

Sistemi dinamici: un'introduzione.

Francesca Telesio

14 Giugno 2014



Scopo di questa presentazione è dare un'introduzione generale su cosa sia un sistema dinamico, individuando quali siano le grandezze rilevanti per ottenere informazioni su di esso, specie nel caso in cui esso abbia un'evoluzione temporale caotica.

Definizione di sistema dinamico

Un sistema dinamico è un modo di descrivere il passaggio nel tempo di tutti i punti di un dato spazio S o di un suo sottospazio. Definiamo un'applicazione $\Phi(t)$ che esprima l'evolvere nel tempo dei punti del sistema.

$$\Phi(t) : (t, x) \rightarrow x_t \quad (1)$$

e sia

$$\Phi_t(\Phi_s(x)) = \Phi_{t+s}(x) \quad (2)$$

allora abbiamo un sistema dinamico.

Sistemi a tempo discreto

Consideriamo un sistema in cui il tempo sia scandito da istanti t_n con $n = 0, 1, 2, \dots$, esso è descritto da una **mappa** che lega lo stato al tempo $n + 1$ allo stato al tempo n

$$x_{n+1} = M(x_n) \quad (3)$$

con $x_n = x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N$ dove $x_1 = M(x_0)$, $x_2 = M(M(x_0))$ e così via.

Sistemi a tempo discreto

Consideriamo un sistema in cui il tempo sia scandito da istanti t_n con $n = 0, 1, 2, \dots$, esso è descritto da una **mappa** che lega lo stato al tempo $n + 1$ allo stato al tempo n

$$x_{n+1} = M(x_n) \quad (3)$$

con $x_n = x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N$ dove $x_1 = M(x_0)$, $x_2 = M(M(x_0))$ e così via.

Anche l'analisi di un sistema continuo (N dimensionale) può essere ricondotta all'analisi di un sistema discreto ($N - 1$ dimensionale) un'opportuna operazione di proiezione.

Stabilità dei punti di equilibrio

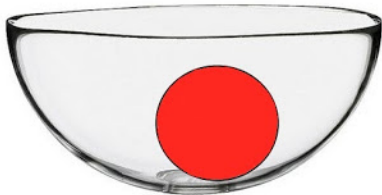
Sia $x' = f(x)$, con $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, un punto $\bar{x} \in W$ è un punto di equilibrio se $f(\bar{x}) = 0$.

Stabilità dei punti di equilibrio

Sia $x' = f(x)$, con $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, un punto $\bar{x} \in W$ è un punto di equilibrio se $f(\bar{x}) = 0$.

I punti di equilibrio si possono dividere in due categorie generali:

Punti di equilibrio stabile

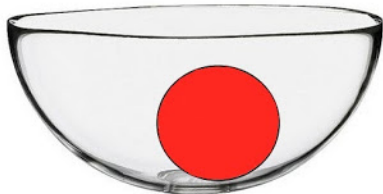


Stabilità dei punti di equilibrio

Sia $x' = f(x)$, con $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, un punto $\bar{x} \in W$ è un punto di equilibrio se $f(\bar{x}) = 0$.

I punti di equilibrio si possono dividere in due categorie generali:

Punti di equilibrio stabile



Punti di equilibrio instabile





Una popolazione

Dato $y(t)$ il numero di individui di una specie al tempo t , al tempo $t + \Delta t$ il numero sarà $y + \Delta y$.

La velocità di crescita media sarà data da $\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t}$.



Una popolazione

Dato $y(t)$ il numero di individui di una specie al tempo t , al tempo $t + \Delta t$ il numero sarà $y + \Delta y$.

La velocità di crescita media sarà data da $\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t}$.

Passando al continuo si ha

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y(t)\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)} \quad (4)$$



Una popolazione

Dato $y(t)$ il numero di individui di una specie al tempo t , al tempo $t + \Delta t$ il numero sarà $y + \Delta y$.

La velocità di crescita media sarà data da $\frac{\Delta y}{y(t)\Delta t}$.

Passando al continuo si ha

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y(t)\Delta t} = \frac{y'(t)}{y(t)} \quad (4)$$

Facendo l'assunzione più semplice, cioè che il tasso di crescita sia costante, si ha:

$$\frac{y'}{y} = \alpha = \frac{d}{dt} \ln(y) \quad (5)$$

$$y(t) = y(0)e^{\alpha t} \quad (6)$$



$$y(t) = y(0)e^{\alpha t} \quad (7)$$



$$y(t) = y(0)e^{\alpha t} \quad (7)$$

- $\alpha > 0$ crescita esponenziale
- $\alpha = 0$ popolazione costante
- $\alpha < 0$ popolazione in estinzione



$$y(t) = y(0)e^{\alpha t} \quad (7)$$

- $\alpha > 0$ crescita esponenziale
- $\alpha = 0$ popolazione costante
- $\alpha < 0$ popolazione in estinzione

Assumendo in prima approssimazione che α dipenda solo dal cibo pro capite minimo per il mantenimento della popolazione, si avrà:

$$\alpha = a(\sigma - \sigma_0) \quad (8)$$

con σ_0 quantità di cibo pro capite minimo



Due popolazioni: prede e predatori

Supponiamo di avere una popolazione y di predatori e una popolazione x di prede.

$$y' = a(x - \sigma_0)y \quad (9)$$



Due popolazioni: prede e predatori

Supponiamo di avere una popolazione y di predatori e una popolazione x di prede.

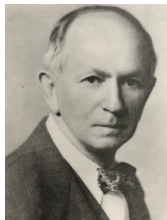
$$y' = a(x - \sigma_0)y \quad (9)$$

La popolazione di prede x in assenza di predatori si comporta come descritto prima. I predatori comportano un tasso di scomparsa di prede pari a βxy , cioè proporzionale agli incontri tra prede e predatori.

$$x' = \alpha x - \beta xy \quad (10)$$



Sistema di Lotka-Volterra



Il sistema di equazioni ottenuto è
chiamato sistema di
Lotka-Volterra.

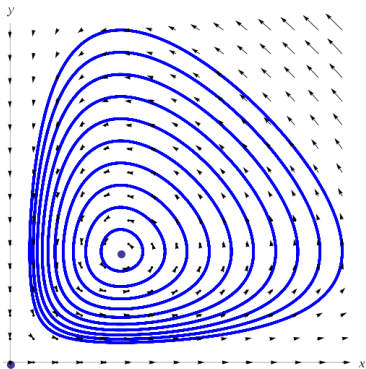
$$\begin{cases} y' &= (Cx - D)y \\ x' &= (A - By)x \end{cases} \quad (11)$$





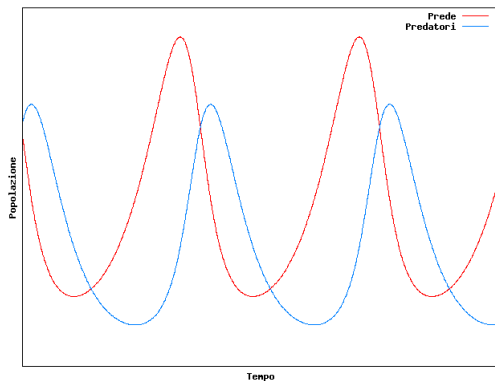
Due popolazioni

Le soluzioni del sistema, disegnate in funzione del numero di predatori e di prede, sono tutte orbite chiuse, salvo un punto stazionario e i due assi, che corrispondono ai due casi limite di assenza di una delle due popolazioni.



Due popolazioni

Approssimando linearmente il sistema, si ottiene un andamento delle due popolazioni descritto in termini di funzioni trigonometriche.



Oscillatore di Van der Pol

L'oscillatore di Van der Pol è un oscillatore non conservativo con smorzamento non lineare, descritto dall'equazione

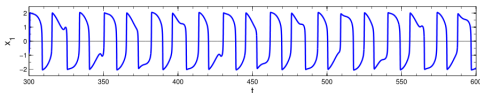
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (12)$$

Oscillatore di Van der Pol

L'oscillatore di Van der Pol è un oscillatore non conservativo con smorzamento non lineare, descritto dall'equazione

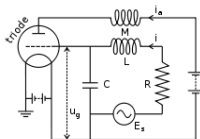
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (12)$$

L'andamento nel tempo della grandezza x è

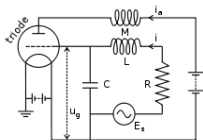


Molti sistemi fisici hanno un comportamento descrivibile con l'equazione di Van der Pol; il modello è stato sviluppato per descrivere oscillatori elettrici come quello proposto in figura, ma è stato successivamente utilizzato anche per descrivere meccanismi biologici, come il potenziale d'azione dei neuroni.

Molti sistemi fisici hanno un comportamento descrivibile con l'equazione di Van der Pol; il modello è stato sviluppato per descrivere oscillatori elettrici come quello proposto in figura, ma è stato successivamente utilizzato anche per descrivere meccanismi biologici, come il potenziale d'azione dei neuroni.



Molti sistemi fisici hanno un comportamento descrivibile con l'equazione di Van der Pol; il modello è stato sviluppato per descrivere oscillatori elettrici come quello proposto in figura, ma è stato successivamente utilizzato anche per descrivere meccanismi biologici, come il potenziale d'azione dei neuroni.



È interessante osservare il comportamento del sistema per $t \rightarrow \infty$

▶ [Link](#)

Definizione di insieme limite

- Un punto $y \in W$ è un punto ω -limite di $x \in W$ se esiste una sequenza $t_n \rightarrow \infty$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(x) = y$.

Definizione di insieme limite

- Un punto $y \in W$ è un punto ω – *limite* di $x \in W$ se esiste una sequenza $t_n \rightarrow \infty$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(x) = y$.
- L'insieme di tutti i punti ω – *limite* di y è l'insieme $L_\omega(y)$

Definizione di insieme limite

- Un punto $y \in W$ è un punto ω - *limite* di $x \in W$ se esiste una sequenza $t_n \rightarrow \infty$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{t_n}(x) = y$.
- L'insieme di tutti i punti ω - *limite* di y è l'insieme $L_\omega(y)$
- L'insieme α - *limite* si ottiene in modo analogo con una sequenza tale che $t_n \rightarrow -\infty$.

Ogni punto di equilibrio \bar{x} è sia il proprio insieme L_α – *limite* che L_ω – *limite*.

Ogni punto di equilibrio \bar{x} è sia il proprio insieme L_α – *limite* che L_ω – *limite*.

Esistono sistemi, come ad esempio l'oscillatore di Van der Pol, che presentano come insiemi limite orbite chiuse, detti cicli limite. Nel caso del sistema di van der Pol abbiamo un ciclo che è l'insieme L_ω – *limite* di tutti i punti del piano eccetto l'origine.

In \mathcal{R}^2 gli insiemi limite sono

- punti di equilibrio
- cicli limite
- separatrici (Traiettorie congiungenti punti di equilibrio)

In \mathcal{R}^2 gli insiemi limite sono

- punti di equilibrio
- cicli limite
- separatrici (Traiettorie congiungenti punti di equilibrio)

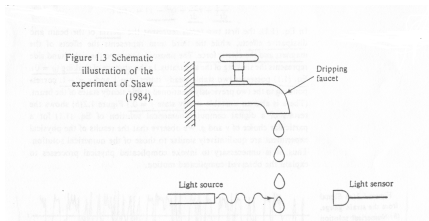
In \mathcal{R}^3 gli insiemi limite sono

- cicli limite
- insiemi più complicati, tipo attrattori strani in sistemi caotici, che vedremo in seguito

Il rubinetto che gocciola



Il rubinetto che gocciola



Caratteristiche dei sistemi caotici

1 Complessità della struttura delle traiettorie

Caratteristiche dei sistemi caotici

- 1 Complessità della struttura delle traiettorie
- 2 Struttura geometrica degli attrattori (insiemi ω – *limite*) complessa. Attrattori con dimensione frazionaria

Caratteristiche dei sistemi caotici

- 1 Complessità della struttura delle traiettorie
- 2 Struttura geometrica degli attrattori (insiemi ω – *limite*) complessa. Attrattori con dimensione frazionaria
- 3 Sensibilità esponenziale alle condizioni iniziali

Di quante dimensioni c'è bisogno per avere un sistema caotico?

Di quante dimensioni c'è bisogno per avere un sistema caotico?

- Sistema continuo $N \geq 3$
- Mappa invertibile $N \geq 2$
- Mappa non invertibile $N \geq 1$

La dimensionalità più alta non è una condizione necessaria per ottenere un comportamento caotico.

Mappa tenda

$$x_{n+1}(\mu) = \mu \left(1 - 2 \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \right) \quad (13)$$

dove μ è un parametro.

Mappa tenda

$$x_{n+1}(\mu) = \mu \left(1 - 2 \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \right) \quad (13)$$

dove μ è un parametro.

Se $x_n \in [0, 1] \Rightarrow \forall_m x_{n+m} \in [0, 1]$



Mappa tenda

$$x_{n+1}(\mu) = \mu \left(1 - 2|x_n - \frac{1}{2}| \right) \quad (13)$$

dove μ è un parametro.

Se $x_n \in [0, 1] \Rightarrow \forall_m x_{n+m} \in [0, 1]$

Se $|x_n| > 1$:

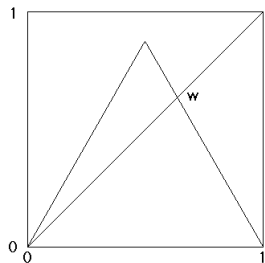
$\mu < 1/2 \quad x_{n+m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0^-$

$\mu > 1/2 \quad x_{n+m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\infty$

Mappa tenda

$$x_{n+1}(\mu) = \mu \left(1 - 2 \left| x_n - \frac{1}{2} \right| \right) \quad (14)$$

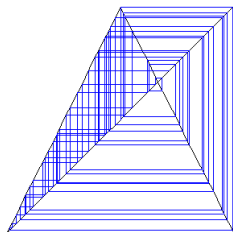
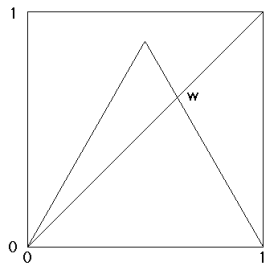
Consideriamo $x \in [0, 1]$ e usiamo il metodo grafico per il calcolo di mappe unidimensionali.



Mappa tenda

$$x_{n+1}(\mu) = \mu \left(1 - 2|x_n - \frac{1}{2}| \right) \quad (14)$$

Consideriamo $x \in [0, 1]$ e usiamo il metodo grafico per il calcolo di mappe unidimensionali.



I punti di intersezione della mappa con la bisettrice sono punti fissi della dinamica.

I punti di intersezione della mappa con la bisettrice sono punti fissi della dinamica.

Sono stabili o instabili?



I punti di intersezione della mappa con la bisettrice sono punti fissi della dinamica.

Sono stabili o instabili?

se $\mu > \frac{1}{2}$ i due punti di intersezione sono instabili



I punti di intersezione della mappa con la bisettrice sono punti fissi della dinamica.

Sono stabili o instabili?

se $\mu > \frac{1}{2}$ i due punti di intersezione sono instabili

se $\mu > \frac{1}{2}$ l'unico punto di intersezione è a $x = 0$ ed è stabile



I punti di intersezione della mappa con la bisettrice sono punti fissi della dinamica.

Sono stabili o instabili?

se $\mu > \frac{1}{2}$ i due punti di intersezione sono instabili

se $\mu > \frac{1}{2}$ l'unico punto di intersezione è a $x = 0$ ed è stabile

se $\mu = \frac{1}{2}$ è il caso di stabilità marginale in cui tutti i punti nell'intervallo $[0, 1/2]$ sono punti fissi



I punti di intersezione della mappa con la bisettrice sono punti fissi della dinamica.

Sono stabili o instabili?

se $\mu > \frac{1}{2}$ i due punti di intersezione sono instabili

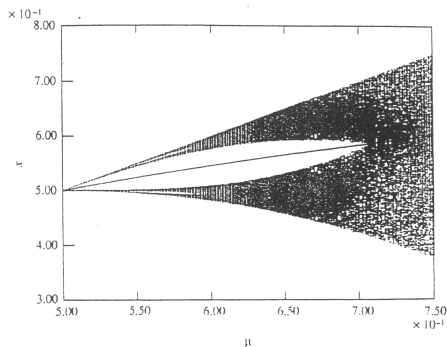
se $\mu > \frac{1}{2}$ l'unico punto di intersezione è a $x = 0$ ed è stabile

se $\mu = \frac{1}{2}$ è il caso di stabilità marginale in cui tutti i punti nell'intervallo $[0, 1/2]$ sono punti fissi

$\mu = \frac{1}{2}$ è un **punto di biforcazione**

Mappa tenda

Se consideriamo i valori assunti dalla mappa, dopo un opportuno transitorio, in funzione del parametro μ con $\mu > \frac{1}{2}$ otteniamo l'insieme dei punti di attrazione del sistema dinamico, raffigurato dalla *mappa tenda*.





Mappa logistica

La mappa logistica è stata elaborata come semplice modello per l'evoluzione annuale di una certa popolazione di insetti e proposta da May nel 1976 [Nature,261].

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (15)$$



Mappa logistica

La mappa logistica è stata elaborata come semplice modello per l'evoluzione annuale di una certa popolazione di insetti e proposta da May nel 1976 [Nature,261].

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (15)$$

La popolazione dell'anno $n + 1$ (z_{n+1}) dipenderà dalla schiusa delle uova della popolazione dell'anno n (z_n).



Mappa logistica

La mappa logistica è stata elaborata come semplice modello per l'evoluzione annuale di una certa popolazione di insetti e proposta da May nel 1976 [Nature,261].

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) \quad (15)$$

La popolazione dell'anno $n + 1$ (z_{n+1}) dipenderà dalla schiusa delle uova della popolazione dell'anno n (z_n).

Supponiamo che in media ogni individuo deponga r uova che si schiudono $\Rightarrow z_{n+1} = rz_n$.



Mappa logistica

La mappa logistica è stata elaborata come semplice modello per l'evoluzione annuale di una certa popolazione di insetti e proposta da May nel 1976 [Nature,261].

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (15)$$

La popolazione dell'anno $n + 1$ (z_{n+1}) dipenderà dalla schiusa delle uova della popolazione dell'anno n (z_n).

Supponiamo che in media ogni individuo deponga r uova che si schiudono $\Rightarrow z_{n+1} = rz_n$.

Se $r > 1$ si ha una crescita $z_n = r^n z_0$ illimitata della popolazione.



Quando la popolazione è troppo numerosa supponiamo ci sia un tasso di mortalità elevato (per mancanza di cibo) prima della deposizione di uova e quindi una diminuzione del valore di r .



Quando la popolazione è troppo numerosa supponiamo ci sia un tasso di mortalità elevato (per mancanza di cibo) prima della deposizione di uova e quindi una diminuzione del valore di r . Il modo più semplice di tener conto del sovraffollamento è di considerare r decrescente con z :

$$r \left(1 - \frac{z_n}{\bar{z}} \right) \quad (16)$$

dove \bar{z} indica il valore della popolazione per cui nessun insetto depone uova.



Quando la popolazione è troppo numerosa supponiamo ci sia un tasso di mortalità elevato (per mancanza di cibo) prima della deposizione di uova e quindi una diminuzione del valore di r . Il modo più semplice di tener conto del sovraffollamento è di considerare r decrescente con z :

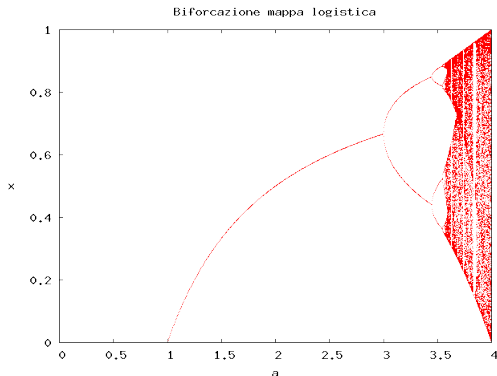
$$r \left(1 - \frac{z_n}{\bar{z}} \right) \quad (16)$$

dove \bar{z} indica il valore della popolazione per cui nessun insetto depone uova.

Si ha quindi $z_{n+1} = r \left(1 - \frac{z_n}{\bar{z}} \right) z_n$.

Questa equazione è legata a quella della mappa proposta semplicemente da un cambio di variabile $\frac{z_i}{\bar{z}} = x_i$.

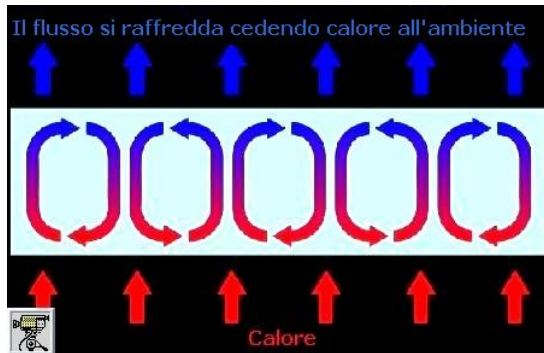
Disegnando, analogamente a prima, il grafico delle posizioni assunte dal sistema in funzione del parametro si ottiene.



Si può notare che la regione caotica appare interrotta da bande in cui l'attrattore è formato da un numero limitato di punti.

Lorenz

Il sistema di Lorenz(1963) descrive la dinamica dell'atmosfera mediante la convezione, seguendo l'approssimazione di Reyleigh-Bernard.



La dinamica è governata dalla differenza di temperatura. ▶

Il sistema di Lorenz è un sistema di tre equazioni.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (17)$$

Il sistema di Lorenz è un sistema di tre equazioni.

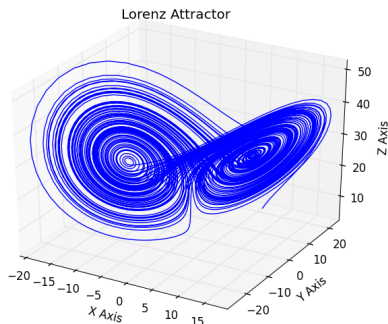
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (17)$$

con x velocità del
flusso di convezione
 y differenza di T tra
flusso ascendente e
discendente
 z scostamento di
 $T(h)$ (h quota
verticale) da un
andamento lineare
 σ, r, b parametri

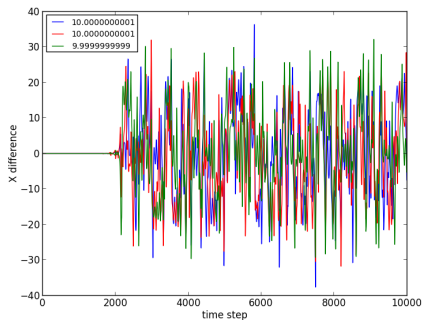
Il sistema di Lorenz è un sistema di tre equazioni.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (17)$$

con x velocità del
 flusso di convezione
 y differenza di T tra
 flusso ascendente e
 discendente
 z scostamento di
 $T(h)$ (h quota
 verticale) da un
 andamento lineare
 σ, r, b parametri



Le traiettorie, per condizioni iniziali arbitrariamente vicine, sono molto differenti, tuttavia l'evoluzione temporale delle traiettorie nel loro complesso descrive l'attrattore.

[▶ Link](#)