Ontologia formale – Dagli insiemi agli Enti

$$\text{Teoria formale} \left\{ \begin{array}{l} \text{Nozioni primitive} \\[1em] \text{Assiomi} \\[1em] \text{Teoremi} \end{array} \right] \ \text{Interpretazioni} \left\langle \begin{array}{l} \text{A – Insiemi \quad (insiemistica)} \\[1em] \text{B – Enti \quad (ontologia formale)} \end{array} \right.$$

- Assioma del rimpiazzamento:

– introduce nella Teoria il legame (definizione formale) tra un Insieme/Ente
e la Nozione universale (Forma in senso logico)

- Relazione secondaria $\longrightarrow$ Relazione primaria:

– introduce nella Teoria una legge che definisce la relazione (Forma logica)
= La relazione non è definita solo dai suoi Termini =

- Esistenza formale ($\boldsymbol{\sigma}^a$) $\longrightarrow$ Esistenza reale (Σ^a)

$$\bullet\ \text{Relazione di ordine} \longrightarrow \text{Relazione di Causalità} \left\langle \begin{array}{l} \text{univoca (stringhe allineate)} \\[1em] \text{analoga (stringhe incluse)} \end{array} \right.$$

Ontologia formale – Dagli insiemi agli Enti

A - Insiemi

Prime nozioni – Sono tre (Primitive?):

1. la nozione denotata con **Cls**,
2. la nozione denotata con **Ins**,
3. la nozione denotata con $\in$.

Per comodità si attribuisce un nome a ciascuna di queste nozioni; nome che fa già riferimento a quella che sarà l'interpretazione insiemistica che si dà usualmente della teoria, chiamando:

1. classe la prima nozione,
2. insieme la seconda,
3. e relazione di appartenenza la terza.

Questa è già un'interpretazione tacita della Teoria in termini di insiemi.

Per cui scrivendo:

1. Cls$(\boldsymbol{X})$, si intende che $\boldsymbol{X}$ è una classe;
2. Ins$(\boldsymbol{X})$, si intende che $\boldsymbol{X}$ è un insieme;
3. $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{Y}$ si intende che la classe $\boldsymbol{X}$ appartiene alla classe $\boldsymbol{Y}$.

Nella teoria – chiamata anche teoria "intuitiva" (o "ingenua") degli insiemi – per "classe" o "insieme" si intende proprio una collezione di oggetti di qualsiasi natura, ed è sulla base di tale interpretazione ontologica (nella quale gli enti sono degli aggregati) che si cerca di costruire una teoria che faccia da modello alle classi e agli insiemi.

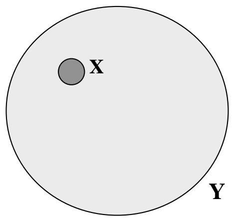


Fig. 1 - Interpretazione insiemistica della teoria *NBG*:
l'insieme $\boldsymbol{X}$ appartiene alla classe $\boldsymbol{Y}$ $(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{Y})$.

Mentre nella Teoria “astratta” una tale interpretazione, utile certamente nella fase euristica costruttiva della teoria, non entra in gioco nella sua formalizzazione e ha una funzione puramente psicologica, e in linea di principio può essere abbandonata o sostituita con eventuali interpretazioni alternative.

Per comodità si usa denotare con lettere maiuscole gli “enti” o “oggetti” della teoria chiamati “classi” e con lettere minuscole gli enti della teoria chiamati “insiemi”.

1. $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \cdots$ denotano classi;
2. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \cdots$ denotano insiemi.

Due domande

i) in che cosa si distinguono le classi dagli insiemi?

ii) e perché sia stata introdotta questa distinzione?

Alla prima domanda si risponde con i primi assiomi della teoria:

A.1. $\mathsf{Cls}(\boldsymbol{X})$,

A.2. $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{Y} \implies \mathsf{Ins}(\boldsymbol{X})$.

- Il primo assioma stabilisce che ogni insieme è una classe,
- mentre il secondo assioma dice che
  ogni classe che appartiene ad una classe è un insieme.

Questi primi assiomi lasciano lo spazio – che si rivelerà fondamentale – alla presenza, nella teoria, di classi che non sono insiemi.

Classe propria

Si dice classe propria ogni classe che non è un insieme. E si denota con Clp.
In simboli:

$$\mathsf{Clp}(\boldsymbol{X}) \stackrel{def}{=\!=} \neg\, \mathsf{Ins}(\boldsymbol{X}).$$

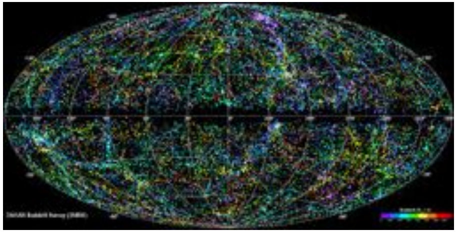
Quando risulti utile denoteremo le classi proprie con simboli calligrafici (come ad esempio $\mathcal{U}$ per la classe universale).

- Un insieme, dunque si distingue da una generica classe per il fatto di appartenere sempre ad una classe,
- mentre le classi proprie non appartengono mai ad una classe.

— Nell’interpretazione insiemistica possiamo pensare alle classi come ad aggregati di insiemi e alle classi “proprie” come ad aggregati che non possono essere collezionati da nessun aggregato.

— La nozione di classe propria non è intuitiva, perché non corrisponde alla nostra esperienza con gli aggregati fisici degli oggetti materiali con i quali siamo abituati a convivere, ma è corretta dal punto di vista logico.

— La nozione di classe propria consente di concepire un aggregato come l’universo che non ha un contenitore a cui appartenere, altrimenti non sarebbe l’universo.



Alla seconda domanda, sul perché Gödel abbia introdotto questa distinzione tra classi proprie e insiemi, si risponde che così egli ha rimosso le contraddizioni che nascono dai paradossi e, in particolare, dalla considerazione della classe universale o classe di tutti gli insiemi.

Senza una distinzione tra modi diversi di considerare gli "oggetti" (enti) della teoria, la sola compresenza in essa di:

- "oggetti" $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \cdots,$
- una "relazione binaria" tra oggetti $\in$,
- un "quantificatore universale" $\forall$ (per ogni),
- e dei primi assiomi della teoria NBG,

è già sufficiente a far comparire la contraddittorietà della nozione di "oggetto universale", cioè di un "oggetto"

$$\boldsymbol{u} \mid \forall\, \boldsymbol{x} \;:\; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{u}.$$

E ciò si verifica indipendentemente dall'interpretazione di $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}$ come "aggregati" e di $\in$ come "appartenenza" di $\boldsymbol{x}$ all'aggregato $\boldsymbol{u}$. La contraddizione nasce dalla richiesta che una relazione binaria sia soddisfatta da "tutti" gli "oggetti", di qualunque natura essi siano (aggregati o meno).

In effetti la contraddizione che emerge nella teoria intuitiva degli insiemi non è altro che un modo di manifestarsi della

- contraddittorietà del concetto univoco di ente
- definito come un genere universale

  già scoperta da Aristotele e ripresa da Tommaso.

Per eliminare tale contraddizione occorre richiedere che la classe universale non sia un "insieme" ($\boldsymbol{u}$) ma una classe "propria" ($\boldsymbol{\mathcal{U}}$).

Classe universale ($\boldsymbol{\mathcal{U}}$)

$$\mathrm{Clu}(\boldsymbol{\mathcal{U}}) \iff (\forall\, \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}).$$

Con la conseguenza che per definizione:

$$(\forall\, \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}) \implies \mathrm{Clp}(\boldsymbol{\mathcal{U}}),$$

così che non vi siano contraddizioni.

B - Enti - Interpretazione ontologica della Teoria

A questo punto siamo indotti a rietichettare le nozioni primitive della teoria.

– la prima nozione, che corrisponde in NBG a classe
la chiameremo ente, denotandola con Ens;

– la seconda nozione, che corrisponde a in NBG a insieme
la chiameremo entità, denotandola con Ent.

In che cosa si distinguono questi enti $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \cdots$ (le originarie classi di NBG) dalle entità $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \cdots$ (gli originari insiemi della NBG)?

Alla domanda si può cercare di rispondere reinterpretando i primi assiomi della teoria che, per ovvi motivi di allusione alla nostra interpretazione ontologica riscriveremo così:

A.1. $\quad \mathsf{Ens}(\boldsymbol{x})$,

A.2. $\quad \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{Y} \Longrightarrow \mathsf{Ent}(\boldsymbol{X})$.

– Il primo assioma stabilisce che: ogni entità è un ente;
– e il secondo assioma dice che: ogni ente che $\in$ un ente è un'entità.

?

Dobbiamo assegnare adesso una denominazione anche alla relazione primitiva $\in$ per rendere leggibili e interpretabili le nostre formule:

- potremmo impiegare ancora la dizione insiemistica appartiene a,
- o una più ampia come è in che anche in NBG viene spesso impiegata

ma dal punto di vista di un'ontologia non si limita a denotare la sola idea di elemento di un aggregato, pur non escludendola. (In futuro si possa trovare una dizione più appropriata).

In questo modo possiamo finalmente leggere l'assioma A.2 come[1]:

Ogni ente che è in un ente è un'entità

Ora è giunto il momento di reinterpretare la nozione di classe propria in quella di:

Ente proprio

Diremo ente proprio ogni ente che non è un'entità.

$$\text{Enp}(\boldsymbol{X}) \overset{def}{=\!=} \neg\,\text{Ent}(\boldsymbol{X}).$$

Alla domanda sul perché si debba introdurre questa distinzione tra enti propri ed enti impropri o entità, si risponde che con questa semplice ma geniale idea – che risale ad Aristotele e viene ripresa da Tommaso – si rimuove la contraddizione che nasce dalla considerazione del genere universale, o ente di tutti gli enti, definito univocamente.

Viene ad aprirsi, in questo modo la strada verso l'analogia entis – secondo cui "ente" si dice/attua in più modi – la cui necessità incomincia ad affiorare anche nell'ontologia implicita nell'interpretazione insiemistica della teoria NBG, con la distinzione tra classi proprie e improprie, e con la teoria dei "tipi" di Russell.

Anche nel caso più ampio degli enti, senza una distinzione tra modi diversi di considerare gli enti della teoria la sola compresenza:

– di "oggetti" $\boldsymbol{x, y, z, \cdots,}$

– di una "relazione binaria" tra oggetti $\in$,

– di un "quantificatore universale" $\forall$,

– e dei primi assiomi della teoria NBG comunque interpretata

fa comparire la contraddittorietà della nozione di oggetto universale.

Per eliminare tale contraddizione:

– in NBG occorre richiedere che la classe universale non sia uninsieme ($\boldsymbol{u}$) ma sia una classe propria ($\boldsymbol{\mathcal{U}}$);

– in OF che l'ente universale non sia un'entità ($\boldsymbol{e}$) ma sia un ente proprio ($\boldsymbol{\mathcal{E}}$).

Si tratta di due modi di esprimere con il linguaggio e di interpretare ontologicamente la stessa contraddizione logica, risolvendola allo stesso modo.

- Un'entità, dunque si distingue da un generico ente per il fatto di essere in un ente secondo la relazione $\in$, mentre gli enti propri non sono mai in un ente secondo la relazione $\in$.

- In un'interpretazione ontologica, che si richiami ad AT, possiamo pensare alle entità come ad enti che sono in altri enti

  – come sostanze

  – o come accidenti di sostanze

  e agli enti propri come ad enti che non possono essere in nessun altro ente come sostanze o accidenti, in quanto niente è più universale di essi.

Per eliminare tale contraddizione:

– in NBG occorre richiedere che la classe universale non sia uninsieme ($\boldsymbol{u}$) ma sia una classe propria ($\boldsymbol{\mathcal{U}}$);

– in OF che l'ente universale non sia un'entità ($\boldsymbol{e}$) ma sia un ente proprio ($\boldsymbol{\mathcal{E}}$).

Si tratta di due modi di esprimere con il linguaggio e di interpretare ontologicamente la stessa contraddizione logica, risolvendola allo stesso modo.

- Un'entità, dunque si distingue da un generico ente per il fatto di essere in un ente secondo la relazione $\in$, mentre gli enti propri non sono mai in un ente secondo la relazione $\in$.

- In un'interpretazione ontologica, che si richiami ad AT, possiamo pensare alle entità come ad enti che sono in altri enti

  – come sostanze

  – o come accidenti di sostanze

  e agli enti propri come ad enti che non possono essere in nessun altro ente come sostanze o accidenti, in quanto niente è più universale di essi.

- Nell'ottica di AT gli enti propri paiono interpretabili come trascendentali.

Primo ampliamento della Teoria (OF) - Le categorie

Questo “ampliamento” di interpretazione delle nozioni primitive richiede un ripensamento più preciso della relazione primitiva $\in$

- dal solo (univoco) senso di appartenenza ad un aggregato (insiemistica)
- al senso ampio (analogo) con cui la si può intendere in un’ontologia.

$+$ Dal punto di vista ontologico, gli insiemi, considerati come elementi che appartengono a classi, vengono trattati come entità individuali autoconsistenti, ovvero come se fossero delle sostanze (per modum substantiae).

$+$ Dunque sembra plausibile affermare che la $\in$ insiemistica, dal punto di vista ontologico, stia per è in come sostanza, o a modo di sostanza.

$+$ L’interpretazione insiemistica di NBG corrisponde ad un’ontologia che prevede un’unica categoria primitiva, quella di sostanza, nel senso che tratta gli insiemi come fossero sostanze: ogni insieme è considerato come un ente autonomo a se stante.

$+$ Nel contempo, ma non obbligatoriamente, un insieme può essere una collezione di sostanze (insieme di insiemi).

Sostanza, accidenti e categorie aristoteliche

Per poter caratterizzare gli altri modi con cui un'entità è in un ente, tipici di un'ontologia più ricca di quella insiemistica che interpreta NBG, come lo è AT, sarà necessario

— introdurre delle nuove relazioni primitive oltre alla $\in$ insiemistica.

— La relazione è in, infatti, non è di per sé univoca e può dirsi in più modi (analogia).

Per procedere in tale direzione occorre introdurre più tipi di relazioni è in in maniera tale da poter distinguere più "categorie" di entità.

Aggiungeremo, allora, alla relazione $\in$, che abbiamo reinterpretato come è in come sostanza delle nuove relazioni primitive:

$$\in_{\boldsymbol{A}}, \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_N,$$

che, seguendo la terminologia di AT chiameremo, è in come accidente

prevedendo la possibilità che vi siano $\boldsymbol{N}$ tipi di accidente diversi tra loro.

Per comodità sarà utile introdurre anche un'etichetta (in inglese label) C che riunisce le denominazioni di tutte le possibili relazioni primitive è in della nostra OF che chiameremo etichetta di categoria, scrivendo:

$$\in_{\boldsymbol{C}}, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{S},\ \boldsymbol{A}, \qquad \in_{\boldsymbol{S}}, \in .$$

Con questa scrittura intendiamo che

- quando l'etichetta $\boldsymbol{C}$ è $\boldsymbol{S}$ o viene omessa, la corrispondente relazione $\in_{\boldsymbol{S}}$ ovvero $\in$ va intesa come la usuale appartenenza insiemistica, che dice che un'entità è in come (a modo di) sostanza, cioè appartiene ad un aggregato;
- mentre quando $\boldsymbol{C}$ è $\boldsymbol{A}$, la corrispondente relazione $\in_{\boldsymbol{A}}$ dice che un'entità è in come accidente.

In particolare, nel caso di un'ontologia formale che sia confrontabile con AT, avremmo dieci relazioni primitive è in, analoghe tra loro, corrispondenti alle dieci categorie aristoteliche che denotiamo, in modo più significativo, con i simboli:

$$\in_{\boldsymbol{SO}}, \in_{\boldsymbol{QU}}, \in_{\boldsymbol{qu}}, \in_{\boldsymbol{re}}, \in_{\boldsymbol{dv}}, \in_{\boldsymbol{si}}, \in_{\boldsymbol{qd}}, \in_{\boldsymbol{ab}}, \in_{\boldsymbol{az}}, \in_{\boldsymbol{pa}},$$

che si interpretano come: è in come sostanza, quantità, qualità, relazione, dove, sito, quando, abito, azione, passione.

D'ora in poi conveniamo di distinguere i modi di utilizzare i simboli $\in_{SO}$, $\in$, $\in_S$:

$$x_{SO} \in_{SO} Y \iff \begin{bmatrix} x \in_{SO} Y \\ \neg(x_{SO} \in_A X) \end{bmatrix} \quad \text{(sostanza genuina)}$$

$$x \in Y \iff x_A \in Y \quad \text{(accidente a modo di sostanza)}$$

La notazione

$$\in_S \ \text{non distingue tra} \left\langle \begin{array}{c} \in_{SO} \\ \text{e} \\ \in \end{array} \right.$$

lasciando l'indeterminatezza, quando non sia necessaria una precisazione.

Categoria ($\Cup_C$)

Chiamiamo categoria (di etichetta) C la classe di tutte le entità di tipo x_C (ovvero la classe universale relativa alla sola relazione primitiva $\in_C$).

$$\forall X, \forall Y : [(X \in_C Y) \implies (X \in \Cup_C)],$$

con C che può essere $SO, QU, qu, \cdots$.

- Si tratta di una definizione estensionale di categoria (come un insieme)
- che consegue ad una sorta di “definizione” intensionale di categoria che è implicita nella relazione $\in_C$, che essendo primitiva non è esplicitabile se non attraverso il suo utilizzo nell’ambito della teoria.

Così abbiamo, ad esempio, che

- U_{SO} è la classe di tutti gli enti che sono in altri enti come sostanza “genuina”,
- U_{QU} è la classe di tutti gli enti che sono in altri enti come quantità,
- U_{qu} è la classe di tutti gli enti che sono in altri enti come qualità,
- ecc.

Si noti come l’appartenenza insiemistica ($\in$)

non definisce alcuna categoria

potendo raccogliere in uno stesso aggregato anche entità di categorie disparate, come accade ad esempio anche per il nomen infinitum in AT (non-albero).

Definizioni degli insiemi e paradossi (NBG) - Generi e universali ($AT - OF$)

Assioma del Rimpiazzamento

Nella teoria intuitiva degli insiemi si ricorreva al cosiddetto assioma di specificazione, espresso come:

$$\forall\, p(x)\ \exists\, y \,|\, y = \{x \,|\, p(x)\},$$

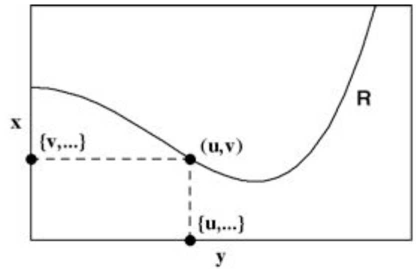
dove p rappresentava una proprietà (= definizione) di x che, generalmente poteva essere espressa anche in termini del linguaggio comune e, comunque, non era necessariamente espressa mediante una relazione definita internamente alla teoria.

- L'idea di ricorrere a questo assioma è legata alla necessità pratica di disporre di un modo di definire un insieme diverso dalla semplice elencazione materiale dei suoi elementi.
- Questo assioma era la fonte dei molteplici paradossi della teoria intuitiva degli insiemi (paradosso dell'insieme universale, paradosso di Russell).
- Per ridurre la possibilità di incorrere in paradossi occorre esprimere p mediante simboli definiti all'interno del sistema.

- Ai fini della Teoria dei Fondamenti della Matematica (Teoria dei Numeri) è stato sufficiente utilizzare dei simboli definiti a partire dalle prime nozioni di classe, insieme e appartenenza ($\in$).
  - Questa scelta però comporta la necessità di identificare le Relazioni (binarie) semplicemente con le coppie ordinate definite come insiemi dei loro Termini presi nel loro ordine (in AT Terminus a quo e ad quem).
  - L'Assioma del Rimpiazzamento risolve il problema: in luogo di $\boldsymbol{p}$ compare la relazione R che consente di utilizzare solo quelle proprietà (simboli) che si possono esprimere all'interno della teoria NBG, ovvero in termini di coppie ordinate di insiemi, evitando, così, di far entrare nella teoria i paradossi tipici delle proposizioni del linguaggio comune.

L'Assioma del rimpiazzamento in NBG si presenta complicato ma si tratta solo di una questione tecnica.

$$\forall\, \boldsymbol{x},\ \forall\, \mathsf{R}\ :\ \mathrm{Un}(\mathsf{R}) \Longrightarrow \Big[\exists\, \boldsymbol{y} \,|\, \forall \boldsymbol{u} : \Big[(\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{y}) \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow [\exists\, \boldsymbol{v} \,|\, (\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{x}) \wedge (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathsf{R}]\Big]\Big] \qquad (NBG)$$



Relazione secondaria e Relazione primaria – Forma

Estendendo la nozione di Relazione (secondaria) a quella di Relazione primaria possiamo estendere anche l'assioma del Rimpiazzamento.

1. innanzitutto, occorre richiedere (coerentemente con AT) che tra le etichette di categoria $\boldsymbol{C}$ se ne preveda una (denotata con $\boldsymbol{re}$) che caratterizzi la nozione di "relazione" come nozione primitiva e quindi irriducibile (chiameremo "primarie" le relazioni che sono in un ente secondo $\in_{\boldsymbol{re}}$);

2. poi occorre cercare di importare in OF la nozione insiemistica di relazione che ora rappresenterà solamente quelli che in AT si chiamano i termini della relazione che in OF non si identificheranno più con la relazione stessa, diversamente da quanto si fa in NBG (chiameremo secondarie le relazioni intese come coppie ordinate di termini);

3. infine introdurre un criterio che consenta di collegare le relazioni primarie con quelle secondarie, in modo che sia possibile, data una relazione (primaria) identificare anche i suoi termini (ovvero la relazione secondaria).

Relazione primaria

Si dice relazione primaria ogni ente che è in un ente secondo $\in_{re}$.

$$\mathsf{Relp}(\mathit{R}) \iff (\exists\, \boldsymbol{X} \mid \mathit{R} \in_{re} \boldsymbol{X}).$$

Conveniamo di denotare le relazioni primarie con simboli in caratteri *sans serif corsivi,* come *R* , *S* , ecc.

Relazione secondaria

Si dice relazione binaria secondaria qualunque insieme R di coppie ordinate di enti.

$$\mathsf{Rel}_2(\mathsf{R}) \iff [\exists\, \boldsymbol{x}, \exists\, \boldsymbol{y} \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathsf{R}].$$

Per alleggerire la scrittura conveniamo, poi, di scrivere anche in $OF,$ seguendo la consuetudine di $NBG,$ $\boldsymbol{x}\,\mathsf{R}\,\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{x}\,\mathsf{R}\,\boldsymbol{y} \iff [(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathsf{R}].$$

- Abbiamo affrontato il punto 1 (definizione della relazione primaria)
- e il punto 2 (definizione della relazione secondaria) dell'elenco esposto all'inizio di questo paragrafo.
- Rimane ora il punto 3 (legame tra le nozioni di relazione primaria e secondaria) che possiamo affrontare grazie al fatto che in OF anche i simboli della teoria sono da considerare come enti e quindi come interni alla teoria stessa.

Persino in un'ontologia povera come quella di un sistema formale che includa appena una teoria dei numeri naturali questo è già possibile, con il metodo della numerazione di Gödel che "rappresenta"[3], mediante un numero primo, ogni simbolo della teoria.

Più genericamente, in OF, possiamo utilizzare direttamente delle formule ben formate $\mathtt{F}$ (che, essendo enti, sono interne ad OF) che coinvolgono i simboli stessi delle relazioni primitive $\in_C$, e quelli definiti a partire da essi.

$$\mathtt{F} = \boldsymbol{A}^n(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n).$$