Che cosa sono e a che cosa servono i frattali?

Alberto Strumia - Università di Bari e collaboratore del C.I.R.A.M., Università di Bologna

Si parla spesso dei frattali e se ne vedono riprodotte delle immagini spesso spettacolari. Ma che cosa sono e a che cosa servono i frattali? Ecco una rassegna che può aiutare a rispondere a questi quesiti e che illustra, oltre ad alcune tecniche elaborate con i più conosciuti linguaggi di programmazione per realizzare immagini bidimensionali e tridimensionali, i fondamenti matematici che stanno alla base di questo nuovo e appassionante capitolo della geometria, della fisica e dell'informatica

Introduzione

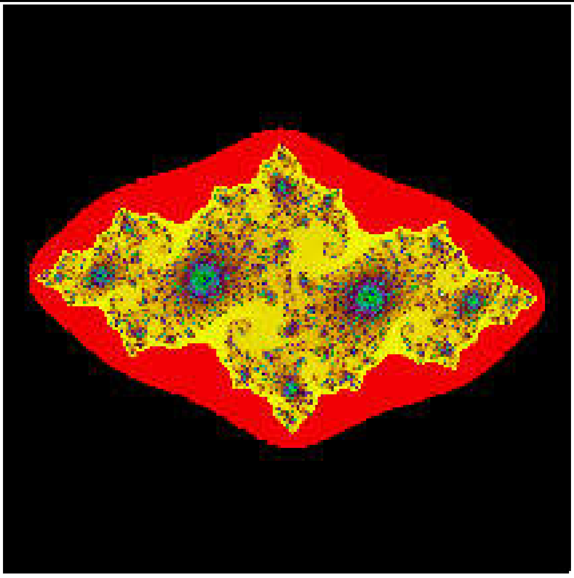
Da circa una decina d'anni i frattali sono divenuti molto di moda e non c'è libreria scientifica, e non solo scientifica, che non sia ricca di magnifiche pubblicazioni a colori con le straordinarie figure degli insiemi di Mandelbrot e di Julia, che tra i frattali sono sicuramente i più famosi.
Certamente l'occhio vuole, e giustamente, la sua parte e queste immagini, che in qualche modo ripropongono, in chiave informatica, l'antica visione pitagorica secondo la quale tutto è numero e ogni armonia è rapporto tra numeri, hanno conquistato la sensibilità artistica anche dei non esperti di matematica e calcolo ricorrente. Ma è tutto qui?
Ecco che chi non si accontenta di soddisfare solamente l'occhio ma si pone quesiti più profondi, giustamente si domanda:
—Quale base scientifica c'è dietro ai frattali?
—Hanno qualche utilità dal punto di vista applicativo?
—Come mai solo da pochi anni se ne parla?
—Come si possono realizzare al computer delle immagini frattali?
Nel corso di questo articolo cercherò di offrire alcune linee di risposta a queste domande.

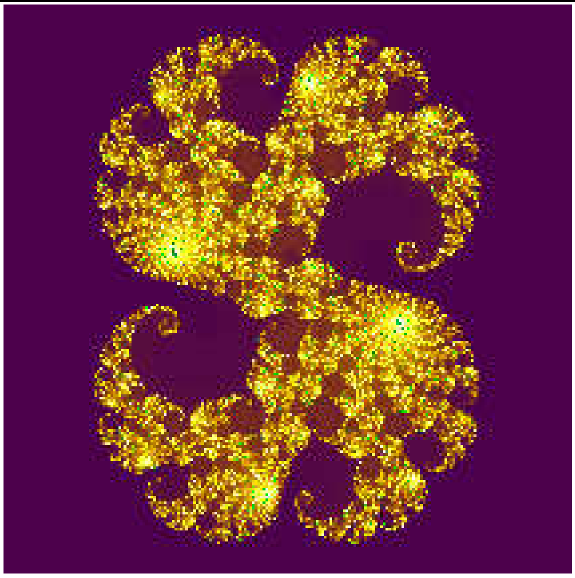
1.Quale base scientifica c'è dietro ai frattali?

Ai frattali si è giunti partendo da differentiapprocci e seguendo vie di indagine diverse, che all'inizio non avevano tra loro alcun apparente elemento in comune; solo in un secondo tempo ci si è accorti della stretta parentela che intercorre tra i risultati ottenuti nei diversi settori di ricerca. Del resto, come quasi sempre accade nell'ambito dei problemi fisico-matematici, le diverse questioni, così come pure i risultati, possono essere esaminati dai tre classici punti di vista che costituiscono tre modi di vedere complementari:
—il punto di vista analitico
—il punto di vista geometrico
—il punto di vista fisico–dinamico.
Cerchiamo di esaminarli brevemente.

1.1.I frattali dal punto di vista analitico

Il punto di vista dell'*analisi matematica* lavora di regola con le formule, senza rappresentazioni, e pone domande che spesso non sono facili da intuire e appaiono immediatamente non visualizzabili e non facilmente comprensibili; eppure molti problemi di natura fisica appaiono ricollegarsi, in un secondo momento, a volte anche con gli aspetti apparentemente più astrusi dell'analisi.
Nel primo ventennio del '900 il matematico francese Gaston Julia stava studiando il comportamento della serie di variabile complessa generata dalla successione definita ricorsivamente dalla legge $z_{n+1} = z_n^2 + c$, con $n = 1,2,3,\ldots$ e c parametro complesso fissato e si chiedeva al di là di

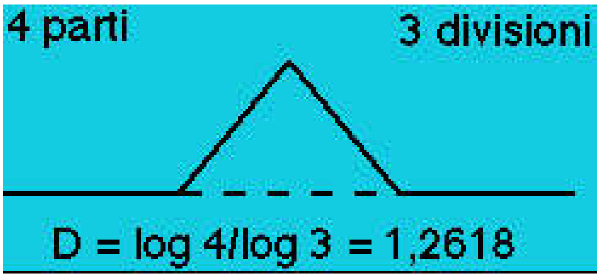




quale frontiera nel piano complesso essa fosse divergente.
Le sue conclusioni furono che una simile frontiera doveva essere frastagliata all'infinito e quindi praticamente irrappresentabile. Ingrandendone una parte, per quanto piccola, essa ripeteva le stesse contorsioni presenti in grande scala. La serie divergeva all'esterno della frontiera e convergeva o oscillava al suo interno. Questa frontiera infinitamente frastagliata ad ogni scala sembrava essere una sorta di mostro matematico! Non si poteva mai approssimare con un segmento di retta neppure in un intorno molto piccolo di un suo punto. Analogo comportamento hanno le curve di Peano, matematico italiano ben noto per la sua assiomatizzazione dell'aritmetica, le quali sono esse pure infinitamente frastagliate, al punto che tendono a distribuirsi sull'intera superficie del piano invadendola completamente come una sorta di edera matematica che ricopre completamente il fusto di un albero. Questi illustri personaggi dovettero pensare di essere giunti al limite dell'astrazione matematica e non avrebbero mai immaginato che, qualche decennio dopo di loro, l'impiego del computer avrebbe reso rappresentabili accurate approssimazioni delle loro curve sul video di una macchina capace di calcolarne i parametri con un grado di precisione estremamente elevato. Le figg.1 e 2 rappresentano due insiemi di Julia per due diversi valori del parametro *c.*

1.2. I frattali dal punto di vista geometrico

Dal punto di vista geometrico le caratteristiche dei frattali risultano molto più intuitive in quanto possiamo rappresentare visivamente i risultati delle procedure che generano un immagine frattale. Un esempio molto semplice è offerto dalla seguente procedura geometrica che genera la curva di Von Koch.
Consideriamo un segmento e la seguente operazione geometrica che indichiamo con ***A****: Dividere ogni segmento in 3 parti uguali e sostituire la parte centrale con due segmenti uguali a quello rimosso e tali da formare un triangolo equilatero al quale è stata tolta la base coincidente con il segmento rimosso*



ilerando questa procedura su ognuno dei segmenti così ottenuti si genera una spezzata via via più frastagliata. La curva di Von Koch si ottiene come limite dell'operazione precedente quando viene iterata infinite volte su ogni segmento ottenuto. Il calcolatore consente l'iterazione un numero molto grande di volte, in modo tale da approssimare abbastanza significativamente la figura limite. In linguaggio analitico diciamo che le curve di ordine superiore si ottengono mediante la legge ricorsiva $x_{n+1} = \boldsymbol{A}\ x_n$. Impostando questo processo iterativo sui lati di un triangolo equilatero è possibile ottenere figure molto

La dimensione frattale

Spesso si parla di *dimensione frattale* come di quella proprietà che definisce i frattali stessi. Si è soliti, infatti, definire i frattali come oggetti dotati di una *dimensione frattale* maggiore dell'unità che può essere anche frazionaria. Che cosa si intende per dimensione frattale? La dimensione frattale è la frazione dell'area di piano che viene ricoperta da una curva frattale, aumentata di un'unità. Ad esempio la *curva di Peano* di cui si è parlato poco fa ha dimensione frattale 2, in quanto riempie tutto il piano. La curva di Von Koch, invece ha dimensione frattale D = 1,2618.
Dal punto di vista quantitativo, è possibile definire una quantità, detta *dimensione frattale* che risulta legata al tipo di operazione A che si fa agire ripetutamente sulla figura di partenza. La dimensione frattale non va confusa con la *dimensione topologica* che è quella che conosciamo abitualmente. La dimensione topologica è sempre un intero e per una curva è sempre uguale a 1.
Per farsi un'idea di come nasce il concetto di dimensione frazionaria si può dividere un parallelepipedo di dimensione ordinaria D in N sottoparallelepipedi, dividendo ciascuno spigolo in K parti uguali. Quindi sarà $N = K^D$. Si ha quindi :

$$D = \log N / \log K.$$

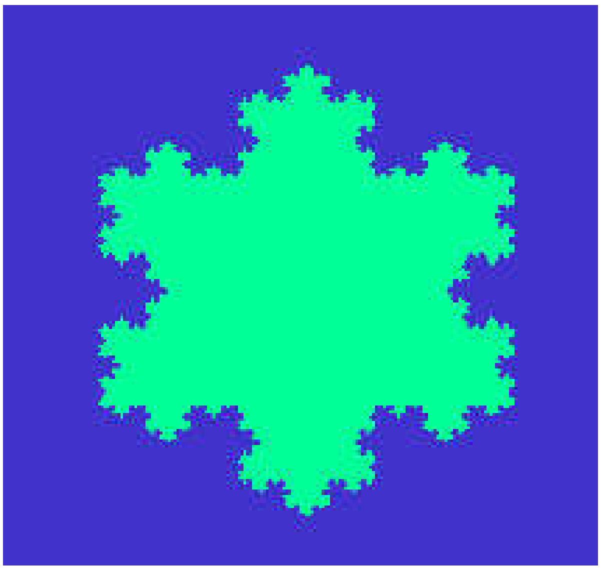
Per esempio per la curva poligonale di von Koch è K = 3 (numero di parti in cui si divide ciascun segmento) e per costruirla si sostituisce al segmento di partenza un sistema di N = 4 segmenti. Si ha dunque D = log 4 / log 3 = 1,2618, valore intermedio fra uno e due. Dunque

- La dimensione frattale è una misura della frazione di piano occupata da una curva.
- Si può anche considerare la *dimensione frattale come una misura quantitativa del grado di* complessità di un frattale.

eleganti che ricordano la forma di un cristallo di neve. la fig.4 ne offre un esempio. La ripetizione all'infinito della medesima struttura all'interno di ogni parte di una figura è una proprietà nota in geometria come *autosimilarità* ed è una conseguenza del processo iterativo con cui si è costruita l'immagine; è una proprietà tipica che caratterizza i frattali. A causa di questa proprietà i frattali, pur essendo delle curve, quindi degli oggetti topologicamente unidimensionali, tendono a riempire una certa frazione della superficie del piano (dimensione frattale).

1.3.I frattali dal punto di vista fisico–dinamico

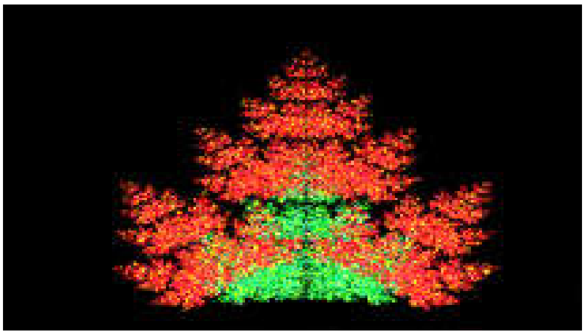
Il punto di vista della dinamica dei sistemi giunge ai frattali attraverso il problema del *caos.* Già Poincaré aveva osservato che i sistemi governati da equazioni evolutive non lineari possono presentare il fenomeno dell'instabilità: questo significa che una piccola perturbazione delle condizioni iniziali può crescere esponenzialmente con i tempo, per cui l'evoluzione del sistema diviene del tutto impredicibile.
È come se, a causa della non linearità le equazioni divenissero pressoché inservibili per fare previsioni attendibili.
Ill problema è stato accantonato per un lungo periodo in cui i fisici si sono occupati quasi

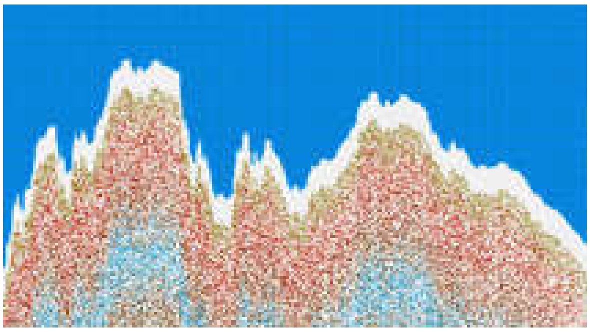


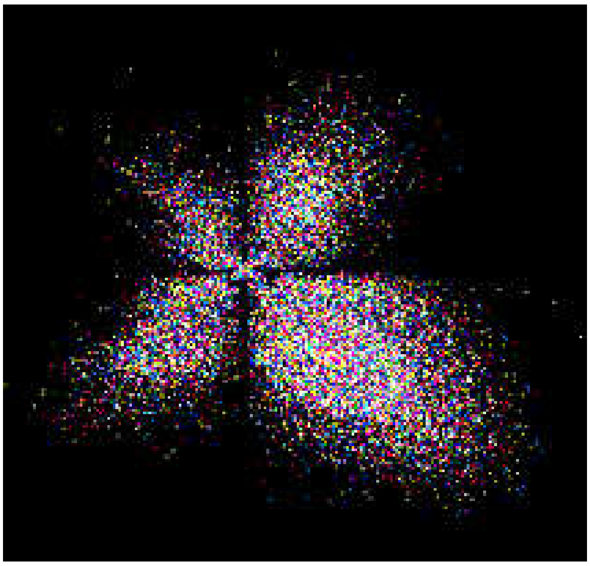
esclusivamente di meccanica quantistica e hanno abbandonato la meccanica classica non lineare.
Bisogna aspettare fino agli anni ’60, quando Lorenz ha scoperto l’attrattore caotico che porta il suo nome, perché lo studio sistematico dei sistemi dinamici non lineari e degli *attrattori strani* (caotici) inizi il suo vero cammino.
Se si seziona uno di questi attrattori con un piano trasversale, ottenendo così la sua *mappa di Poincaré,* si ottiene una collezione di punti che tende a riempire una certa frazione del piano e a riprodurre la stessa distribuzione a tutte le scale di ingrandimento: si tratta di un insieme frattale.
Spesso questo non è esteticamente elegante, tuttavia la le loro proprietà matematiche non differiscono essenzialmente da quelle delle figure più belle.
L’approccio dinamico ai frattali, sia esso di natura differenziale o algebrica, è poi molto importante anche perché consente di evidenziare il rapporto che c’è tra i frattali e il caos, per il fatto che figure ordinate vengono generate da una dinamica caotica.

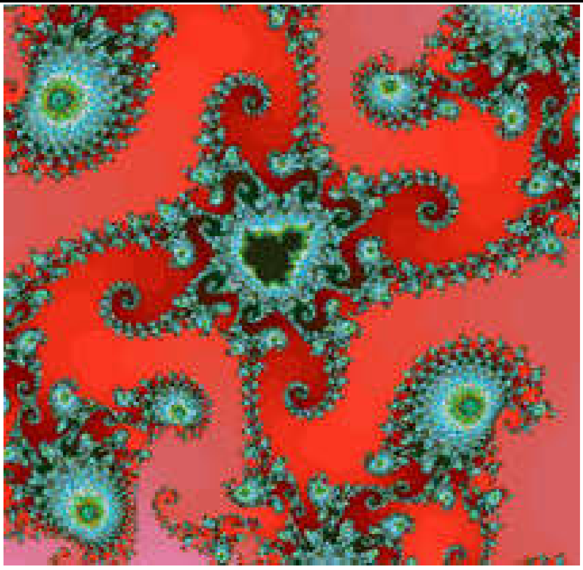
2.I frattali hanno qualche utilità dal punto di vista applicativo?

A che cosa servono i frattali? Questa è una domanda forse ancora prematura. Del resto si racconta a volte un aneddoto a proposito della scoperta dell’induzione elettromagnetica. Si dice che Faraday, interpellato sulla questione al momento della scoperta, rispondesse che di un bambino appena nato non si può dire subito se da adulto sarà un genio oppure no… Comunque la ricerca sui frattali in questo momento ha assunto già parecchi risvolti diretti all’applicazione. Navigando attraverso i server WWW di Internet, oltre a non pochi siti che esibiscono belle immagini, se ne trovano diversi appartenenti a centri di ricerca sulle applicazioni dei frattali ai campi più diversi: dalla biologia, alla medicina, ai materiali elettromagnetici e meccanici, alla meteorologia, alla botanica, ecc.
Tutto questo è comprensibile, in quanto la geometria della natura sembra essere molto più aderente allo schema frattale che a quello tradizionale. Dalla forma del cervello a quella delle diramazioni dei dendriti nervosi, dal profilo frastagliato delle foglie allo schema di sviluppo dei coralli, dalla forma delle scariche dei fulmini alla distribuzione dei domini nel materiali ferromagnetici, dai profili delle montagne e delle nubi alle linee di frattura dei materiali da costruzione, tutto sembra essere frattale. E questi campi di ricerca sono ormai divenuti oggetto anche di numerosi convegni scientifici internazionali. Un altro settore di grande interesse per l’informatica delle reti e delle telecomunicazioni è poi quello della compressione delle immagini con metodi frattali: la possibilità di inviare i pochi dati numerici necessari a ricostruire un’immagine perfetta mediante una regola ricorsiva piuttosto che le informazioni relative ad ogni pixel di un’immagine significherebbe, oltre ad un risparmio di tempo rilevante, l’eliminazione pressoché totale degli errori.
Non mancano poi anche importanti ripercussioni in campo logico ed epistemologico dei problemi sollevati dai metodi del calcolo ricorrente. Le attuali assiomatiche, seguendo lo schema dei *Principia Mathematica* di Russell, escludono a priori l’autoreferenzialità, mentre i processi ricorsivi al calcolatore, compresi quelli che generano immagini frattali, sono per definizione autoreferenziali. L’autosimilarità geometrica dei frattali altro non è che la visualizzazione della ricorsività delle formule analitiche e dell’autoreferenzialità logica.
Non mancano a questo proposito ricerche di logici e matematici sulla possibilità di costruire sistemi assiomatici che ospitano enunciati autoreferenziali (cioè che parlano di se stessi) e collezioni autoinclusive (cioè che includono se stesse). È lo studio della









complessità, di cui la struttura dei frattali costituisce un esempio, a sollecitare queste ricerche. Si cercano perfino accostamenti con le antiche filosofie di Aristotele e S.Tommaso d'Aquino e confronti con la dottrina medioevale dell'*analogia,* ripensata in rapporto all'autoinclusività delle collezioni.

3.Come mai solo da pochi anni se ne parla?

A questo punto risulta ovvio che la ricerca sui frattali ha ricevuto grande impulso grazie alla presenza del computer e al rapido incremento delle sue prestazioni in termini di velocità ed efficienza. Solo qualche anno fa alcune delle immagini qui riportate potevano richiedere ore ed ore di tempo macchina, quando oggi gli stessi calcoli si possono effettuare nel giro di pochi minuti. Inoltre il computer offre, per la prima volta in maniera consistente, anche ai matematici la possibilità di compiere degli *esperimenti,* cioè di esaminare il comportamento di certe leggi ricorsive senza ancora conoscerne a pieno la teoria e di essere aiutati da questi esperimenti ad intravvedere i teoremi da dimostrare. Una sorta di ripresa, se pure molto sofisticata, dell'antico metodo di Archimede che si serviva dei suoi esperimenti di meccanica per scoprire i teoremi matematici da dimostrare.

4.Principali tipi di frattali

Possiamo classificare i diversi tipi di frattali che si conoscono secondo criteri differenti. Vediamo ora, sotto forma di schema, alcune categorie di classificazione.

a)classificazione *fisico-geometrica*

Distingue i frattali su base *qualitativa* (fisica) per le loro caratteristiche geometriche e fisiche in immagini che:

—corrispondono ad *oggetti verosimili,* come felci, foglie, profili di montagne, nubi, paesaggi, insetti, ecc.;

—non corrispondono ad oggetti verosimili, ma sono piuttosto *figure decorative* dotate spesso anche di altre simmetrie oltre a quella autosimilare;

b)classificazione *analitico-geometrica*

Distingue i frattali su base *quantitativa* (matematica) a partire dal tipo di legge ricorsiva mediante la quale vengono generate le immagini. Si hanno in questo modo:

—frattali generati dall'iterazione di funzioni di *variabili reali* a valori vettoriali reali che possono essere:

- **lineari:** metodo *IFS (**I**terated **F**unction **S**ystems);*
- **non lineari**

Questo metodo è particolarmente impiegato per realizzare immagini verosimili.

—frattali generati dall'iterazione di una funzione di *variabile complessa* a valori complessi imponendo certe condizioni di non convergenza della serie associata (insiemi di Mandelbrot e Julia: standard e generalizzati).

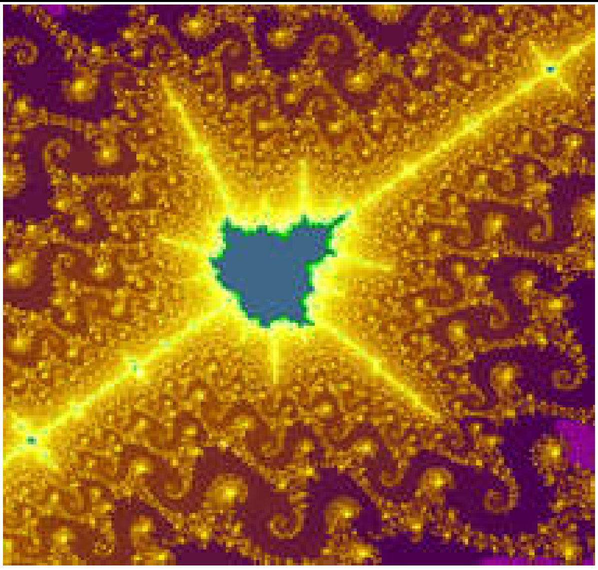
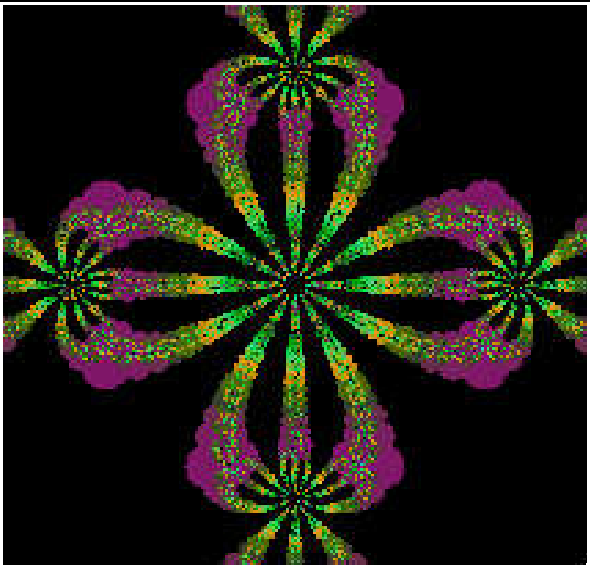
c)classificazione *dinamico-fisica*

Questa classificazione identifica i frattali che nascono da problemi di natura fisica governati da una *dinamica caotica.*

Esempi di questo genere sono offerti, ad esempio:

—da alcuni modelli fisici di *domini ferromagnetici* che generano dei frattali;

—dalle *mappe di Poincaré* di attrattori strani associati a sistemi dinamici instabili.

5.Come si possono realizzare al computer delle immagini frattali?

Tutte le immagini riprodotte in questo articolo sono state realizzate utilizzando un computer MacintoshSi e una workstation Sun Spark10 con l'ausilio di vario software e differenti metodologie di programmazione.

—I ***linguaggi di programmazione*** utilizzati sono stati, in un primo tempo, *QuickBasic su Macintosh* per le immagini di tipo IFS generate direttamente su un video a 256 colori, *PostScript* su Sun per le curve di Von Koch, *C* per tutte le altre generate su file in formato RAW a un canale. Le immagini così generate sono state "lette" da un browser tipo *NCSA Ximage* che ha consentito di associare una mappa di colori adeguata. Il vantaggio di questa metodologia d'impiego del *C* è quello della esportabilità dei files di sorgente da un tipo di macchina ad un'altra essendo indipendente dall'hardware, in quanto si è fatto uso delle sole librerie ANSI standard. La collezione completa delle immagini commentate è reperibile sul server del C.I.R.A.M.– Università di Bologna all'indirizzo WWW:

http://eulero.ing.unibo.it/~strumia/Menu.html

5.1.Il metodo IFS

Il metodo IFS si basa sull'iterazione di una trasformazione lineare delle coordinate (*trasformazione affine*) per ottenere una figura o parte di una figura spesso *verosimile.* La legge di trasformazione è del tipo:

$$x_{n+1} = a\, x_n + b\, y_n + e,\quad y_{n+1} = c\, x_n + d\, y_n + f$$

Il valore dei coefficienti *a, b, c, d, e, f* determina la forma dell'immagine ottenuta. Con questo metodo si possono ottenere immagini di felci, foglie, profili di montagne, ecc. Sovrapponendo più immagini ottenute in questo modo si riescono a costruire interi paesaggi verosimili. Utilizzando tre coordinate (x, y, z) anziché due si realizzano immagini prospettiche tridimensionali. In fig.5 vediamo un'immagine che riproduce una foglia autunnale e in fig.6 quella di una montagna innevata.

5.2.Iterazione di funzioni reali non lineari

Lo stesso metodo si può applicare anche utilizzando funzioni reali non lineari per ottenere figure simili a insetti, nebulose, ecc. In questo caso la legge di trasformazione ricorsiva si scrive nella forma:

$$x_{n+1} = f(x_n , y_n), \qquad y_{n+1} = g(x_n , y_n)$$

La fig.7 riproduce l'immagine di una nebulosa così ottenuta.

5.3.Iterazioni di funzioni di variabile complessa

Sotto questo titolo si trovano i classici e assai famosi insiemi di *Mandelbrot* e di *Julia,* come pure gli insiemi ottenuti applicando *il metodo di Newton* per la determinazione degli zeri di polinomi complessi.

LISTATI DEI PROGRAMMI

QuickBasic per MacIntosh

Programma per la fig.6

```
'----------------------------------
------------
'| Mountains
'| by Alberto Strumia, Dec. 1992
'----------------------------------------------
'--- set array dimensions ----------
DIM x(3), y(3), F(3)
DIM a(3),b(3),c(3),d(3),e(3),ff(3)
'--- set constant parameters ------
x(0)=0: x(1)=30: x(2)=60: x(3)=100
F(0)=0: F(1)=50: F(2)=40: F(3)=10
d(1)=.5: d(2)=-.5: d(3)=.23
'----------------------------------------------
BackColor 305      ' ---blue sky color
CLS        '---------paint sky
'--- define 3 affine transforms -------
FOR n=1 TO 3
b=x(3)-x(0):
a(n)=(x(n)-x(n-1))/b
e(n)=(x(3)*x(n-1)-x(0)*x(n))/b
c(n)=(F(n)-F(n-1)-d(n)*(F(3)-F(0)))/b
ff(n)=(x(3)*F(n-1)-x(0)*F(n)-
d(n)*(x(3)*F(0)-x(0)*F(3)))/b
NEXT n
'--------------------- paint snow
ForeColor 30
x=0: y=0
FOR n=1 TO 10000
K=INT(3*RND-.0001)+1
xx=a(K)*x+e(K)
yy=c(K)*x+d(K)*y+ff(K)
x=xx: y=yy
LINE(6.2*x,400+2*s-5*y)-(6.2*x,450)
NEXT n
'---------------------- paint rocks
FOR s=1 TO 350
x=0: y=0
FOR n=1 TO 1000
K=INT(3*RND-.0001)+1
xx=a(K)*x+e(K)
yy=c(K)*x+d(K)*y+ff(K)
x=xx: y=yy
ForeColor s+60+33*RND
LINE(6.2*x,430+s-5*y)-(6.2*x,450)
NEXT n,s
'----------- wait for exit command
LOCATE 1,1: INPUT z
END
```

PostScript

Programma per la curva di Von Koch

```
% PostScript program Koch.ps
% Created by A. Strumia - May 8,
1995
% define starting segment leghth
/a 400 def
% divide legnth by 3 twice
/a a 3 div def
/a a 3 div def
% define a procedure drawing an
% elementary segment
/segm { a 0 rlineto } def
% define a procedure dividing a
% segment in 3 parts and replacing
% its central part with 2 equal
% segments
/proc1 {
segm
-60 rotate
segm
120 rotate
segm
-60 rotate
segm
} def
% define a new procedure proc
% nesting the prcedure proc1 twice
/proc {
proc1
-60 rotate
proc1
120 rotate
proc1
-60 rotate
proc1
} def
% define a new procedure triang
% applying the procedure proc to
% any side of a regular triangle
/triang {
proc
120 rotate
proc
120 rotate
proc
closepath
fill
} def
% draw the plot and fill it with color
newpath
100 300 moveto
0 0 1 setrgbcolor
triang
stroke
showpage
```

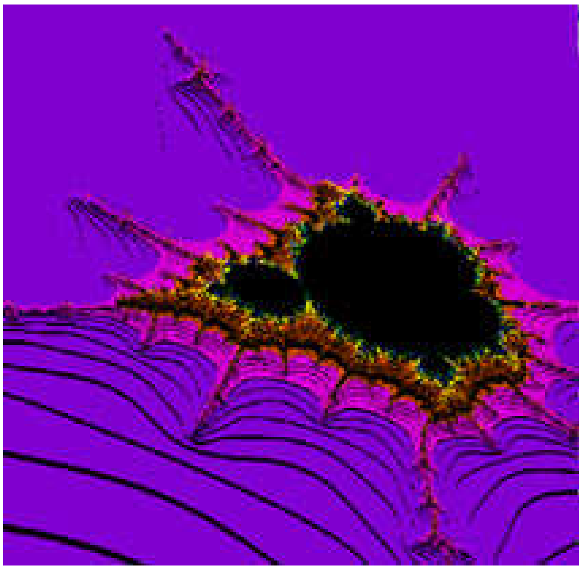
C

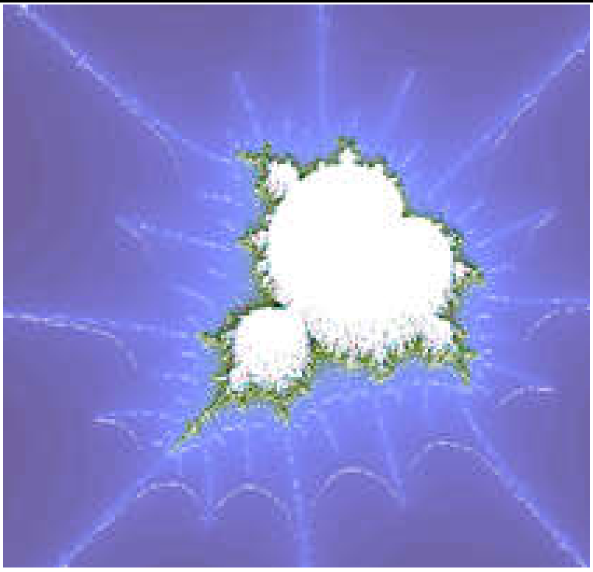
Programma per le figg.1 e 2.

```
/******************************************
* Generates a RAW format file of an
 * image of a Julia set (colorscale)
* C source file by Alberto Strumia
* April 1996
******************************************/
#include<stdio.h>
/* definition of constants */
#define Radius 10
#define Cx 0.7454294
#define Cy 0.113089
#define Side 1.7
#define M 400
#define Num 1024
/* main program */
main()
{
        int p, q, n, w;
double x, y, xx, yy, Incx, Incy;
        /* open image file */
        FILE *fp;
        fp = fopen("Julia.raw","w");
/* determine Julia set points */
        for (p = 1; p <= M; p++)
        {
        Incy = - Side + 2*Side/M*p;
        printf("%i %%\n", p*100/M);
        for (q = 1; q <= M; q++)
        {
        Incx = - Side + 2*Side/M*q;
        x = Incx;
        y = Incy;
        w = 200;
/* escape method */
        for ( n = 1; n <= Num; ++n)
        {
        xx = x*x - y*y - Cx;
        yy = 2*x*y - Cy;
        x = xx;
        if ( x*x + y*y > Radius )
        {
        w = n;
        n = Num;
        }
        }
        fprintf(fp, "%c", w/4 );
}
}
fclose(fp);
}

/* end of main program */
```

Per ottenere la fig.2 sostituire i valori alternativi: Cx –0.27334, Cy –0.00642



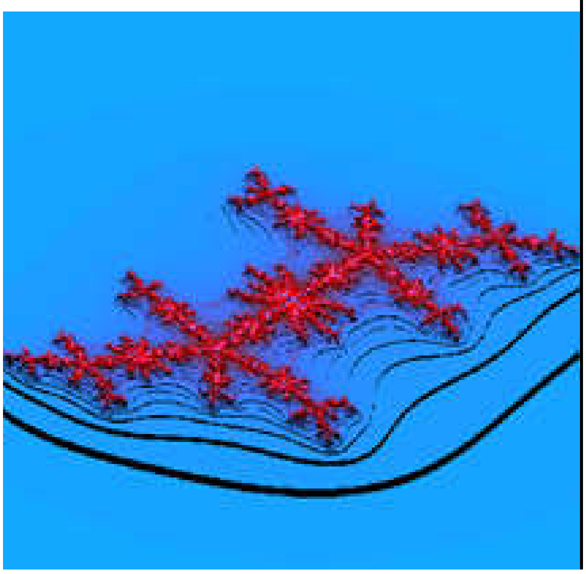


5.3.1.Insiemi di Mandelbrot e di Julia

Il problema analitico da cui traggono origine questi insiemi, come abbiamo accennato prima,
è quello della determinazione del dominio di non convergenza della serie complessa i cui termini sono definiti dalla legge ricorsiva:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

dove $z = x + i\,y$ è una variabile complessa.
—L'insieme di *Mandelbrot* è definito come dominio di non convergenza della serie quando si fissa il valore iniziale della variabile complessa $z_0 = 0$ e si fa variare il parametro c in un intervallo rettangolare del piano complesso. In alternativa lo si può anche definire, in maniera equivalente, come la regione del piano complesso i cui punti c,



identificano tutti gli insiemi di Julia connessi associati alla serie in questione.
—L'insieme di *Julia* è definito, invece, come il dominio di non convergenza della stessa seriequando si fissa un valore per il parametro c e si fa variare il valore iniziale z_0 in un intervallo rettangolare del piano complesso.
In queste rappresentazioni la simmetria autosimilare è particolarmente evidente ed elegante: alle diverse scale si riproducono le forme geometriche dell'intero insieme o delle sue parti all'interno delle parti più piccole.
Le figg.1, 2, 8, 9 ne sono una documentazione.

5.3.2.Il metodo di Newton

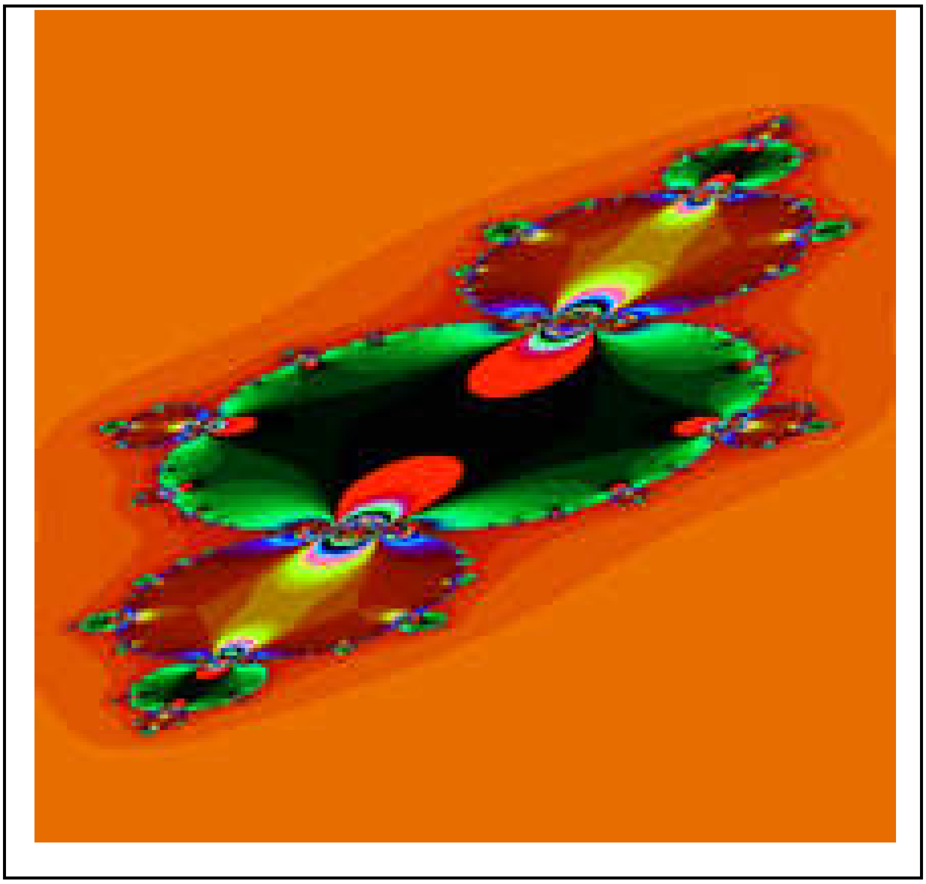
Anche il classico metodo di Newton per la determinazione approssimata degli zeri di un polinomio, applicato a polinomi di variabile complessa, consente di costruire immagini frattali. Il metodo si basa sull'approssimazione lineare di una funzione nell'intorno di un punto prescelto (sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine).

$$f(z) = f(a) + f'(a)\,(z - a) + \dots$$

Geometricamente ciò equivale a sostituire una curva con la sua tangente nelle vicinanze del punto di tangenza. La legge di ricorrenza da utilizzare è di conseguenza:

$$z_{n+1} = z_n - f(z_n)/f'(z_n)$$

La rappresentazione nel piano complesso del risultato di un certo numero di iterazioni al variare del punto iniziale genera delle immagini frattali come quella riportata in fig.10. Anche in questo caso l'autosimilarità è ben riconoscibile.



5.4.Immagini tridimensionali

Le figg.11, 12, 13 e 14 sono, infine, delle rappresentazioni tridimensionali di insiemi di Mandelbrot e di Julia, ottenute scrivendo un file C mediante uno shift diagonale durante la scansione del piano complesso. Questo metodo consente di ottenere anche effetti interessanti come l'effetto *neve* o *ghiaccio* e l'effetto *fuoco* che danno alle immagini un carattere particolarmente suggestivo.

6.Conclusioni

Ho cercato di presentare in maniera più sintetica possibile il quadro delle esperienze grafiche e di programmazione da me svolte sui frattali in un arco di tempo di qualche anno, documentandole con immagini e illustrando le tecniche utilizzate. La scelta delle tecniche, come si può vedere, è sempre stata orientata ai criteri:

—della massima semplicità dal punto di vista del lavoro di programmazione;

—dell'impiego di software avanzato già esistente per la gestione dei file grafici che fosse disponibile nei sistemi operativi più diffusi, quali Unix, DOS-Windows e MacOS, e quindi

—della massima esportabilità, tra macchine che lavorano con sistemi operativi differenti, dei files *sorgente* delle applicazioni da me realizzate e dei files *documento* delle immagini. I risultati ottenuti, dei quali in questo articolo è stato proposto un saggio, sono stati trasportati in linguaggio HTML e immessi nel Web server del C.I.R.A.M. (http://eulero.ing.unibo.it). L'esito del lavoro è senz'altro incoraggiante e c'è da augurarsi che possa costituire un punto di partenza anche per l'approfondimento di ricerche di carattere analitico–geometrico oltre che informatico e grafico. La speranza è che queste semplici realizzazioni, sia nella versione stampata, come in quella multimediale possano essere di stimolo e di aiuto anche ad altri ricercatori e agli studenti.

Ringraziamenti

Un sincero ringraziamento va al Direttore del C.I.R.A.M. Prof. Tommaso A.Ruggeri per la disponibilità dimostrata ad offrire le strutture informatiche dell'ottima rete del C.I.R.A.M. dell'Università di Bologna, al Dott. Leonardo Seccia per i preziosi consigli e a tutti i colleghi che hanno dimostrato apprezzamento per questa mia ricerca.

Bibliografia

[1]G.Julia, "Sur l'iteration de fonctions rationelles", J.Math. Pures Appl. **8**, 47 (1918);

[2]H.Weyl, *Symmetry,* Princeton University Press, Princeton 1952;

[3]B.B.Mandelbrot, *Fractals. Form, chance, and dimension,* W.H.Freeman & Co., San Francisco 1977;

[4]E.De Giorgi, M.Forti, V.M.Tortorelli, "Sul problema dell'autoriferimento", Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **80** (1986);

[5]H.O.Peitgen e P.H.Richter, *La bellezza dei frattali. Immagini di sistemi dinamici complessi,* Bollati Boringhieri, Torino 1987;

6]B.B.Mandelbrot, *Gli oggetti frattali,* Einaudi, Torino 1987;
[7]B.B. Mandelbrot, *La geometria della natura. Sulla teoria dei frattali,* ed. Theoria, Roma-Napoli 1989;
[8]J.Gleick, *Caos,* Rizzoli, Milano 1989;
[9]G.Nicolis e I.Prigogine, *La complessità. Esplorazioni nei nuovi campi della scienza,* Einaudi, Torino 1991;
10]A.Strumia, *Introduzione alla filosofia delle scienze,* Edizioni Studio Domenicano, [Bologna 1992; "Alcuni esempi di frattali e caos", *Atti del Convegno "Didattica matematica con l'ausilio del personal computer",* Università degli Studi di Bologna, Facoltà di Ingegneria–C.I.R.A.M., Bologna, 1992;
[11]E.De Giorgi, M.Forti e G.Lenzi, "Una proposta di teorie di base dei Fondamenti della Matematica", Rend. Mat. Acc. Lincei, ser.9, **5,** 11 (1994); **5,** 117 (1994); **6,** 79 (1995) .