = \pm\, |d\boldsymbol{\psi}| \tag{CR.74}$$

è l'angolo infinitesimo di cui il corpo è ruotato nel tempo dt.

Angoli di Eulero

Nello studio del moto di un corpo rigido è utile, come vedremo in seguito, poter riferire il moto ad un osservatore la cui origine si trova in un punto dello spazio solidale con il corpo rigido. Si parla, in questo caso di *moto di un corpo rigido con un punto fisso.*

Possiamo scegliere, oltre al sistema di assi dell'osservatore anche una terna di assi solidali con il corpo rigido, anch'essa con origine nel punto fisso, per cui risulta $\Omega \equiv O$. Il moto di un corpo rigido con un punto fisso, essendo fissate le coordinate di Ω, cioè i tre gradi di libertà di traslazione, viene ad avere solamente i tre gradi di libertà di rotazione, che sono esprimibili mediante tre angoli.

Solitamente, fra le possibili terne di angoli che si possono scegliere, si utilizzano gli *angoli di Eulero* che sono definiti nel modo seguente:

— l'angolo ϑ compreso fra l'asse solidale ξ_3 e l'asse dell'osservatore x_3, detto *angolo di nutazione*;

— l'angolo φ compreso fra l'asse solidale ξ_1 e la retta di intersezione del piano $\xi_1\xi_2$ con il piano x_1x_2, retta che prende il nome di *linea dei nodi.* L'angolo φ viene detto *angolo di rotazione propria*;

— l'angolo ψ compreso fra la linea dei nodi e l'asse x_1, detto *angolo di precessione.*

La nomenclatura di questi angoli è legata, per ragioni storiche, all'astronomia, ai moti dei corpi celesti riferiti ad un osservatore la cui origine è posta nel centro del corpo.

Notiamo subito, per inciso, che qualora *l'angolo di nutazione* ϑ sia costante, il moto risulta essere un *moto di precessione* in cui la velocità angolare di rotazione propria è $\dot{\varphi}$ e la velocità angolare di precessione è $\dot{\psi}$. Risulta anche chiaro, allora, che un moto di precessione possiede due soli gradi di libertà, rappresentati dagli angoli φ e ψ.

In generale, invece, la velocità angolare del corpo rispetto all'osservatore, è caratterizzabile rispetto agli *angoli di Eulero* assegnati in funzione del tempo e alle loro derivate temporali, nella forma:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\,\boldsymbol{n} + \dot{\psi}\,\boldsymbol{c}_3 + \dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_3 \tag{CR.75}$$

dove il versore $\boldsymbol{n}$ è il versore della *linea dei nodi.*

I versori:

$$\{\boldsymbol{n},\, \boldsymbol{c}_3,\, \boldsymbol{e}_3\}$$

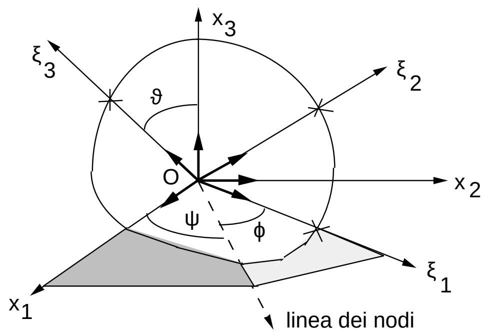

Figura CR. 12: angoli di Eulero

costituiscono una base non ortogonale dello spazio sulla quale è rappresentata la velocità angolare.

• Va sottolineato che occorre distinguere fra l'*osservatore* che vede il moto del corpo e il sistema di *assi cartesiani* sul quale si proiettano i vettori, quando si studia un determinato problema. Nel caso del moto di un corpo rigido è chiaro che il moto può essere osservato solamente da un osservatore non solidale con il corpo rigido; diversamente il corpo apparirebbe sempre immobile. Mentre le grandezze e le equazioni vettoriali in gioco non devono obbligatoriamente essere proiettate sugli assi della terna dell'osservatore $x_1x_2x_3$, ma possono essere proiettate su qualsiasi terna di assi, anche mobili rispetto all'osservatore, compresi gli assi solidali con il corpo rigido. Anzi in molti casi vedremo che è questa la scelta più conveniente.

Ad esempio, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che è il vettore velocità angolare, può essere proiettato sulla terna di assi solidali al corpo rigido $\xi_1\xi_2\xi_3$, che sono variabili rispetto all'osservatore. Per ragioni che appariranno chiare trattando la dinamica del corpo rigido è utile esprimere le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna solidale con il corpo rigido. Solitamente si usano le seguenti notazioni per la rappresentazione della velocità angolare sulla base solidale $\{\boldsymbol{e}_i\}$:

$$\boldsymbol{\omega} = p\,\boldsymbol{e}_1 + q\,\boldsymbol{e}_2 + r\,\boldsymbol{e}_3 \qquad \text{(CR.76)}$$

Le tre componenti p, q, r si possono esprimere come funzioni degli angoli di Eulero e delle loro derivate prime rispetto al tempo: per fare questo occorre confrontare la (CR.76) con la (CR.75) esprimendo i versori $\boldsymbol{c}_3$ ed $\boldsymbol{n}$ sulla base solidale $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

A questo scopo è conveniente considerare due basi *ortonormali* levogire ausiliarie; la prima definita come:

$$\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{c}_3 \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{c}_3\}$$

e la seconda data da:

$$\mathcal{B}_2 = \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_3\}$$

E' possibile passare dalla base $\mathcal{B}_1$ alla base $\mathcal{B}_2$ facendo compiere ai vettori una rotazione $\underset{\sim}{R}_1$ di un angolo ϑ attorno alla linea dei nodi. E' inoltre possibile passare dalla base $\mathcal{B}_2$ alla base solidale al corpo rigido compiendo una rotazione $\underset{\sim}{R}_2$ di un angolo φ attorno all'asse ξ_3.

Allora il legame fra $\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{c}_3$ si ha facendo compiere ad $\boldsymbol{e}_3$ prima la rotazione $\underset{\sim}{R}_1^T$ di un angolo $-\vartheta$ e poi la rotazione $\underset{\sim}{R}_2^T$ di un angolo $-\varphi$. Allo stesso modo si passa da $\boldsymbol{e}_1$ ad $\boldsymbol{n}$. Si ha cioè:

$$\boldsymbol{c}_3 = \underset{\sim}{R}_2^T \underset{\sim}{R}_1^T \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{n} = \underset{\sim}{R}_2^T \underset{\sim}{R}_1^T \boldsymbol{e}_1$$

Le matrici di rotazione sono date da:

$$\underset{\sim}{R}_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\vartheta & -sen\vartheta \\ 0 & sen\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Dopo aver eseguito la prima rotazione la seconda matrice va rappresentata sui nuovi assi, di cui l'asse delle ascisse è la linea dei nodi e si ha:

$$\underset{\sim}{R}_2 \equiv \begin{pmatrix} cos\varphi & -sen\varphi & 0 \\ sen\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eseguendo i calcoli otteniamo:

$$\underset{\sim}{R}_2^T \underset{\sim}{R}_1^T \equiv \begin{pmatrix} cos\varphi & cos\vartheta\, sen\,\varphi & sen\vartheta\, sen\,\varphi \\ -sen\varphi & cos\vartheta\, cos\,\varphi & sen\vartheta\, cos\,\varphi \\ 0 & -sen\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}$$

da cui la rappresentazione sulla base solidale di versori:

$$\boldsymbol{c}_3 = sen\vartheta\, sen\,\varphi\, \boldsymbol{e}_1 + sen\vartheta\, cos\,\varphi\, \boldsymbol{e}_2 + cos\vartheta\, \boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{n} = cos\varphi\, \boldsymbol{e}_1 - sen\varphi\, \boldsymbol{e}_2$$

Sostituendo queste informazioni nella (CR.75) abbiamo infine le espressioni delle componenti della velocità angolare rispetto agli assi solidali, in termini degli *angoli di Eulero* e delle loro derivate:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi}\, sen\vartheta\, sen\,\varphi + \dot{\vartheta}\, cos\varphi \\ q = \dot{\psi}\, sen\vartheta\, cos\varphi - \dot{\vartheta}\, sen\varphi \\ r = \dot{\psi}\, cos\vartheta + \dot{\varphi} \end{cases} \tag{CR.77}$$

Punti di vista lagrangiano ed euleriano

Quando si descrive il moto di un sistema, anche non rigido, si possono dare due approcci al problema.

— L'uno è detto *punto di vista lagrangiano* e consiste nel seguire, istante per istante, una particella del sistema individuandone accelerazione, velocità e posizione (quindi traiettoria e legge oraria del moto) in ogni istante di un *intervallo* di tempo finito.

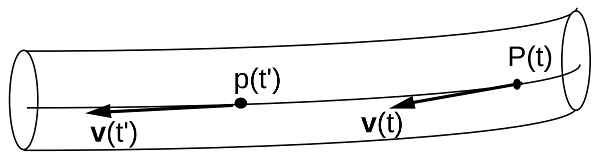

Figura CR. 13: punto di vista lagrangiano

Il *punto di vista lagrangiano* è detto anche *globale* perchè segue la singola particella per un tempo finito, nel suo moto. Il moto dell'intero sistema è conosciuto quando tutte le particelle vengono seguite istante per istante.

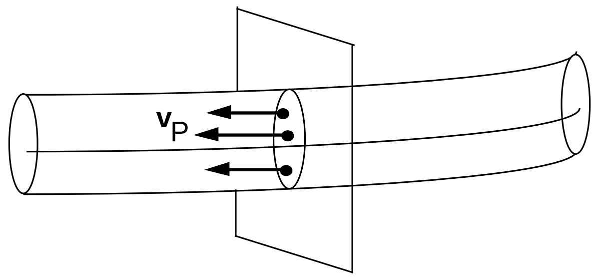

Figura CR. 14: punto di vista euleriano

— L'altro approccio è detto *punto di vista euleriano* e consiste nell'analizzare lo *stato* dell'intero sistema (e non più di una singola particella) in un *istante* fissato del tempo e non in un intervallo). A questo scopo si fissa uno *spazio di controllo* e si misurano nell'istante considerato le accelerazioni, le velocità e le posizioni delle particelle che transitano per lo spazio di controllo in quell'istante.

Si diranno *accelerazione euleriana* e *velocità euleriana* di un punto P l'accelerazione e la velocità della particella che, nell'istante considerato, transita per il punto P dello spazio di controllo.

Il punto di vista euleriano è detto anche *locale* in quanto lavora in un solo istante di tempo e non in un intervallo finito. Il moto del sistema, nel suo complesso è conosciuto quando si conoscono le informazioni relative allo spazio di controllo istante per istante. I due punti di vista risultano allora equivalenti.

Atto di moto

L'insieme dei vettori velocità (distribuzione delle velocità) euleriane, relative ad uno spazio di controllo e ad un certo istante di tempo, si dice atto di moto del sistema considerato

Quando si studia un moto rigido risulta particolarmente vantaggioso lavorare dal punto di vista euleriano, perchè si dispone di una legge di distribuzione per le velocità che lega le velocità di tutti i punti del corpo in un dato istante, cioè si può conoscere l'atto di moto conoscendo semplicemente la velocità di un punto del corpo e la velocità angolare relative quell'istante.

Un atto di moto si dice rigido quando la distribuzione delle velocità è descritta dalla legge di distribuzione delle velocità per i corpi rigidi.

Gli atti di moto rigidi si possono classificare in maniera analoga ai moti rigidi, servendosi della legge di distribuzione delle velocità.

Diremo che:

— un atto di moto si dice *traslatorio* quando tutti punti del corpo hanno, nell'istante considerato la stessa velocità:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega = \boldsymbol{\tau} \qquad \text{(CR.78)}$$

— un atto di moto si dice *rototraslatorio* quando esiste una retta solidale con il corpo i cui punti, nell'istante considerato, hanno la stessa velocità. In questo caso, scelto $\varOmega$ sulla retta, la legge di distribuzione si scrive:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\varOmega + \boldsymbol{\omega} \wedge \varOmega P = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega} \wedge \varOmega P \qquad \text{(CR.79)}$$

Ne viene di conseguenza che, se la velocità angolare non è nulla, la retta in questione risulta parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ in quanto, se P sta sulla retta si ha:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\tau} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{\omega} \wedge \varOmega P = 0$$

e quindi $\varOmega P$ parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$. Mentre se la velocità angolare è nulla si ha il caso particolare dell'atto di moto traslatorio;

— un atto di moto si dice *elicoidale* quando esiste una retta solidale con il corpo i cui punti, nell'istante considerato, hanno la stessa velocità e questa è parallela alla retta. In questo caso la legge di distribuzione si scrive:

$$\boldsymbol{v}_P = \tau\, \boldsymbol{e}_3 + \omega\, \boldsymbol{e}_3 \wedge \varOmega P \qquad \text{(CR.80)}$$

— Un atto di moto si dice *rotatorio* quando esiste una retta solidale con il corpo i cui punti, nell'istante considerato, hanno velocità nulla. La legge di distribuzione, se $\varOmega$ è scelto sulla retta fissa, si scrive:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \varOmega P \qquad \text{(CR.81)}$$

• Notiamo che l'atto di moto elicoidale è un caso particolare di atto di moto rototraslatorio; l'atto di moto rotatorio e l'atto di moto traslatorio sono casi particolari dell'atto di moto elicoidale. Inoltre ogni atto di moto elicoidale si può pensare come composizione di un atto di moto traslatorio e di un atto di moto rotatorio la cui velocità angolare è parallela alla traslazione.

Teorema di Mozzi

Come conseguenza della legge di distribuzione delle velocità (CR.34) si dimostra il teorema di Mozzi:

> *L'atto di moto rigido più generale è un atto di moto elicoidale*

DIMOSTRAZIONE A

Per la dimostrazione basta osservare che la legge di distribuzione delle velocità (CR.34):

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P$$

è formalmente identica alla legge di distribuzione dei momenti per un sistema di vettori applicati:

$$\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{M}_\Omega + P\Omega \wedge \boldsymbol{R}$$

dove al posto dei momenti si hanno le velocità e al posto del risultante si ha la velocità angolare e si tiene conto della anticommutatività del prodotto vettoriale.

Trattando dell'asse centrale, nella teoria dei vettori applicati, abbiamo dimostrato che, quando sussiste una legge di distribuzione di questo tipo, se $\boldsymbol{R}$ è non nullo, esiste una retta parallela ad $\boldsymbol{R}$ tale che il momento relativo ai punti di questa retta è parallelo ad $\boldsymbol{R}$ ed ha minimo modulo, o è nullo.

Se trasportiamo questo risultato nella cinematica del corpo rigido, sfruttando la dimostrazione già data, che può essere ripetuta passo per passo sostituendo i simboli della cinematica rigida, possiamo affermare che: se $\boldsymbol{\omega}$ è non nullo, esiste una retta parallela ad $\boldsymbol{\omega}$ tale che le velocità dei punti di questa retta sono parallele ad $\boldsymbol{\omega}$ e hanno minimo modulo. Ma se esiste una retta i cui punti hanno velocità parallela alla retta, ciò significa proprio che l'atto di moto è elicoidale, in accordo con il teorema di Mozzi.

Rimane da esaminare che cosa accade se $\boldsymbol{\omega}$ è nullo: in questo caso la legge di distribuzione delle velocità ci dice che:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_\Omega$$

e quindi l'atto di moto è traslatorio; ma l'atto di moto traslatorio è un caso particolare di atto di moto elicoidale, e allora, anche in questo caso il teorema di Mozzi è verificato.

DIMOSTRAZIONE B

In alternativa a questo modo di procedere, che ci riconduce ad un caso precedentemente esaminato, volendo, possiamo anche procedere alla dimostrazione del teorema di Mozzi in maniera diretta.

— *esistenza* - Ricerchiamo, se esiste, una retta i cui punti hanno velocità parallela alla velocità angolare, supposta questa non nulla (nel caso che sia nulla abbiamo già visto che l'atto di moto è traslatorio e il teorema è verificato). Allora imponiamo la condizione di parallelismo fra la velocità dei punti del corpo e la velocità angolare: ciò significa che deve esistere un parametro reale λ tale che:

$$\boldsymbol{v}_P = \lambda\,\boldsymbol{\omega} \tag{CR.82}$$

essendo $P \equiv (x_i)$ un punto variabile dello spazio. Grazie alla legge di distribuzione delle velocità la condizione di parallelismo precedente si riscrive:

$$\boldsymbol{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P = \lambda\, \boldsymbol{\omega} \qquad \text{(CR.83)}$$

Ora la (CR.83) è un'equazione vettoriale lineare, e perciò rappresenta una retta: dunque la retta cercata esiste.

Per quanto riguarda il parametro λ esso si può determinare prendendo il prodotto scalare della (CR.82) per $\boldsymbol{\omega}$ e ottenendo:

$$\mathcal{J} = \boldsymbol{v}_P \times \boldsymbol{\omega} = \lambda\, \boldsymbol{\omega}^2$$

Notiamo che l'espressione a primo membro è l'invariante e non dipende dalla scelta del punto P del corpo. Allora ricaviamo:

$$\lambda = \frac{\mathcal{J}}{\boldsymbol{\omega}^2}$$

— *unicità* - Facciamo ora vedere anche che la retta trovata è unica e non dipende dalla scelta del punto P. A questo scopo scegliamo un punto $P' \not\equiv P$: in questo caso l'equazione della retta si scriverà:

$$\boldsymbol{v}_\Omega + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P' = \lambda\, \boldsymbol{\omega} \qquad \text{(CR.84)}$$

Sottraendo membro a membro la (CR.84) e la (CR.83), tenendo conto che λ è lo stesso nelle due equazioni, otteniamo:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge PP' = 0$$

Essendo i due vettori non nulli per ipotesi risulta necessariamente PP' parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$ e di conseguenza P' appartiene alla retta per P parallela ad $\boldsymbol{\omega}$: dunque le due rette coincidono.

Abbiamo allora dimostrato che se la velocità angolare è non nulla esiste un'unica retta dello spazio i cui punti hanno velocità parallela alla velocità angolare e quindi alla retta stessa. Perciò l'atto di moto è elicoidale.

La retta che gode di questa proprietà prende il nome di *asse di Mozzi.*

Se si denota con $\boldsymbol{u}$ il versore della velocità angolare possiamo rappresentare l'atto di moto elicoidale nella forma:

$$\boldsymbol{v}_P = \tau\, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\omega} \wedge \Omega P$$

Prendendo ora il prodotto scalare con $\boldsymbol{\omega}$ si ricava l'espressione per τ in termini dell'invariante:

$$\tau = \frac{\mathcal{J}}{|\boldsymbol{\omega}|} \tag{CR.85}$$

Il vettore $\tau\, \boldsymbol{u}$ rappresenta la velocità dei punti dell'asse di Mozzi: nel caso particolare in cui $\tau = 0$ l'atto di moto è rotatorio e l'asse di Mozzi, i cui punti hanno velocità nulla prende il nome di *asse di istantanea rotazione.*

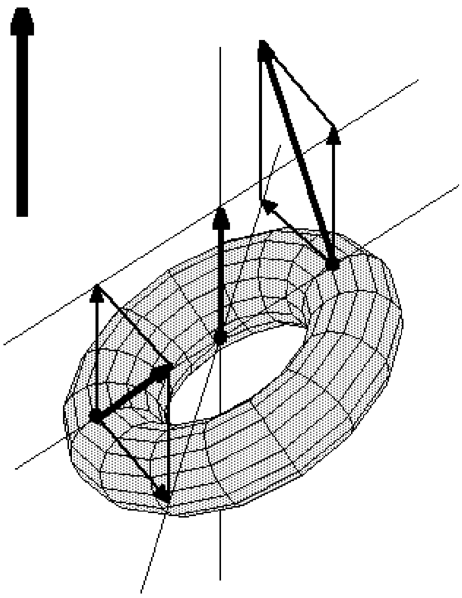
Figura CR. 15: asse di Mozzi