

*I FONDAMENTI  
DELL'APPROCCIO STATISTICO  
IN FISICA*



La STATISTICA è entrata  
nell'ambito della FISICA per la  
prima volta in maniera  
consistente nella

## MECCANICA STATISTICA

quella branca della fisica che si  
occupa di “studiare i fenomeni  
termodinamici da un punto di  
vista microscopico”

Oggi:

- Alcune premesse importanti (per fisici e non)
- un'analisi storica della nascita della meccanica statistica partendo dal lavoro di Boltzmann
- prenderemo in considerazione il problema dell'IRREVERSIBILITÀ

# Premessa 1: l'ipotesi ATOMICA

Quando si comincia in meccanica, si parla di meccanica dei punti materiali, la fisica delle alte energie si propone di indagare i costituenti dell'universo ma, a tutti i livelli, quanto è importante in fisica l'ipotesi atomica?

# Premessa 1: l'ipotesi ATOMICA

Quando si comincia in meccanica, si parla di meccanica dei punti materiali, la fisica delle alte energie si propone di indagare i costituenti dell'universo ma, a tutti i livelli, quanto è importante in fisica l'ipotesi atomica?

*1897, Ludwig Boltzmann "Sull'indispensabilità dell'atomismo nella scienza naturale":*

*Si può parlare, per lo meno in senso metaforico, di teoria meccanica, ma solo a condizione che si abbia sempre a che fare con il compito di stabilire le leggi più semplici possibili per la variazione di molti oggetti singoli in un complesso che probabilmente ha tre dimensioni.*

# Premessa 1: l'ipotesi ATOMICA

Quando si comincia in meccanica, si parla di meccanica dei punti materiali, la fisica delle alte energie si propone di indagare i costituenti dell'universo ma, a tutti i livelli, quanto è importante in fisica l'ipotesi atomica?

*1897, Ludwig Boltzmann "Sull'indispensabilità dell'atomismo nella scienza naturale":*

*Si può parlare, per lo meno in senso metafrico, di teoria meccanica, ma solo a codizione che si abbia sempre a che fare con il compito di stabilire le leggi più semplici possibili per la variazione di molti oggetti singoli in un complesso che probabilmente ha tre dimensioni.*

*1963, Richard Feynmann:*

*Se, per un qualche cataclisma, tutta la conoscenza scientifica venisse distrutta, e solo una frase potesse passare alla generazione successiva, quale dichiarazione conterrebbe la massima informazione con il minimo di parole? Credo che si al'ipotesi atomica (o il fatto atomico, comunque tu lo voglia chiamare) che le cose sono fatte d'atomi – piccole particelle che si muovono attorno in moro perpetuo, attraendosi quando sono a distanza ravvicinata, ma respingendosi quando sono schiacciate una contro l'altra.*

# Premessa 1: Differenza tra IPOTESI PROBABILISTICA e IPOTESI in senso FISICO

Nel 1911, Tatiana e Paul Ehrenfest scrivevano:

*Una caratterizzazione soddisfacente delle somiglianze e delle differenze tra le “ipotesi probabilistiche” da un lato e le ipotesi usuali delle scienze naturali dall'altro, apparentemente, non è stata ancora trovata. Le ipotesi delle scienze naturali consistono nell'assunzione che un determinato sistema astratto di assiomi e di teoremi dia un'immagine (sufficientemente esatta) del fenomeno reale. Le “ipotesi probabilistiche” forniscono qualcosa di analogo [...] il carattere della rappresentazione in questo caso è, tuttavia, abbastanza differente.*

# Premessa 1: Differenza tra IPOTESI PROBABILISTICA e IPOTESI in senso FISICO

Nel 1911, Tatiana e Paul Ehrenfest scrivevano:

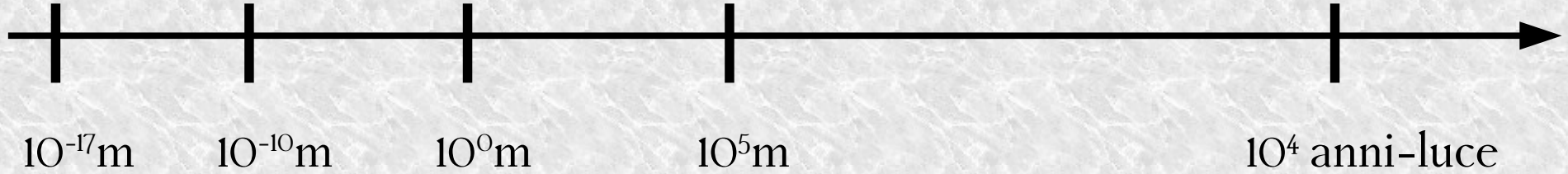
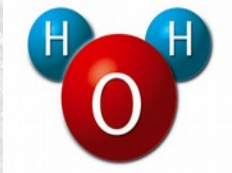
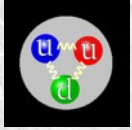
*Una caratterizzazione soddisfacente delle somiglianze e delle differenze tra le “ipotesi probabilistiche” da un lato e le ipotesi usuali delle scienze naturali dall'altro, apparentemente, non è stata ancora trovata. Le ipotesi delle scienze naturali consistono nell'assunzione che un determinato sistema astratto di assiomi e di teoremi dia un'immagine (sufficientemente esatta) del fenomeno reale. Le “ipotesi probabilistiche” forniscono qualcosa di analogo [...] il carattere della rappresentazione in questo caso è, tuttavia, abbastanza differente.*

Due considerazioni:

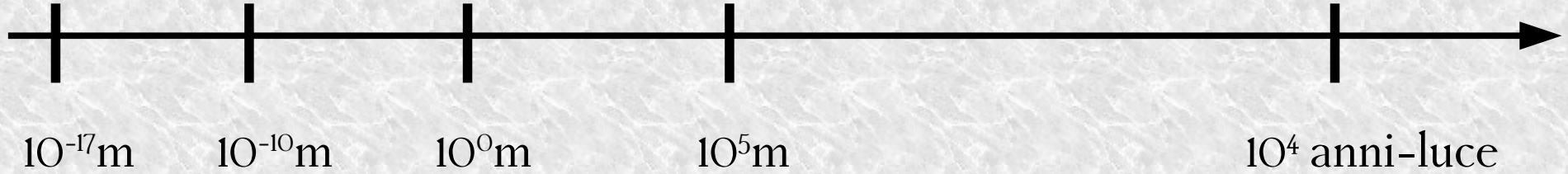
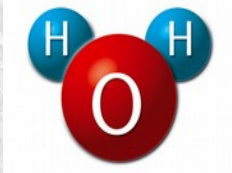
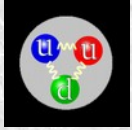
- non basta interpretare le distribuzioni di probabilità in senso statistico per sanare completamente questo problema
- l'analisi di Boltzmann però può aiutarci perché definisce la nozione di proprietà **tipica**, intesa come una proprietà che vale per una schiacciante maggioranza delle serie spaziotemporali dell'universo compatibili con le leggi del moto



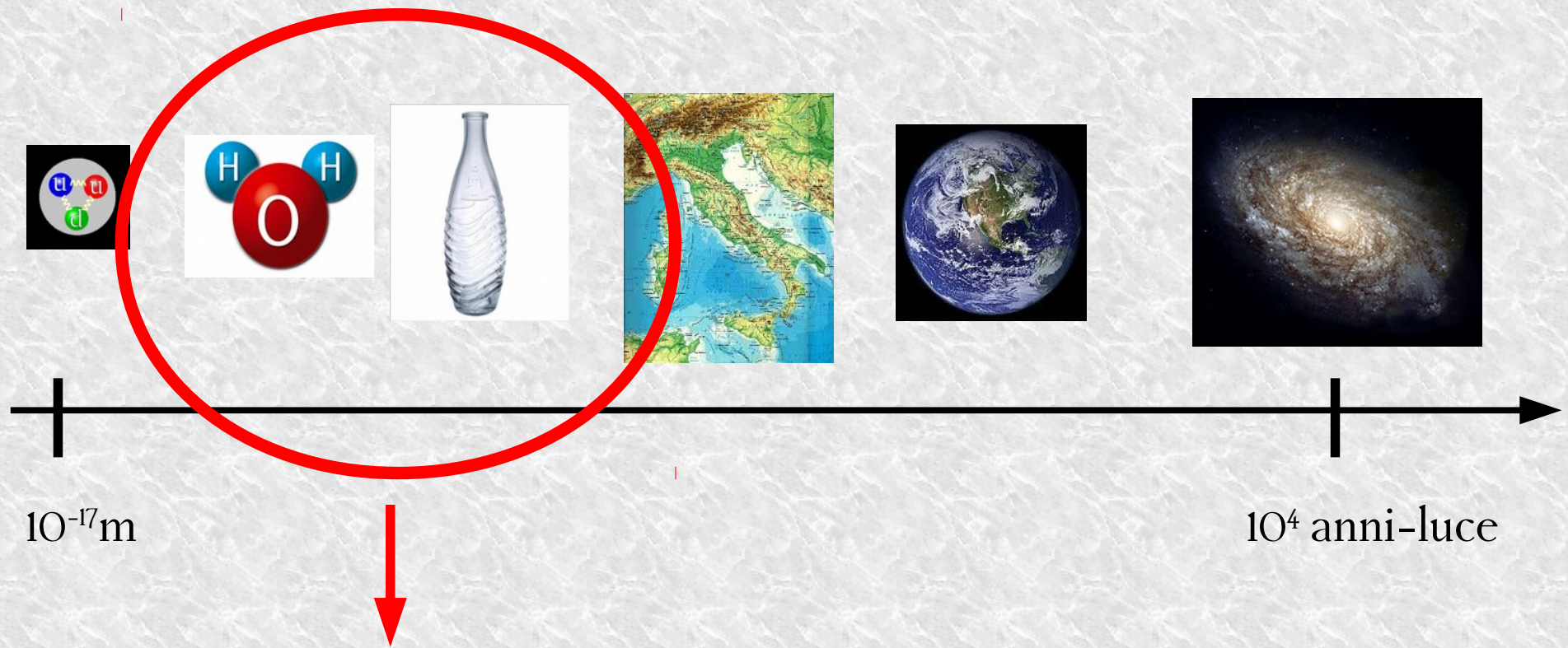
# ORDINI DI GRANDEZZA



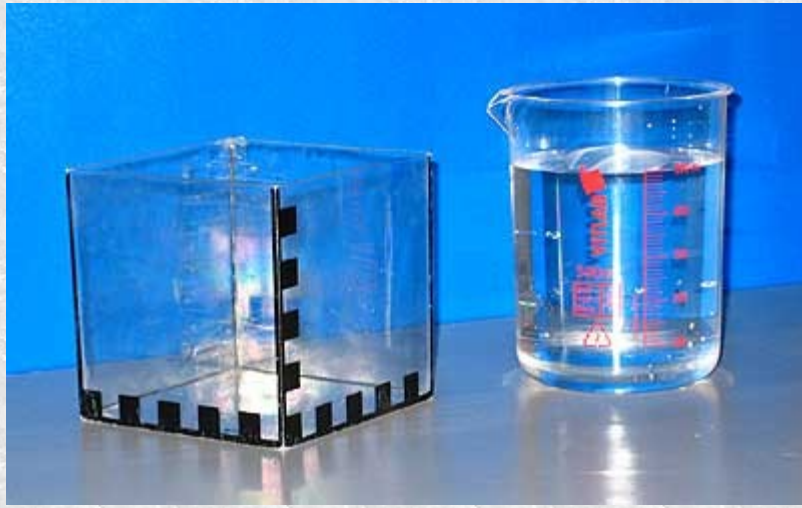
# ORDINI DI GRANDEZZA



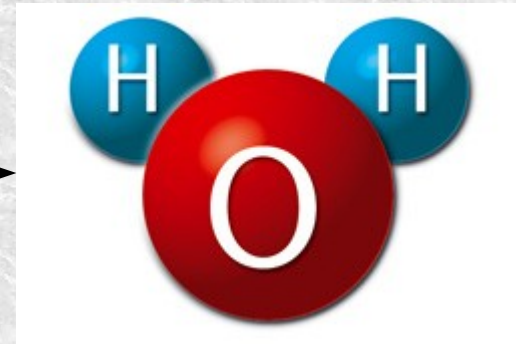
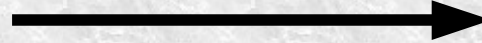
# ORDINI DI GRANDEZZA



Questa è la regione di cui si occupa la meccanica statistica. Benchè sia lontana sia dal quark che dalla galassia...



1l d'acqua occupa  
un volume di  $1\text{dm}^3$



una molecola d'acqua ha  
dimensioni lineari di circa  $10^{-8}\text{m}$

In un litro d'acqua ci sono  $10^{25}$  molecole

Malgrado la complessità, il sistema segue leggi  
piuttosto **semplici** e **general**i.



Se tiro fuori una bottiglia d'acqua dal frigorifero questa si scalderà fino a raggiungere una temperatura di equilibrio con la stanza

Questa condizione è detta  
di  
**EQUILIBRIO  
TERMODINAMICO**



Se tiro fuori una bottiglia d'acqua dal frigorifero questa si scalderà fino a raggiungere una temperatura di equilibrio con la stanza



Se l'acqua è in un thermos questo ci metterà più tempo a raggiungere la temperatura di equilibrio, questo perché il suo isolamento dall'ambiente è migliore.



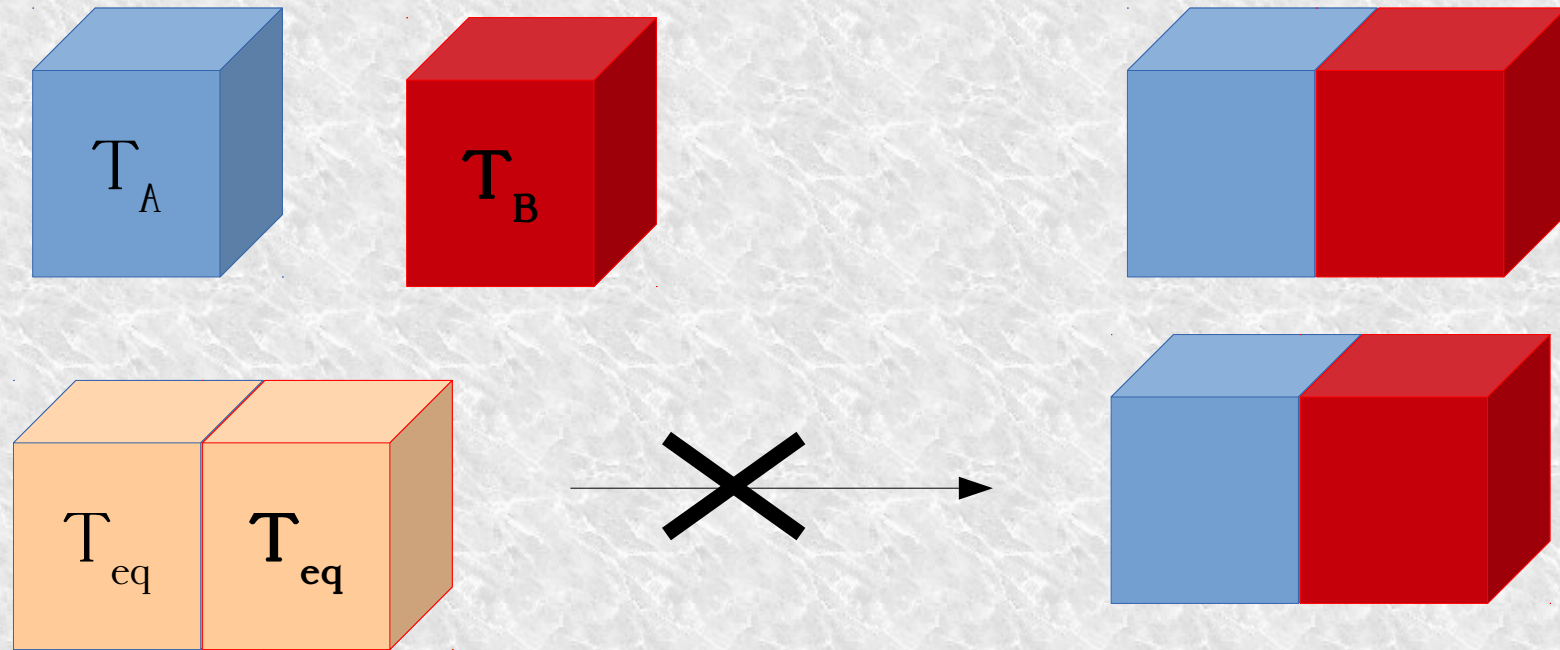
Se tiro fuori una bottiglia d'acqua dal frigorifero questa si scalderà fino a raggiungere una temperatura di equilibrio con la stanza



Se l'acqua è in un thermos questo ci metterà più tempo a raggiungere la temperatura di equilibrio, questo perché il suo isolamento dall'ambiente è migliore.

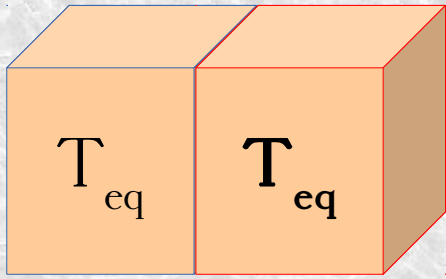
**Primo principio della termodinamica: un sistema isolato conserva la sua energia.**

Il concetto di EQUILIBRIO TERMODINAMICO è legato all'**irreversibilità** dei processi termodinamici.

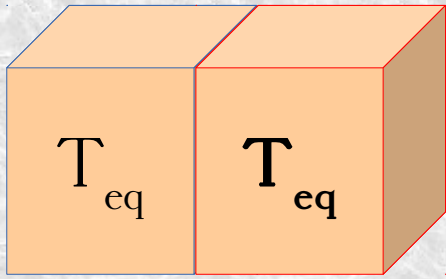


Posso aspettare anche molto tempo ma i due corpi non ritornano alle loro temperature iniziali



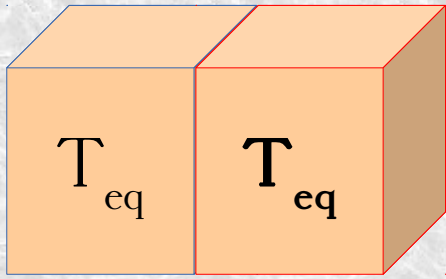


Dal momento che il sistema costituito dai Blocchi A e B (o dalla bottiglia d'acqua + l'ambiente) è isolato, non possiamo servirci dell'energia per descrivere gli stati di equilibrio termodinamico, dobbiamo supporre che esista una grandezza che in questi stati venga minimizzata.



Dal momento che il sistema costituito dai Blocchi A e B (o dalla bottiglia d'acqua + l'ambiente) è isolato, non possiamo servirci dell'energia per descrivere gli stati di equilibrio termodinamico, dobbiamo supporre che esista una grandezza che in questi stati venga minimizzata.

Clausius, nel 1865, formalizza questo concetto introducendo una quantità, l'ENTROPIA, che è proprio questa grandezza cambiata di segno.



Dal momento che il sistema costituito dai Blocchi A e B (o dalla bottiglia d'acqua + l'ambiente) è isolato, non possiamo servirci dell'energia per descrivere gli stati di equilibrio termodinamico, dobbiamo supporre che esista una grandezza che in questi stati venga minimizzata.

Clausius, nel 1865, formalizza questo concetto introducendo una quantità, l'ENTROPIA, che è proprio questa grandezza cambiata di segno.

Possiamo ora scrivere la **seconda legge** della termodinamica nella forma seguente: **ad ogni stato di equilibrio termodinamico di un sistema fisico è associata la sua entropia, un sistema isolato può passare da uno stato all'altro solo se la sua entropia non diminuisce.**

## Cambiamo argomento: le **LEGGI del MOVIMENTO**

*Galileo Galilei, 1632:*

*[...] quello che accade in concreto, accade nell'istesso modo in astratto [...] così, quando il filosogo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che defalchi gli impedimenti della materia [...]. Gli errori dunque non consistono né nell'astratto né nel concreto, né nella geometria o nella fisica, ma nel calcolatore, che non sa fare i conti.*

In effetti, se defalcate gli impedimenti della materia, cioè trascurando l'attrito dovuto all'aria, la caduta di un grave verrà descritta in una maniera incredibilmente semplice: le distanze sono proporzionali al quadrato dei tempi trascorsi.

## Cambiamo argomento: le **LEGGI del MOVIMENTO**

I capisaldi dello schema di descrizione delle leggi del moto sono efficacemente riassunti da Einstein (1936):

a) Il concetto di punto materiale, che può ben essere descritto in quiete dalle sue tre coordinate ( $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ ) e in moto dando  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  in funzione del tempo.

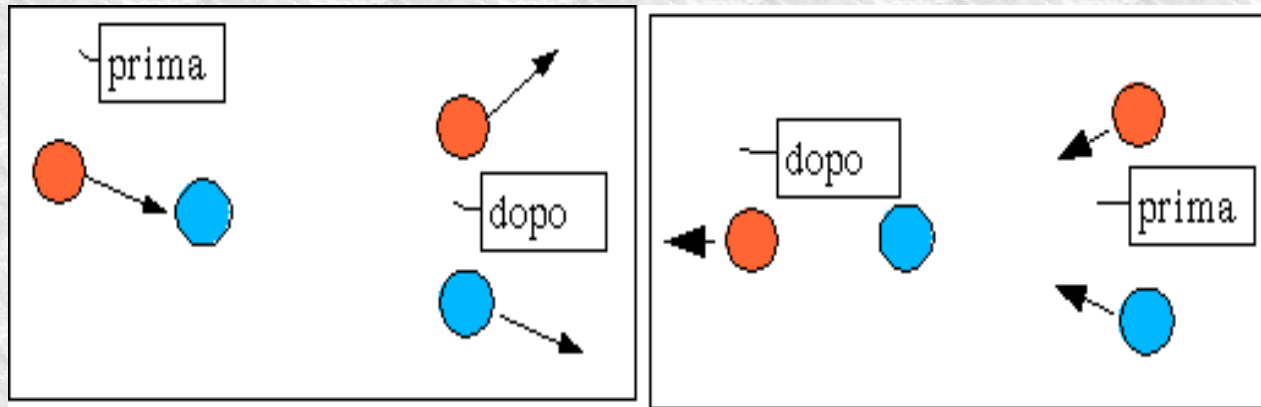
b) La legge d'inerzia

c) La legge del moto per il punto materiale:  
Forza = massa x accelerazione

d) La legge della forza (azioni e reazioni tra punti materiali)

(b) non è altro che un caso particolare di (c)

La **meccanica microscopica** invece, che descrive ogni singolo urto tra gli atomi è invece perfettamente **reversibile nel tempo** nel caso di urto elastico.



Entrambi i disegni descrivono eventi possibili.

**LA MECCANICA È INVARIANTE  
PER INVERSIONE TEMPORALE**

Ancora qualche considerazione sulla teoria atomica:

→ lo schema in cui abbiamo messo la meccanica è uno schema legato ad una teoria atomica (punto materiale)

→ se per noi l'esistenza degli atomi e dei loro costituenti fondamentali è chiara, ancora nel 1897, quando Boltzmann scriveva quello con cui abbiamo iniziato la presentazione, gli atomi erano “invisibili” sia all'uomo della strada che al fisico sperimentale

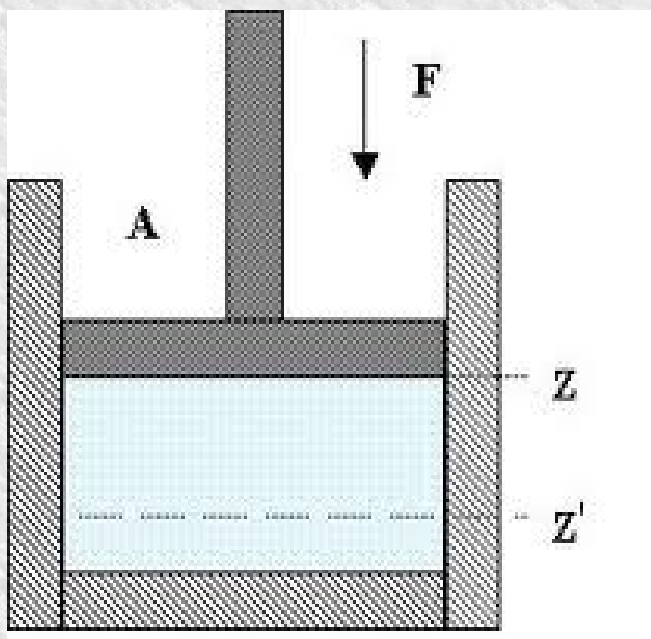
Ancora qualche considerazione sulla teoria atomica:

Uno dei primi modelli atomici di un “oggetto percepibile ai nostri sensi” riguarda il gas contenuto in un cilindro con un pistone e fu studiato da Bernoulli nel 1738 nella sua *Hydrodinamica*.

Questo fu uno dei primi tentativi moderni di comprendere le leggi macroscopiche dei gas in termini di atomi che si muovono in accordo con le leggi meccaniche di Newton.

All'epoca la termodinamica non esisteva ancora e questo tentativo non ebbe seguito per più di 100 anni, ma il sistema di Bernoulli è un buon esempio.





Noi oggi sappiamo che **forze** agiscono tra le molecole di un gas (che è molto più di quanto disponesse Bernoulli).

L'origine delle forze di Van der Waals infatti ha una spiegazione quantistica.

**Il secondo problema è che, anche nota la forma esplicita di queste forze, nessun “filosofo geometra” sarebbe mai in grado di calcolarne le conseguenze, anche se disponesse di un calcolatore elettronico; un calcolatore che stampasse una coordinata per microsecondo impiegherebbe 100 volte l'età dell'universo (1000 miliardi di anni) solo per scrivere la lista delle condizioni iniziali.**

C'è bisogno di altri metodi di studio:  
l'applicazione di **metodi statistici** permette  
di raggiungere informazioni davvero  
significative sul comportamento della  
materia, anche non disponendo  
dell'informazione dettagliata su posizioni e  
forze.

## Lo SPAZIO delle FASI

Ma perchè limitarci ad un cilindro? Immaginiamo tutto il mondo fatto di atomi e immaginiamo di farvi una fotografia.

## Lo SPAZIO delle FASI

Ma perchè limitarci ad un cilindro? Immaginiamo tutto il mondo fatto di atomi e immaginiamo di farvi una fotografia.

La fotografia mostrerà le coordinate occupate da ciascun atomo nello spazio fisico tridimensionale. Ogni atomo sarà individuabile da un raggio vettore  $\mathbf{R}$  rispetto a un qualche sistema di riferimento inerziale.

Se ci sono  $N$  atomi ci saranno  $R_1, \dots, R_N$  raggi vettori che definiranno le posizioni degli atomi, cioè la *configurazione* del sistema.

## Lo SPAZIO delle FASI

Supponiamo di fare ora due fotografie, una al tempo  $t_0$  e l'altra al tempo  $t$ .

Quale relazione esiste tra la configurazione del mondo al tempo  $t_0$  e la configurazione del mondo al tempo  $t$ ?

## Lo SPAZIO delle FASI

Supponiamo di fare ora due fotografie, una al tempo  $t_0$  e l'altra al tempo  $t$ .

Quale relazione esiste tra la configurazione del mondo al tempo  $t_0$  e la configurazione del mondo al tempo  $t$ ?

La risposta è nella struttura matematica della legge di Newton  
forza = massa x accelerazione

Per un sistema di  $N$  atomi avrò  $3N$  equazioni differenziali del secondo ordine per le posizioni di questi punti materiali in funzione del tempo.

Per le proprietà matematiche del sistema, la soluzione ne è identificata note le posizioni e le loro derivate prime, le velocità.

## MICROSTATI e SPAZIO delle FASI

Posizioni e velocità forniscono una *descrizione dinamica completa* dello stato.

La specificazione di posizioni e velocità degli atomi a questo istante di tempo (che denoteremo col simbolo  $X$ ) rappresenta dunque lo stato del mondo a questo istante di tempo, cioè il suo *microstato*.

# MICROSTATI e SPAZIO delle FASI

Posizioni e velocità forniscono una *descrizione dinamica completa* dello stato.

La specificazione di posizioni e velocità degli atomi a questo istante di tempo (che denoteremo col simbolo  $X$ ) rappresenta dunque lo stato del mondo a questo istante di tempo, cioè il suo *microstato*.

L'insieme di tutti i microstati forma uno spazio  $6N$ -dimensionale, essendo le posizioni degli  $N$  punti nell'usuale spazio tridimensionale ed avendo ciascuna delle velocità 3 componenti.

Questo spazio è chiamato *spazio delle fasi*  $\Omega$ .



## MICROSTATI e SPAZIO delle FASI

Dato che pochi grammi di un gas contengono un numero di molecole dell'ordine di  $10^{25}$  la dimensione dello *spazio delle fasi* è davvero inimmaginabilmente grande.

Supponiamo di poter seguire nella sua evoluzione temporale un microstato  $X$ , la funzione che ne determina l'evoluzione è usualmente detta flusso  $X_t = \varphi_t(X_0)$

Dal momento che considereremo un sistema isolato (e l'universo è un sistema isolato per definizione) ci restringeremo a considerare un sottoinsieme di  $\Omega$  costituito dai punti di energia costante.

Il problema dell'**irreversibilità** si pone dunque in questo modo:

Si possono spiegare leggi macroscopiche irreversibili in termini delle leggi microscopiche reversibili che regolano il movimento degli atomi?

# L'approccio di BOLTZMAN

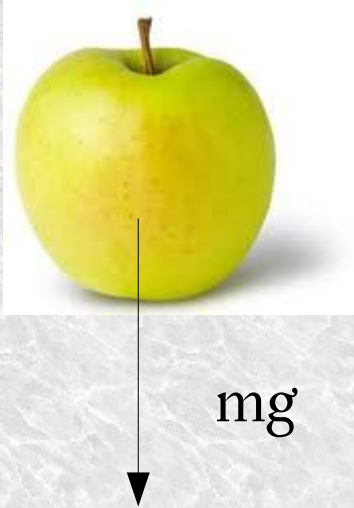
*Democrito:*

*Esistono solo gli atomi e lo spazio vuoto.*

Qualunque proprietà macroscopica di un certo corpo è descritta da un'opportuna funzione  $Y=f(X)$  del suo microstato  $X$ .

# L'approccio di BOLTZMAN

Introduciamo un altro concetto: la **variabile macroscopica**.



Il centro di massa di una mela che cade è un tipico esempio di variabile macroscopica: ci basta quello per descrivere il moto della mela, gli atomi della mela collettivamente “seguono” il moto del centro di massa.

È proprio l'evoluzione autonoma delle variabili macroscopiche a rendere invisibili gli atomi.

Probabilmente questa caratteristica del mondo ha reso l'ipotesi atomica controversa, ma è anche questa (relativa) autonomia del mondo macroscopico che ci ha permesso, indipendentemente dalla teoria atomica, di scoprirne le leggi.

# L'approccio di BOLTZMAN

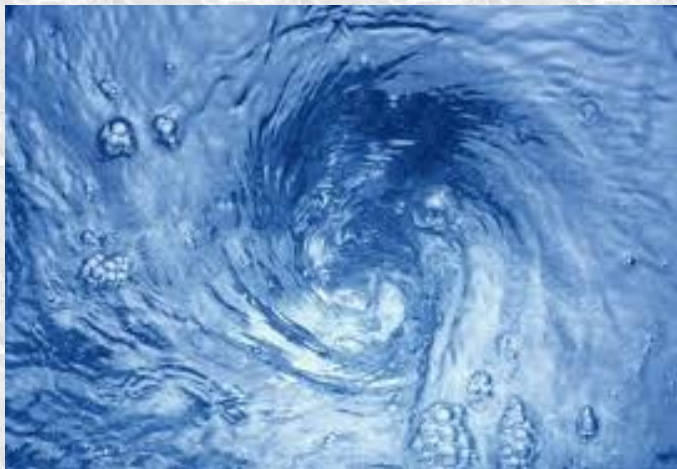
Introduciamo un altro concetto: la **variabile macroscopica**.



mg



Il centro di massa di una mela che cade è un tipico esempio di variabile macroscopica: ci basta quello per descrivere il moto della mela, gli atomi della mela collettivamente “seguono” il moto del centro di massa.



Descrivere l'acqua che scorre non è altrettanto semplice.

# L'approccio di BOLTZMAN

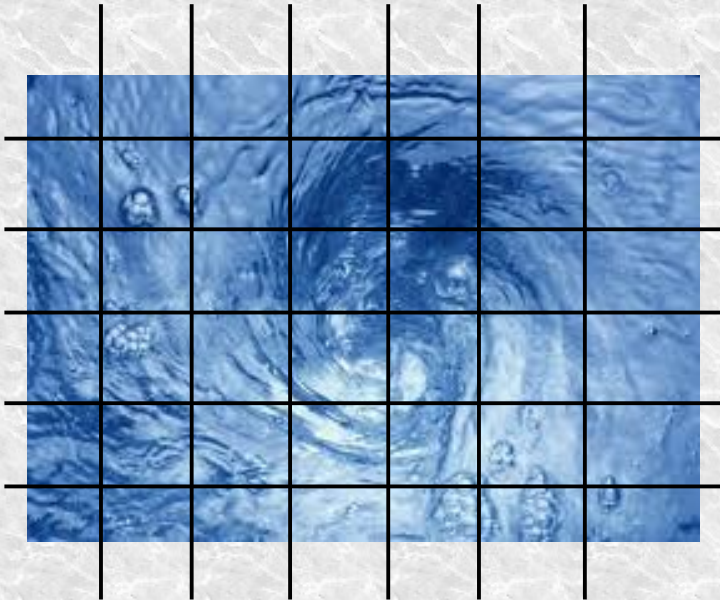
Introduciamo un altro concetto: la **variabile macroscopica**.



$mg$



Il centro di massa di una mela che cade è un tipico esempio di variabile macroscopica: ci basta quello per descrivere il moto della mela, gli atomi della mela collettivamente “seguono” il moto del centro di massa.



Descrivere l'acqua che scorre non è altrettanto semplice.

Possiamo dividere l'acqua in cellette molto più grandi dell'atomo ma molto più piccole del volume totale e descrivere il moto in termini della posizione e della velocità del centro di massa di ciascuna celletta.

# L'approccio di BOLTZMAN

## MACROSTATI e MICROSTATI.

Dal punto di vista microscopico le variabili macroscopiche sono funzioni sullo spazio delle fasi  $Y=f(X)$ .

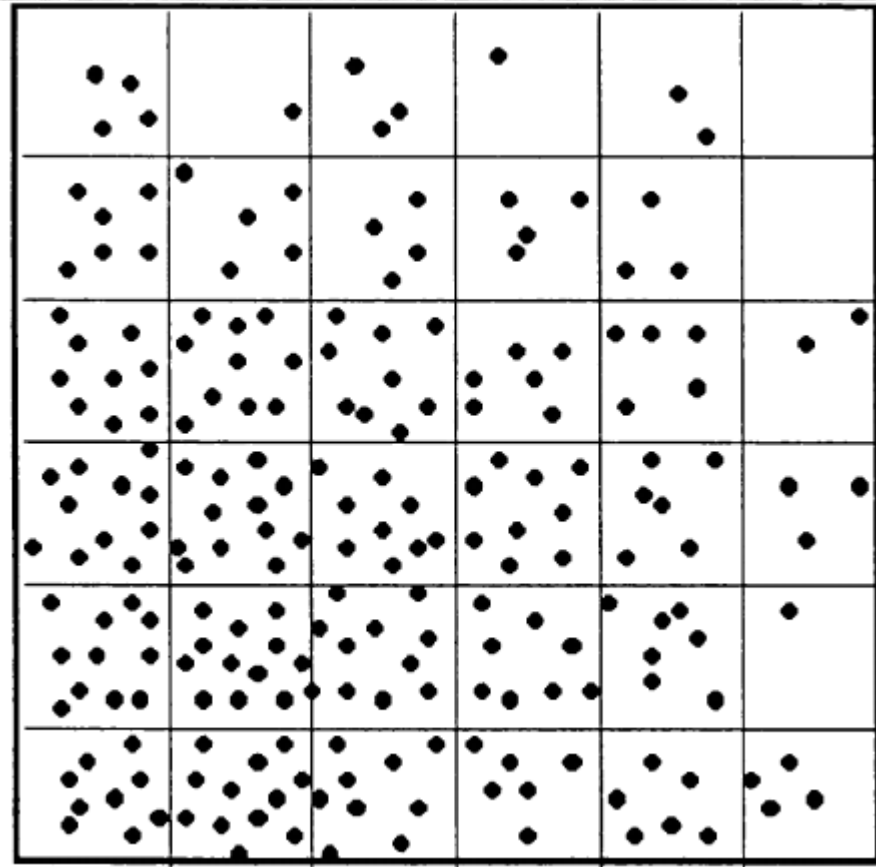
In primoluogo sono funzioni macroscopiche, cioè variano molto lentamente nello spazio delle fasi.

# L'approccio di BOLTZMAN

## MACROSTATI e MICROSTATI.

Dal punto di vista microscopico le variabili macroscopiche sono funzioni sullo spazio delle fasi  $Y=f(X)$ .

In primoluogo sono funzioni macroscopiche, cioè variano molto lentamente nello spazio delle fasi.



Non basta che  $X$  e  $X'$  siano punti diversi nello spazio delle fasi perchè  $f(X)$  e  $f(X')$  siano diversi, occorre che  $X$  e  $X'$  siano punti molto “lontani”.

Una differenza di posizioni di  $10^{-6}$  cm potrebbe ad esempio non comportare alcuna differenza macroscopica.



# L'approccio di BOLTZMAN

La temperatura di un corpo è l'energia cinetica totale degli atomi divisa per il numero N di atomi che formano il corpo, in formule:

$$T = \frac{1}{k_B} \frac{1}{N} \sum_1^N \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2$$

Dove  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K è la costante di Boltzmann e N è dell'ordine del numero di Avogadro  $6 \cdot 10^{23}$ .

# L'approccio di BOLTZMAN

La temperatura di un corpo è l'energia cinetica totale degli atomi divisa per il numero  $N$  di atomi che formano il corpo, in formule:

$$T = \frac{1}{k_B} \frac{1}{N} \sum_1^N \frac{1}{2} m \vec{v}_i^2$$

Dove  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K è la costante di Boltzmann e  $N$  è dell'ordine del numero di Avogadro  $6 \cdot 10^{23}$ .

Come si vede dalla formula, permutare gli atomi non cambia  $T$ .

Inoltre anche cambiando la velocità di molte molecole ( $10^{15}$  !) la temperatura misurata non cambia, nei limiti in cui può essere sperimentalmente misurata.

# L'approccio di BOLTZMAN

Le considerazioni sulla temperatura fatte fin qui sono valide più in generale. Consideriamo  $Y=f(X)$  che possiamo descrivere, con precisione arbitraria, assumendo che i possibili valori di questa funzione formino un insieme discreto .

Chiamiamo questi valori  $y_1, y_2, \dots, y_i$

# L'approccio di BOLTZMAN

Le considerazioni sulla temperatura fatte fin qui sono valide più in generale. Consideriamo  $Y=f(X)$  che possiamo descrivere, con precisione arbitraria, assumendo che i possibili valori di questa funzione formino un insieme discreto .

Chiamiamo questi valori  $y_1, y_2, \dots, y_i$

Ad ogni valore  $y_i$  corrisponde una ben definita regione dello spazio delle fasi: si tratta dell'insieme  $M_i$  dei punti  $X$  tali che  $f(X)=y_i$

Le variabili macroscopiche sono dunque funzioni molti a uno (moltissimi a uno!!), cioè esiste un'enorme quantità di microstati che sono associati allo stesso valore di una variabile microscopica.

# L'approccio di BOLTZMAN

Nota: per ora stiamo considerando solo una variabile macroscopica, è chiaramente una semplificazione, in generale un macrostato sarà definito da più variabili macroscopiche (Temperatura, pressione, ...)

Da un punto di vista fisico, c'è un'altra differenza a cui occorre prestare attenzione: se siano “poche” o “tante” variabili macroscopiche per caratterizzare un macrostato.

# L'approccio di BOLTZMAN

Nota: per ora stiamo considerando solo una variabile macroscopica, è chiaramente una semplificazione, in generale un macrostato sarà definito da più variabili macroscopiche (Temperatura, pressione, ...)

Da un punto di vista fisico, c'è un'altra differenza a cui occorre prestare attenzione: se siano “poche” o “tante” variabili macroscopiche per caratterizzare un macrostato.

Il caso in cui bastano poche variabili è quello tipico dell'**equilibrio**

L'altro è tipico del **non equilibrio**

Definiamo  $M_E$  il sottoinsieme dello spazio delle fasi associato al macrostato di equilibrio.

# L'approccio di BOLTZMAN

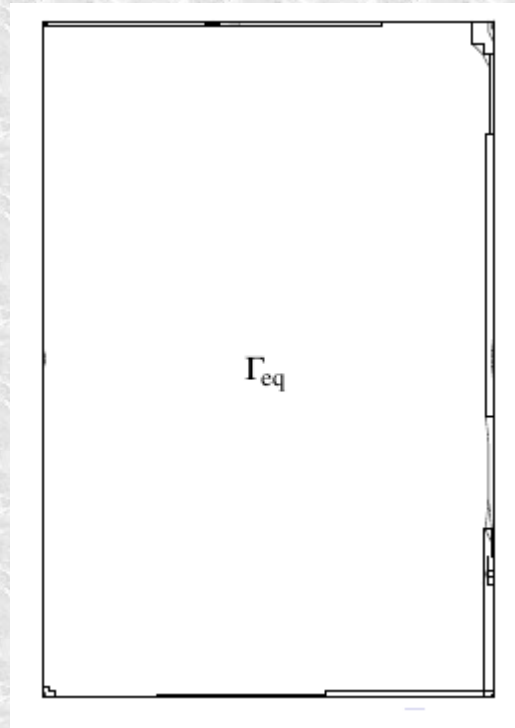
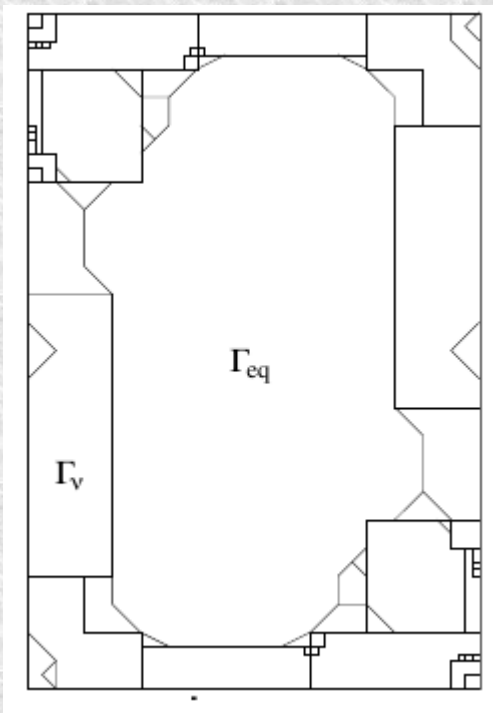
La definizione che abbiamo dato di temperatura è quella di una distribuzione statistica.

La funzione di distribuzione è esattamente analoga a quella che consideriamo se facciamo una statistica su una popolazione.

La nozione di distribuzione statistica si applica a qualsiasi microstato, anche a quelli di non equilibrio.

# L'approccio di BOLTZMAN

La spiegazione di Boltzmann dell'IRREVERSIBILITÀ è proprio legata a questo. **Lo spazio delle fasi associato al macrostato di equilibrio è molto (molto) più grosso di quello associato ai macrostati di non equilibrio.**



È una **proprietà tipica** degli stati di non equilibrio di evolvere nello stato di equilibrio, questo senza bisogno di nessuna “driving force” misteriosa.

$$\frac{V_{macrostatoeq}}{V_{macrostatoiniziale}} \approx 10^{10^{23}}$$



*Pausa:*

*fin'ora ho parlato di cose che sono nel mio campo, ma quali considerazioni filosofiche ne conseguono?*

→ In relazione al determinismo

→ In relazione al riduzionismo

# *Questo è solo un inizio*

→ *Si può entrare nel merito della meccanica statistica dell'equilibrio, anche con poca matematica*

→ *Si può entrare nel merito di come misuro tutto questo e dare una spiegazione quantitativa (che ho studiato, ma non so ancora spiegare con poca matematica)*

→ *Ci sono critici illustri che non ho considerato (uno fra tutti Prygogine)*

→ *Fin'ora il ragionamento seguito è classico, ma lo stesso ragionamento è valido anche in un contesto quantistico. (Gladstein, Phys. Rev E 81)*

→ *... e molto altro ancora*

# *Un po' di bibliografia*

*V. Allori, M. Dorato, F. Ludisia, N. Zanghì, “La Natura delle Cose, introduzione ai fondamenti e alla filosofia della fisica”, ed. Carrocci 2005*

*Voci del dizionario: Determinismo-Indeterminismo, Riduzionismo, Meccanica*

*R. Feynmann “La legge fisica”*

*E poi autori ancora da esplorare da Boltzmann stesso a Bricmont, J. Bell...*